VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

КЛАССИКИ НАУКИ



ГУСТАВ РОБЕРТ КИРХГОФ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Ответственный редактор
Л. С. ПОЛАК

Издание подготовили
Е. И. ПОГРЕБЫССКАЯ и Л. С. ПОЛАК



МОСКВА «НАУКА» 1988

УДК 535.231.2+535.33+537.313

Серия «Классики науки»
Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А. А. Баев (председатель),
И. Е. Дзялошинский, *А. Ю. Ишлинский*, *С. П. Капица*,
И. Л. Кнунянц, *С. Р. Микулинский*, *Д. В. Ознобишин* (ученый секретарь),
Л. С. Полак, *Я. С. Смородинский*, *А. С. Спирин*,
И. Т. Фролов (заместитель председателя), *А. Н. Шамин*, *А. Л. Яншин*

Кирхгоф Густав. **Избранные труды.** М.: Наука, 1988.

В книгу включены работы, выдающегося немецкого физика XIX в. Г. Кирхгофа, по термодинамике излучения, физической оптике, электростатике, спектральному анализу, теории упругости, диффузии газов, гидродинамике. В Приложении приводятся очерк о жизни и деятельности Г. Кирхгофа, комментарии к его работам, библиография трудов. На русском языке избранные труды Г. Кирхгофа публикуются впервые.

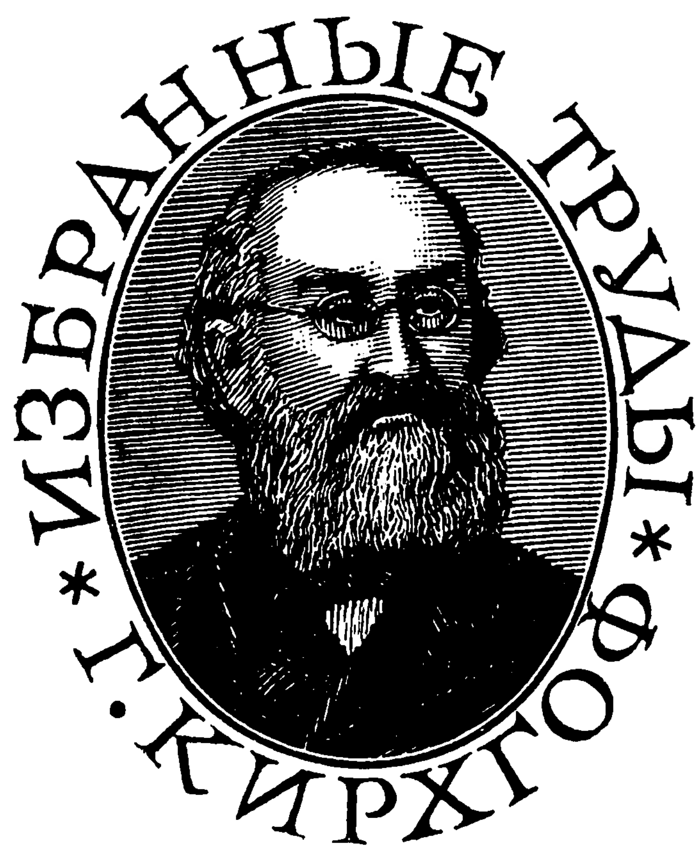
Книга представляет интерес для физиков, химиков, механиков, историков науки.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *Б. М. Болотовский*,
кандидат физико-математических наук *Н. В. Вдовиченко*

К $\frac{1704000000\text{-}315}{042(02)\text{-}88}$ 135-88-III
ISBN 5-02-000075-2

© Издательство «Наука», 1988


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ * Г. КИРХГОФ *

ОТ РЕДАКТОРА

Густав Роберт Кирхгоф (1824—1887) — замечательный немецкий физик — принадлежит к тому поколению, когда теоретическая физика и физика экспериментальная очень часто были предметом основополагающих исследований одного ученого.

Кирхгоф по праву считается одним из творцов теоретической и математической физики. На протяжении многих лет он не только успешно использовал математику для прогресса естествознания, но и наметил и разработал ряд новых подходов к решению задач, обогативших математическую физику. Кирхгоф справедливо считал и показал на многих примерах, что строгий анализ в естественных науках не менее важен, чем в чистой математике. Не даром он писал, что самый легкий путь сделать какое-либо утверждение достаточно обоснованным — это дать ему строгое доказательство. И в этом отношении можно считать, что его работы предшествуют методам и подходам современной теоретической физики.

Классические исследования Кирхгофа в области теоретической физики: открытие закона Кирхгофа в термодинамике лучистой энергии, законов Кирхгофа ветвления токов, обоснование принципа Гюйгенса—Френеля и открытие (совместно с Бунзеном) спектрального анализа в области экспериментальной физики — сыграли огромную роль в развитии физики и техники. По сей день они являются источником научных исследований и все возрастающего числа технических приложений.

Кроме этих основополагающих исследований, Кирхгофу принадлежат чрезвычайно важные исследования в области теории упругости, механики сплошных сред, гидродинамики, теории диффузии газов.

Теоретические работы Кирхгофа представляют собой великолепный образец строгого и ясного изложения рассматриваемых им вопросов, а его экспериментальные исследования — пример тщательного осуществления всесторонне продуманных экспериментов.

Из работ Кирхгофа на русский язык переведены лишь «Механика. Лекции по математической физике» под ред. А. Т. Григорьяна и Л. С. Полака (М.: изд-во АН СССР, 1962) и статья «Об отношении между испуска-

тельной и поглощательной способностями для тепла и света» в книге Х. Г. Шепфа «От Кирхгофа до Планка» (М.: Мир, 1981).

Содержание настоящей книги составляют основные работы Кирхгофа по физической оптике, термодинамике, электростатике, теории электрических токов, теории упругости, гидродинамике, диффузии газов и спектральному анализу.

В разделе Приложение помещены статья о жизни и научном творчестве Г. Кирхгофа, библиография и комментарии. Цифрами в квадратных скобках отмечены места в основном тексте, к которым относятся комментарии.

Считаю необходимым отметить, что на начальной стадии подготовки этой книги избранных трудов Г. Кирхгофа большую роль сыграл ныне покойный видный историк науки У. И. Франкфурт.



G Kirchhoff

I

РАБОТЫ ПО ТЕРМОДИНАМИКЕ ИЗЛУЧЕНИЯ И ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКЕ

1.
О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ СВЕТА И ТЕПЛА *

Несколько недель тому назад я имел честь сделать Академии сообщение о некоторых опытах, представлявшихся мне интересными потому, что они позволяют сделать выводы о химическом составе солнечной атмосферы [1]. Опираясь на эти опыты, мне теперь удалось путем простого теоретического исследования прийти к общему утверждению, которое кажется важным во многих отношениях. Поэтому разрешите доложить его Академии. Оно (утверждение) выражает одно свойство всех тел и относится к эмиссии и поглощению тепла и света.

Если в неяркое пламя бунзеновской горелки ввести хлористый натрий или хлористый литий, то получится раскаленное тело, испускающее свет только определенной длины волны и поглощающее свет только той же длины волны. Такими словами можно выразить результат упомянутых опытов. Как эти наблюдения связаны с излучением и поглощением невидимых тепловых лучей — неизвестно; однако кажется несомненным, что можно представить себе такое тело, которое из всех тепловых лучей, как видимых, так и невидимых, испускает лучи только одной длины и поглощает лучи только той же длины волны. Если допустить это, а также допустить, что возможно зеркало, полностью отражающее все лучи, то можно на основе общих положений механической теории тепла очень легко доказать, что для лучей одной и той же длины волны при одинаковой температуре отношение испускательной способности к поглощательной способности для всех тел одно и то же [2].

Представим себе в виде неограниченной пластины некоторое тело C, испускающее только лучи с длиной волны Λ и поглощающее только такие же; напротив него пусть находится тело c в виде такой же пластины, которое испускает и поглощает лучи всех возможных длин волн; внешние поверхности этих пластин пусть покрыты идеальными зеркалами R и r. Если в этой системе должно когда-то установиться равенство температур, то каждое из обоих тел должно иметь одну и ту же температуру, следовательно, оно будет получать путем поглощения столько тепла, сколько терять путем излучения [3]. Теперь рассмотрим сначала те из лучей, испускаемых c, которые имеют длину волны λ, отличающуюся от Λ. На эти лучи тело C не оказывает никакого влияния; они будут так отражаться от зеркала R, словно тело C вовсе и не существует; некоторая их часть затем будет поглощена телом c, остальные достигнут зер-

* Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme // Ges. Abhandl. Leipzig, 1882. S. 566—571. Перевод Р. Б. Сегаля.

кала R второй раз, отразятся от него снова, частично поглотятся c и т. д. Все лучи с длиной волны λ, излучаемые телом c, будут, таким образом, снова и снова им поглощаться. Так как это справедливо для всех значений λ, отличных от Λ, то неизменность температуры тела c требует, чтобы оно поглощало столько же лучей с длиной волны Λ, сколько оно само испускает. Пусть для этой длины волны e — испускательная способность, а a — поглощательная способность тела c; E и A — соответствующие величины для тела C. Из количества излучения E, испускаемого телом C, тело c поглощает aE и назад отбрасывает $(1-a)\ E$; из них тело C поглощает количество $A\ (1-a)\ E$ и отбрасывает $(1-A)\ (1-a)\ E$ назад к c, которое, в свою очередь, поглощает $a\,(1-A)/(1-a)\ E$. Продолжив это рассмотрение, видим, что c отбирает от E количество лучей, которое, если краткости ради ввести обозначение

$$(1-A)(1-a)=k,$$

равно

$$aE\,(1+k+k^2+k^3+\ \ldots),$$

т. е. равно $aE/(1-k)$.

Из количества энергии e, излучаемого телом c, оно же само, как показывает подобное рассуждение, поглощает

$$\frac{a\,(1-A)\,e}{1-k}.$$

Поэтому условием того, что температура тела c не изменится, будет равенство [4]

$$e=\frac{aE}{(1-k)}+\frac{a\,(1-A)\,e}{(1-k)},$$

т. е. равенство

$$\frac{e}{a}=\frac{E}{A}.$$

Мы придем к такому же равенству при условии, что неизменной остается температура тела C. Заменив тело c некоторым другим с такой же температурой и повторив рассуждение, найдем такое же значение для отношения испускательной способности к поглощательной способности этого тела для лучей одной и той же длины волны Λ. Но ведь длина волны Λ и температура произвольны. Отсюда следует утверждение, что для лучей одной и той же длины волны при одинаковой температуре отношение испускательной способности к поглощательной способности для всех тел одно и то же.

При этом понятия испускательной и поглощательной способностей относятся прежде всего к случаю, когда тело является неограниченной пластиной, покрытой с одной стороны идеальным зеркалом. Но количество лучей, испускаемое в одну сторону свободно расположенной пластиной, в точности таково, как и количество лучей, которое испускает пластина половинной толщины, покрытая с одной стороны зеркалом, и обе эти пластины одинаково поглощают падающие на них лучи. Поэтому в высказанном утверждении можно определить испускательную способность тела как количество лучей, которое испускает

в одну сторону свободно расположенная, неограниченная пластина, образованная телом, а поглощательную способность — как количество лучей, которое эта же пластина поглощает из единицы падающего на нее количества лучей.

Одинаковое для всех тел отношение испускательной способности к поглощательной способности e/a есть функция длины волны и температуры. При более низких температурах эта функция равна нулю для длин волн видимых лучей и отлична от нуля для бóльших значений длины волны; при более высоких температурах эта функция имеет конечное значение также и для длин волн видимых лучей. При тех температурах, при которых функция перестает быть равной нулю для некоторых видимых лучей, все тела начинают испускать свет с лучами соответствующего цвета, за исключением тех тел, которые для данного цвета при этой же температуре имеют исчезающе малую поглощательную способность; чем больше поглощательная способность, тем больше света излучает тело. Тем самым получают объяснение известные факты, согласно которым прозрачные газы для своего свечения требуют много большей температуры, чем непрозрачные тела, а при той же температуре газы светятся всегда слабее последних. Далее следует, что если сквозь раскаленный газ, спектр которого является несплошным, пропустить лучи достаточной интенсивности, спектр которых сам по себе не содержит ни темных, ни светлых линий, то на том месте спектра светящегося газа, на котором находились светлые линии, появятся теперь темные. Следовательно, предложенный мною в предыдущем сообщении способ определения химического состава атмосферы теперь получает теоретическое обоснование.

Воспользуюсь этой возможностью, чтобы упомянуть об одном результате, полученном мною после опубликования предыдущего сообщения. Из исследований Уитстона, Массона, Ангстрема и других известно, что в спектре электрической искры появляются светлые линии, определяемые природой металлов, между которыми проскакивает искра. Можно предположить, что эти линии совпадают с линиями, которые образовались бы в пламени очень высокой температуры, если в него внести этот металл в соответствующем виде. Я исследовал зеленую часть спектра электрической искры, возникающей между железными электродами, и нашел в нем большое число светлых линий, совпадающих с темными линиями солнечного спектра. У отдельных линий это совпадение вряд ли можно констатировать надежно; но полагаю, что я его увидел для многих групп линий, при этом светлым линиям спектра соответствовали темные линии солнечного спектра. Отсюда считаю необходимым заключить, что эти совпадения не были только кажущимися. Если же искра создавалась между другими металлами, например между медными электродами, то таких светлых линий не было. Считаю, что у меня есть право отсюда заключить, что в составе раскаленной солнечной атмосферы имеется железо. Этот вывод кажется еще более правдоподобным, если вспомнить о широком распространении железа на Земле и в метеоритных камнях. Из темных линий солнечного спектра, совпадающих, по-видимому, со светлыми линиями спектра железа, на рисунке Фраунгофера [5] спектра Солнца я смог отметить лишь немногие; к ним относятся линия E, некоторые менее четкие линии вблизи E по направлению к фиолетовому концу спектра и одна линия из трех очень ярких линий, обозначенных Фраунгофером через b.

2.
ОБ ОТНОШЕНИИ МЕЖДУ ИСПУСКАТЕЛЬНОЙ И ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТЯМИ ТЕЛ ДЛЯ ТЕПЛА И СВЕТА *

§ 1. Предпосылки. По своей природе тепловые лучи одинаковы со световыми; одни являются частным случаем других. Невидимые тепловые лучи отличаются от световых только величиной периода колебаний либо длиной волны.

Все тепловые лучи при их распространении подчиняются закономерностям, известным для световых лучей.

Светящееся тело, находящееся в пустом пространстве, испускает световые лучи, не зависящие от тел, на которые они падают; соответственно все тепловые лучи, испускаемые телом, не зависят от тел, которые его окружают.

Из тепловых лучей, падающих на тело от окружающих его тел, часть поглощается, остальные уходят снова в направлениях, определяемых отражением и преломлением. Преломленные и отраженные телом лучи распространяются вместе с испускаемыми им, не искажая друг друга.

При испускании телом тепловых лучей количество тепла, в нем содержащееся, уменьшается на величину, эквивалентную живой силе [1] этих лучей, а при поглощении тепловых лучей возрастает на величину, эквивалентную живой силе поглощаемых лучей. Но в некоторых случаях, когда поглощение и излучение производят в теле другие изменения, имеет место исключение из этого правила. Например, у тел, которые под влиянием света изменяются химически, или у источников света, которые вследствие переизлучения полученного ими света теряют способность к свечению. Такие случаи должны быть исключены путем допущения, что свойства тела *не претерпевают никакого изменения ни вследствие того, что оно испускает либо поглощает лучи, ни вследствие другого испытываемого им воздействия, если только его температура благодаря притоку или оттоку тепла поддерживается постоянной*. При этом условии согласно утверждению об эквивалентности теплоты и работы количество теплоты, которое надо подвести к телу, чтобы воспрепятствовать охлаждению, наступающему вследствие его излучения, эквивалентно живой силе испускаемых лучей, а количество теплоты, которое следует от него отвести, чтобы устранить нагревание вследствие поглощения тепловых лучей, эквивалентно живой силе поглощаемых лучей.

Пусть тело, удовлетворяющее этому условию, заключено в оболочку, имеющую ту же температуру, что и тело, сквозь которую не могут проходить никакие тепловые лучи; и пусть оболочка удовлетворяет тому же условию, а температура ее поддерживается постоянной. Тело испускает тепловые лучи и само облучается лучами, частично исходящими из оболочки, частично же отбрасываемыми ею обратно к телу. Часть этих лучей тело поглощает. Его температура

* Ueber der Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht // Ges. Abhandl. Leipzig, 1882. S. 571—592. Перевод Р. Б. Сегаля.

при этом должна оставаться постоянной, без сообщения ему или отвода от него теплоты, как это вытекает из принципа, из которого получается утверждение Карно [2]. Поэтому живая сила лучей, испускаемых телом за определенный промежуток времени, должна равняться живой силе лучей, за то же время им поглощаемых.

Проводимое в дальнейшем доказательство, основанное на этом заключении, требует точного исследования лучей, идущих туда и обратно между телом и оболочкой. Это исследование будет существенно облегчено, если представить себе оболочку, целиком или большей частью состоящую из тел, которые на бесконечно малой толщине полностью поглощают все падающие на них лучи.

Такие тела я буду называть абсолютно черными, или, короче, черными [3]. Черное тело в этом смысле слова должно иметь такой же показатель преломления, что и среда, из которой на него падает излучение. Тогда на его поверхности не будет никакого отражения, и все падающие лучи будут полностью поглощаться. Плотный пар иода в контакте с атмосферным воздухом или смолу в контакте со стеклом можно было бы приблизительно рассматривать как черные тела, но не пар иода в контакте со стеклом или смолу в контакте с воздухом. Здесь прежде всего будет исследоваться излучение в пустом пространстве, поэтому черные тела, о которых пойдет речь, должны иметь показатель преломления, который лишь бесконечно мало отличается от единицы.

Предположение, что такие черные тела допустимы, является существенным вспомогательным средством в приводимом далее доказательстве. Затем предположим, что допустимы абсолютно теплопрозрачные тела, т. е. такие, которые из падающих на них тепловых лучей — какой бы природы они ни были — ничего не поглощают, и, наконец, что допустимо абсолютное зеркало, т. е. тело, полностью отражающее все падающие на него тепловые лучи. Абсолютное зеркало, как и всякое абсолютно теплопрозрачное тело, не может испускать никаких тепловых лучей; ибо в таком случае, будучи заключенным внутрь оболочки с одинаковой температурой, оно эту оболочку нагревало бы все больше и больше, а само бы охлаждалось.

§ 2. Определения. Представим себе два экрана S_1 и S_2, расположенные перед телом C (рис. 1). В экранах имеются отверстия 1 и 2, размеры которых бесконечно малы по сравнению с расстоянием между ними, и каждое из отверстий имеет центр. Через эти отверстия идет пучок лучей, испускаемых телом C. Рассмотрим те лучи из этого пучка, у которых длины волн заключены между λ и $\lambda+d\lambda$, и разделим их на две поляризованные компоненты, плоскостями поляризации которых являются две взаимно перпендикулярные плоскости a и b, проходящие через ось пучка лучей. Пусть $Ed\lambda$ — интенсивность компоненты, поляризованной вдоль a, или, что то же самое, прирост живой силы эфира за экраном S_2 в единицу времени, вызванный этой компонентой. Величину E назовем испускательной способностью тела C.

На тело C падает пучок лучей с длиной волны λ, прошедший через отверстия 2 и 1 в обратном направлении, поляризованный вдоль плоскости a; некоторая часть его поглощается телом, а остальная отражается или пропускается. Пусть отношение интенсивности поглощенных лучей к интенсивности падаю-

щих лучей будет A, назовем его **п о г л о щ а т е л ь н о й с п о с о б н о с т ь ю** тела C.

Величины E и A зависят от природы и состояния тела C, но, кроме того, и от расположения и вида отверстий 1 и 2, от длины волны λ и положения плоскости a.

§ 3. При этих определениях действительно утверждение: **о т н о ш е н и е и с п у с к а т е л ь н о й с п о с о б н о с т и к п о г л о щ а т е л ь н о й д л я в с е х т е л п р и о д и н а к о в о й т е м п е р а т у р е о д и н а к о в о.**

Это утверждение сначала следует доказать для случая, когда сравниваются друг с другом только черные тела, т. е. такие, у которых поглощательная способность равна единице. Это означает, что надо доказать, что испускательная способность всех черных тел при одинаковой температуре одинакова. Доказательство этого частного случая подобно доказательству общего, но проще, поэтому оно облегчит понимание последнего. Кроме того, при доказательстве общего случая будут использованы следствия, получающиеся из частного утверждения.

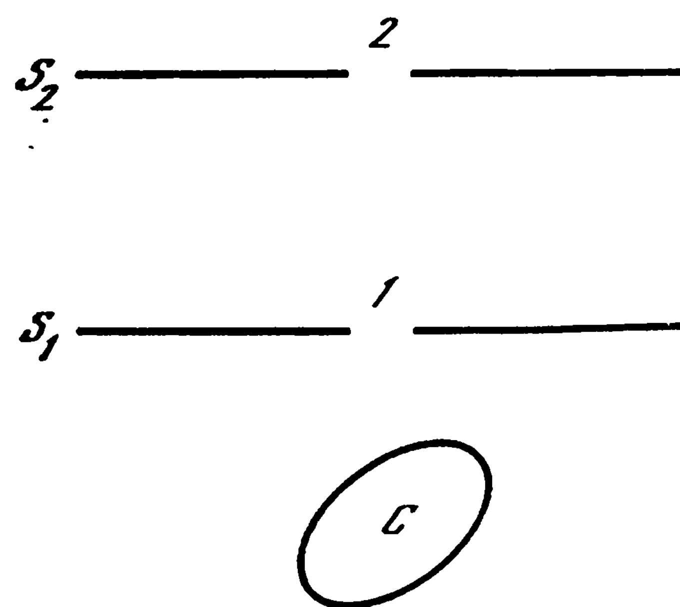


Рис. 1

§ 4. Доказательство утверждения § 3 для черных тел. Пусть тело C будет черным; его испускательную способность, в общем случае обозначаемую через E, обозначим теперь буквой e; надо будет доказать, что e остается неизменной, если заменить C каким-либо другим черным телом с той же температурой.

Представим себе тело C заключенным в черную оболочку, частью которой является экран S_1; второй экран S_2, как и первый, изготовлен из черного вещества, и пусть оба соединены друг с другом черными боковыми стенками, как это показано на рис. 2. Пусть отверстие 2 закрыто сначала такой же черной поверхностью, которую я назову поверхностью 2. Вся система должна обладать одинаковой температурой, и оболочка снаружи должна поддерживаться при постоянной температуре. Согласно утверждениям, сделанным в § 1, живая сила лучей, испускаемых телом C в единицу времени, должна равняться живой силе лучей, поглощаемых им за то же время. Другими словами, сумма интенсивностей лучей, которые тело испускает, должна равняться сумме интенсивностей лучей, которые на него падают, так как последние в соответствии с предположением тело полностью поглощает.

Теперь представим себе, что поверхность 2 удалена и открывшееся отверстие будет закрыто частью непосредственно за ним расположенной абсолютно зеркальной сферической поверхности, центр которой находится в центре отверстия 1. Равновесие температуры установится и в этом случае. Равенство интенсивности лучей, испускаемых телом C и падающих на него, должно также иметь место и теперь. Но так как тело C испускает те же лучи, что и в предыдущем случае, то, следовательно, и интенсивность лучей, падающих на тело, в обоих случаях одинакова. При удалении поверхности 2 тело C лишилось тех лучей, которые она посылала телу через отверстие 1, но зато помещенное за отверстием 2 вогнутое зеркало отбрасывает обратно к телу C испускаемые им лучи, прошедшие через отверстия 1 и 2, ибо вогнутое зеркало дает изображение

отверстия 1, совпадающее с самим отверстием [1]. Отсюда получается, что интенсивность пучка лучей, посылаемых телом C через отверстия 1 и 2, равна интенсивности пучка лучей, испускаемых черной поверхностью 2 через отверстие 1. Так как э т а интенсивность не зависит от вида и иных свойств черного тела C, то и другая также не зависит от его свойств. Тем самым доказывалось бы высказанное утверждение, если бы при этом все лучи обоих сравниваемых друг с другом пучков лучей имели длину волны λ и были поляризованы в плоскости a. Но оба пучка лучей состоят из разнородных частей, и из равенства интенсивностей целых пучков нельзя непосредственно заключить о равенстве интенсивностей соответствующих частей.

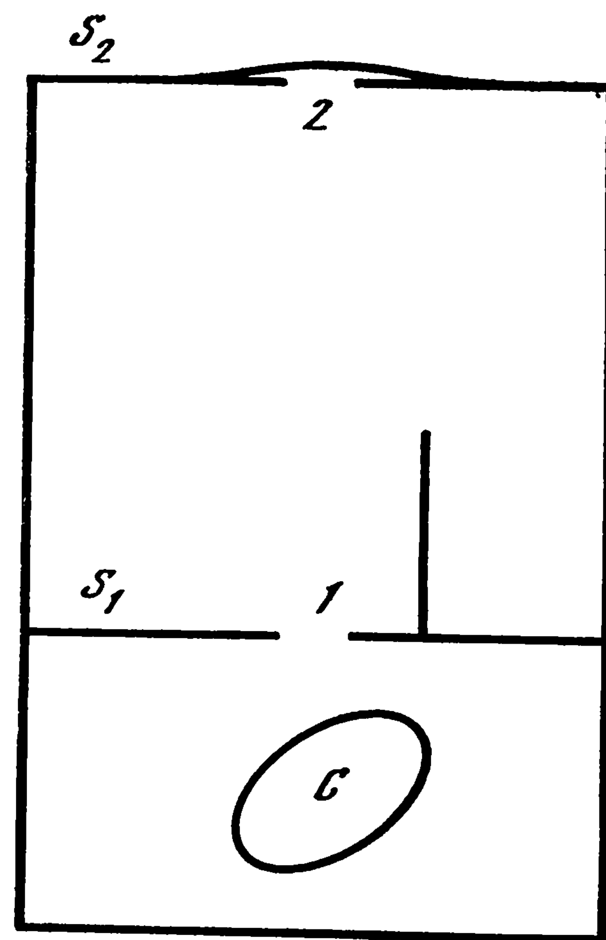


Рис. 2

Было бы легко дать необходимое дополнение к доказательству, если было бы возможно предположить пластину, пропускающую без ослабления лучи с длиной волн от λ до $d\lambda$, плоскость поляризации которых параллельна плоскости a, но полностью отражающую лучи с другой длиной волны или с другой плоскостью поляризации. Если модифицировать представленное на рис. 2 устройство, поместив такую пластину перед отверстием 1, то придем непосредственно к доказываемому утверждению путем рассмотрения этого устройства.

Но предположение, что такая пластина возможна, ничем не оправдано. Зато возможна пластина, которая пропускает или отражает ту или иную часть лучей, падающих на нее в одном направлении, в зависимости от их длины волны и положения плоскости поляризации. Такой является пластина столь тонкая, что в видимых лучах она показывает цвета тонких пленок. Такую пластину, поставив ее наклонно к лучу, и следует использовать в опыте, о котором идет речь. Но при этом надо выбрать направление, в котором оба сравниваемых пучка лучей не проходили бы сквозь пластину, но отражались ею при угле поляризации, когда плоскость отражения совпадает с плоскостью a. Этим достигается то преимущество, что перпендикулярно к a поляризованные лучи полностью выпадают из рассмотрения. Далее, пластина должна изготавливаться из абсолютно теплопрозрачного материала; тогда она не поглощает и не испускает никаких лучей.

§ 5. Между отверстиями 1 и 2 показанного на рис. 2 устройства поместим описанную выше пластину, которую обозначим через P [2].

Расположим ее так, что проходящий через отверстия 1 и 2 пучок лучей падает на нее под углом поляризации и плоскость падения есть плоскость a. Стенка, соединяющая экраны S_1 и S_2 друг с другом, пусть устроена таким

[1] Дифракцией лучей на границах отверстия 2 можно пренебречь, так как отверстия 1 и 2 можно сделать бесконечно малыми по сравнению с расстоянием между ними и в то же время бесконечно большими по сравнению с длинами волн, т. е. принять столь большими, чтобы явления дифракции были незаметны.

[2] См. рис. 3. — *Примеч. ред.*

образом, что зеркальное изображение отверстия 2, создаваемое пластиной Φ, находится на стенке. На месте этого зеркального изображения и в соответствии с ним представим себе отверстие, названное мною отверстием 3. Пусть отверстие 2 закрыто черной поверхностью, имеющей температуру всей системы, отверстие 3 вначале закрыто такой же поверхностью, которую я назову поверхностью 3, а другой раз закрыто идеальным вогнутым зеркалом, центр которого находится на месте зеркального изображения центра отверстия 1, создаваемого пластиной P.

В обоих случаях имеет место тепловое равновесие. Из рассмотрения, подобного проведенному в предыдущем параграфе, следует, что сумма интенсивностей лучей, которых тело лишилось при удалении поверхности 3, равна сумме интенсивностей лучей, идущих к телу от установленного вогнутого зеркала. Черный экран S_3 (имеющий температуру системы) установим так, чтобы ни один из лучей, испускаемых поверхностью 3, не попадал прямо в отверстие 1.

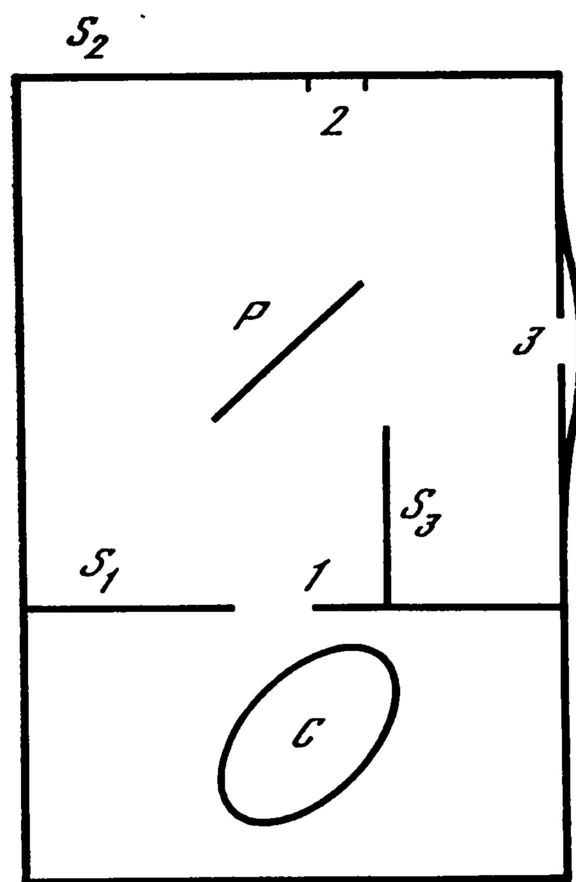


Рис. 3

Тогда первая сумма есть интенсивность лучей, вышедших из поверхности 3, отраженных пластиной P и прошедших через отверстие 1; обозначим ее Q. Вторая сумма слагается из двух частей; одна часть — интенсивность лучей, исходящих от тела C, — равна

$$\int_0^\infty er^2 d\lambda \quad [4],$$

где r обозначает величину, зависящую от свойств пластины P и длины волны λ; другая часть обязана лучам, вышедшим из части черной поверхности, соединяющей экраны S_1 и S_2, прошедшим пластину P и отраженным сначала от вогнутого зеркала, а затем от пластины P. Эту часть обозначим через R.

Нет надобности исследовать величину R подробнее. Достаточно заметить, что R, как и Q, не зависит от свойств тела C. Между названными величинами имеет место равенство

$$\int_0^\infty er^2 d\lambda + R = Q.$$

Заменив тело C другим черным телом с той же температурой и обозначив для него через e' величину, которую мы для первого тела обозначили через e, получим равенство

$$\int_0^\infty e'r^2 d\lambda + R = Q.$$

Отсюда следует

$$\int_0^\infty (e - e')\, r^2 d\lambda = 0.$$

Допустим теперь, что показатель преломления пластины P лишь немного отличается от единицы. Из теории цветов тонких пленок следует, что $r = \rho \sin^2 (p/\lambda)$, где p есть величина, пропорциональная толщине пластины P и не зависящая от λ, а ρ — величина, не зависящая от толщины пластины. Вследствие этого выведенное уравнение приобретает вид

$$\int_0^\infty (e - e')\, \rho^2 \sin^4 \frac{p}{\lambda}\, d\lambda = 0.$$

Из того что это равенство должно иметь место для любой толщины пластины P, т. е. для любого значения p, можно заключить, что для всякой величины λ $e - e' = 0$.

Чтобы доказать это, заменим в приведенном равенстве $\sin^4 (p/\lambda)$ на

$$\frac{1}{8}\left(\cos 4\frac{p}{\lambda} - 4\cos 2\frac{p}{\lambda} + 3\right)$$

и продифференцируем уравнение дважды по p; получим

$$\int_0^\infty \frac{(e - e')}{\lambda^2}\, \rho^2 \left(\cos 4\,\frac{p}{\lambda} - \cos 2\,\frac{p}{\lambda}\right) d\lambda = 0.$$

Введем вместо λ новую величину α, т. е. $2/\lambda = \alpha$, и положим

$$(e - e')\rho^2 = f(\alpha).$$

Таким образом получим

$$\int_0^\infty f(\alpha)(\cos 2p\alpha - \cos p\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Приняв во внимание, что, если $\varphi(\alpha)$ означает произвольную функцию α, имеем

$$\int_0^\infty \varphi(\alpha) \cos 2p\alpha d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos p\alpha d\alpha,$$

в чем можно убедиться, если вместо α подставить $\alpha/2$. Поэтому можно далее написать

$$\int_0^\infty \left[f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2f(\alpha)\right] \cos p\alpha d\alpha = 0.$$

Это равенство умножим на $\cos xpdp$, где x — произвольная величина, и проинтегрируем его от $p=0$ до $p=\infty$. Согласно преобразованию Фурье, выражаемому равенством

$$\int\limits_0^\infty \cos pxdp \int\limits_0^\infty \varphi(\alpha) \cos p\alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} \varphi(x),$$

получим $f(x/2)=2f(x)$ или $f(\alpha/2)=2f(\alpha)$.

Отсюда следует, что функция $f(\alpha)$ либо исчезающе мала для всех значений α, либо становится бесконечно велика, когда α стремится к нулю. Если α стремится к нулю, то λ стремится к бесконечности. Вспомнив, каков смысл $f(\alpha)$, и приняв во внимание, что ρ есть правильная дробь и что ни e, ни e' не могут становиться бесконечно большими, когда λ стремится к бесконечности, видим, что второй случай не может иметь места и что поэтому для всех значений λ должно быть $e=e'$.

Подобным же образом можно рассмотреть случай, когда C не черное, но произвольное тело. И не обязательно предполагать, что оно однородно; поэтому частично на его поверхности, частично внутри него падающие на тело от черной оболочки лучи могут претерпевать самые разнообразные превращения. Поэтому в качестве подготовки к последующему доказательству надо исследовать излучение, имеющее место между черными поверхностями с одинаковой температурой при наличии между ними произвольных тел. Этому исследованию, основанному на доказанном сейчас утверждении, посвящены следующие параграфы.

§ 6. Излучение черных поверхностей, расположенных друг против друга. Если пучок лучей, испускаемых черным телом C через отверстия 1 и 2, частично линейно поляризован, то при повороте тела C вокруг оси плоскость поляризации поляризованной части пучка тоже должна поворачиваться. Поэтому такое вращение должно было бы изменять величину e. Так как согласно доказанному равенству такого изменения произойти не может, то пучок лучей не имеет линейно поляризованной части. Можно доказать, что он не может иметь и части, поляризованной по кругу. Однако это доказательство здесь не будет приведено. И без него можно допустить, что мыслимы черные тела, структура которых не дает никаких оснований к тому, чтобы в каком-либо направлении они должны были испускать больше лучей, поляризованных по кругу с вращением вправо, чем лучей, поляризованных по кругу с вращением влево. Будем предполагать, что таким свойством обладают черные тела, рассматриваемые в дальнейшем; во всех направлениях они испускают неполяризованные лучи.

§ 7. Обозначенная буквой e величина зависит, помимо температуры и длины волны, от вида и относительного расположения отверстий 1 и 2. Пусть w_1 и w_2 — проекции отверстий 1 и 2 на плоскость, перпендикулярную оси рассматриваемого пучка лучей, а s — расстояние между отверстиями. Тогда

$$e = I\frac{w_1 w_2}{s^2},$$

где I — функция только длины волны и температуры.

§ 8. Так как форма тела C произвольна, то можно взять его в виде поверхности, заполняющей отверстие 1, которую я назову площадкой 1; экран S_1 можно тогда считать отсутствующим. Также и экран S_2 можно считать отсутствующим,

если пучок лучей, к которому относится e, определить как такой, который идет от площадки 1 к площадке 2, в точности заполняющей отверстие 2.

§ **9**. Следствие, вытекающее непосредственно из последнего равенства и используемое в дальнейшем, заключается в том, что значение e остается неизменным, если поменять отверстия 1 и 2 местами.

§ **10**. Теперь надо доказать утверждение, которое можно рассматривать как обобщение высказанного в последнем параграфе.

Представим себе, что между двумя черными площадками с одинаковой температурой 1 и 2 находятся тела, которые произвольным образом преломляют, отражают и поглощают лучи, посылаемые этими площадками друг другу. От площадки 1 на площадку 2 могут попасть различные пучки лучей. Выберем из них один и рассмотрим у площадки 1 те из его лучей, длина волны которых заключена в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, разложим их на две компоненты, плоскостями поляризации которых являются две взаимно перпендикулярные плоскости a_1 и b_1 (в остальном произвольные).

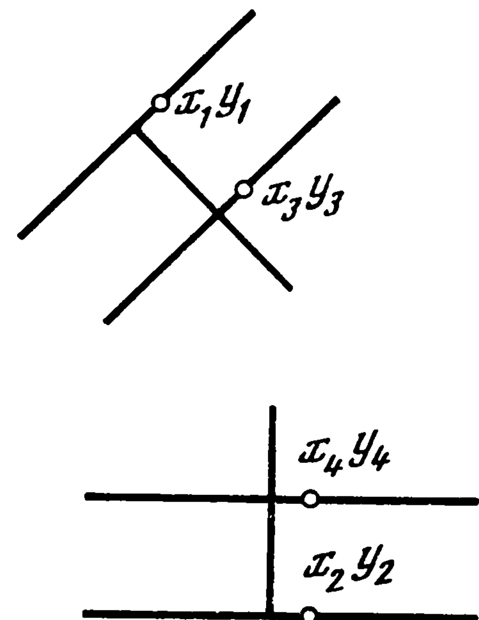


Рис. 4

Лучи от первой компоненты, приходящие к площадке 2, разложим на две компоненты, плоскостями поляризации которых являются две взаимно перпендикулярные (в остальном произвольные) плоскости a_2 и b_2. Интенсивность компоненты, поляризованной вдоль a_2, пусть будет $Kd\lambda$. Из пучка лучей, который по тому же пути, что и предыдущий, идет от 2 к 1, рассмотрим у площадки 2 лучи, имеющие длину волны в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, и разложим их на две компоненты, поляризованные в плоскостях a_2 и b_2. Лучи от первой компоненты, приходящие к площадке 1, разложим на две компоненты, плоскостями поляризации которых являются a_1 и b_1. Интенсивность компоненты, поляризованной вдоль a_1, пусть будет $K'd\lambda$. Тогда должно быть $K=K'$.

Доказательство этого утверждения проведем прежде всего в предположении, что рассматриваемые лучи на своем пути не претерпевают никакого ослабления, т. е., что преломления и отражения происходят без потерь, поглощение отсутствует и лучи, исходящие из площадки 1 и поляризованные в плоскости a_1, приходят к площадке 2 поляризованными в плоскости a_2, а также наоборот.

В центре площадки 1 расположим плоскость, перпендикулярную оси выходящего или приходящего пучка лучей, и представим себе на ней прямоугольную систему координат, начало отсчета которой совпадает с центром площадки. Пусть x_1, y_1 — координаты точки этой плоскости (рис. 4). На расстоянии от этой плоскости, равном единице длины, представим себе вторую, параллельную ей плоскость и на ней систему координат, начало отсчета которой лежит на оси пучка лучей. Оси обеих систем координат параллельны между собой.

Пусть x_3, y_3 — координаты точек второй плоскости. Подобным же образом через центр площадки 2 перпендикулярно оси испускаемого или падающего пучка лучей проведем плоскость и построим на ней прямоугольную систему координат с началом в центре площадки; x_2, y_2 — координаты некоторой точки этой плоскости. На расстоянии от этой плоскости, равном единице длины, и параллельно ей представим себе, наконец, четвертую плоскость, а на ней си-

стему координат с осями, параллельными осям x_2, y_2, и с началом отсчета, лежащим на оси пучка лучей; x_4, y_4 — координаты некоторой точки этой четвертой плоскости.

Из произвольной точки (x_1, y_1) луч идет в произвольную точку (x_2, y_2); пусть T — время, необходимое лучу, чтобы попасть из одной точки в другую. Оно является функцией x_1, y_1, x_2, y_2, которую будем предполагать известной. Если точки (x_3, y_3) и (x_4, y_4) лежат на пути рассматриваемого луча, то время (краткости ради полагая скорость распространения луча в пустом пространстве равной единице) необходимое лучу, чтобы от точки (x_3, y_3) попасть в точку (x_4, y_4), равно

$$T - \sqrt{1+(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} - \sqrt{1+(x_2-x_4)^2+(y_2-y_4)^2}.$$

Если точки (x_3, y_3), (x_4, y_4) заданы, а точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) требуется найти, то это можно сделать из условия, что приведенное выше выражение имеет минимум [5]. Примем, что восемь координат x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4 бесконечно малы, отсюда условие того, что четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) лежат на одном луче, выражается следующими уравнениями:

$$x_3 = x_1 - \frac{\partial T}{\partial x_1}, \qquad x_4 = x_2 - \frac{\partial T}{\partial x_2},$$
$$y_3 = y_1 - \frac{\partial T}{\partial y_1}, \qquad y_4 = y_2 - \frac{\partial T}{\partial y_2}.$$

Пусть теперь (x_1, y_1) есть точка проекции площадки 1 на плоскость x_1, y_1, а dx_1dy_1 — бесконечно малый элемент этой проекции, на котором лежит точка (x_1, y_1). Считаем, что этот элемент более высокого порядка малости по сравнению с площадками 1 и 2. Пусть x_3, y_3 — точка на пути луча, выходящего из (x_1, y_1) и падающего на поверхность 2; dx_3dy_3 — элемент поверхности, на котором лежит точка (x_3, y_3). Этот элемент такого же порядка, что и dx_1dy_1. Интенсивность лучей заданной длины волны и избранного направления поляризации, выходящих из dx_1dy_1 и прошедших через dx_3dy_3, согласно § 7

$$d\lambda I dx_1 dy_1 dx_3 dy_3.$$

В соответствии со сделанным предположением эти лучи без ослабления достигают поверхности 2 и имеют интенсивность $Kd\lambda$. K есть взятый в соответствующих пределах интеграл

$$I \int\int\int\int dx_1 dy_1 dx_3 dy_3.$$

Здесь интегрирование по x_3 и y_3 распространяется на те значения, которые эти величины принимают согласно полученным для них уравнениям, когда x_1 и y_1 сохраняют постоянные значения, а x_2, y_2 принимают все значения, соответствующие точкам проекции площадки 2 на плоскость x_2, y_2; затем производится интегрирование по координатам x_1, y_1 проекций площадки 1. Однако ограниченный указанными пределами двойной интеграл

$$\int\int dx_3 dy_3 = \int\int \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\frac{\partial y_3}{\partial y_2} - \frac{\partial x_3}{\partial y_2}\frac{\partial y_3}{\partial x_2}\right) dx_2 dy_2,$$

или, согласно уравнениям для x_3, y_3, равен

$$\int\int\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2}-\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2}\frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1}\right)dx_2 dy_2,$$

где интегрирование распространяется на всю проекцию площадки 2.

Отсюда следует

$$K=I\int\int\int\int\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 T}{\partial y_1 \partial y_2}-\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial y_2}\frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial y_1}\right)dx_1 dy_1 dx_2 dy_2,$$

где интегрирование производится по проекциям площадок 1 и 2.

Если таким же образом подсчитать величину K' и при этом воспользоваться тем, что лучу требуется одинаковое время, чтобы пройти путь между двумя точками в том или в обратном направлении, то для K' найдем такое же выражение, как и для K.

Высказанное утверждение доказано при том ограничении, которое было принято вначале. Однако это ограничение сразу снимается благодаря замечанию, сделанному Гельмгольцем на с. 169 его книги «Физиологическая оптика». Здесь Гельмгольц пишет (пользуясь несколько иными обозначениями): «Луч света после произвольного количества преломлений, отражений и т. п. приходит из точки 1 в точку 2. Расположим в точке 1 вдоль направления луча две произвольные взаимно перпендикулярные плоскости a_1 и b_1, по которым мысленно разложим его колебания. Две точно такие же плоскости a_2 и b_2 расположим вдоль луча в точке 2. Тогда можно доказать следующее: если количество света i, поляризованного в плоскости a_1, выходит из точки 1 в направлении рассматриваемого луча и часть его в количестве k, поляризованная в плоскости a_2, приходит в точку 2, то и наоборот, если количество i поляризованного в плоскости a_2 света выходит из точки 2, то точно такое же количество света k, поляризованного в плоскости a_1, приходит в точку 1» [3].

Если воспользоваться этим утверждением и обозначить через γ величину отношения k/i для обоих лучей, которые между точками (x_1, y_1) и (x_2, y_2) движутся в прямом и в обратном направлениях, то как для K, так и для K' получается выражение, отличающееся от найденного только коэффициентом γ под знаком интеграла.

Следовательно, равенство K и K' имеет место также и тогда, когда отношение γ имеет различную величину для лучей, на которые разделяется один из сравниваемых пучков. Например, оно справедливо, когда часть пучка лучей задержана каким-либо экраном.

§ **11**. Для тех же самых пучков лучей, которые сравнивались друг с другом в предыдущем параграфе, справедливо также следующее утверждение. Из пучка лучей, идущего от точки 1 к точке 2, рассмотрим в точке 2 ту часть, длины волн

[3] Как заметил Гельмгольц, его утверждение неверно, если плоскость поляризации луча поворачивается, например, как это следует из открытия Фарадея под действием магнитных сил; поэтому при дальнейшем рассмотрении следует считать, что магнитные силы отсутствуют. Гельмгольц ограничивает свое утверждение еще и допущением, что свет не претерпевает никакого изменения преломляемости, как это происходит при флуоресценции. Надобность в этом ограничении отпадает, если, применяя утверждение, всегда иметь в виду только лучи одной и той же длины волны.

которой лежат в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, и разложим ее на две компоненты, поляризованные в плоскостях a_2 и b_2; пусть интенсивность первой компоненты $Hd\lambda$. Из пучка лучей, идущего от точки 2 к точке 1, рассмотрим в точке 2 часть, длины волн которой лежат в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, и разложим ее на две компоненты, поляризованные в плоскостях a_2 и b_2. То, что из первой компоненты приходит в точку 1, пусть будет $H'd\lambda$. Тогда $H=H'$.

Доказательство этого утверждения следующее. Пусть K и K' имеют те же значения, что и в предыдущем параграфе; L и L' — величины, которые получаются вместо K и K', если поменять местами плоскости a_1 и b_1. Тогда $L=L'$ и $K=K'$. Далее, $H=K+L$, так как лучи, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях, не интерферируют, когда приводятся к общей плоскости поляризации, если они являются частями неполяризованного луча, а поверхность 1, согласно § 6, испускает неполяризованные лучи.

Наконец, $H'=K'+L'$, потому что два луча, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны, не интерферируют. Из этих равенств следует $H=H'$.

§ 12. Пусть обозначения на рис. 2 имеют тот же смысл, что и в § 4, только тело C пусть будет не черным, но произвольным. Отверстие 2 пусть закрыто площадкой 2. Эта площадка посылает через отверстие 1 телу C пучок лучей, который им частично поглощается, частично вследствие преломлений и отражений рассеивается по различным направлениям.

Из этого пучка лучей рассмотрим между площадками 2 и 1 часть лучей, длина волны которых заключена между λ и $\lambda+d\lambda$, и разложим ее на две компоненты, поляризованные в плоскости a и в перпендикулярной к ней плоскости. То, что из первой компоненты не поглощается телом C и, следовательно, попадает на черную оболочку, в которую заключено тело C, обозначим $M'd\lambda$.

Из лучей, которые частями этой оболочки посылаются к телу C, некоторые сквозь отверстие 1 попадут на площадку 2; т. е. через посредство тела C появится такой пучок лучей, который сквозь отверстие 1 идет к площадке 2. Рассмотрим из него часть лучей, длина волны которых заключена в пределах между λ и $\lambda+d\lambda$, и разложим их на две компоненты, поляризованные в плоскости a и в плоскости, перпендикулярной к a. Пусть $Md\lambda$ интенсивность первой компоненты. Тогда $M=M'$.

Справедливость этого утверждения следует из утверждения предыдущего параграфа, если его применить к каждому из всех пучков лучей, которыми обмениваются через посредство тела C площадка 2 и все элементы черной оболочки, окружающей тело C, а затем все эти равенства просуммировать.

§ 13. Доказательство утверждения § 3 для случая произвольного тела. Представим себе устройство, изображенное на рис. 3 и описанное в § 5; только тело C пусть будет не черным, а произвольным. Также и теперь будет иметь место тепловое равновесие в обоих рассмотренных там случаях, а поэтому живая сила, которой лишается тело вследствие удаления черной площадки 3, должна равняться живой силе, которая сообщается этому телу заменившим площадку вогнутым зеркалом. Использованные в § 5 обозначения применяются и здесь, E и A имеют то же значение, что и в § 2.

Если удалить площадку 3, то тело C лишится лучей, посылаемых ему этой поверхностью; интенсивность той части этих лучей, которые оно поглощает, равна

$$\int_0^\infty erAd\lambda.$$

Теперь надо отыскать лучи, которые попадают на тело C вследствие внесения вогнутого зеркала. Все эти лучи должны отбрасываться вогнутым зеркалом к пластине P, а от нее к отверстию 1 и проходить это отверстие в таких направлениях, как если бы они приходили от отверстия 2. До того, как они попали на вогнутое зеркало, они либо уже отражались от него, либо еще не отражались. В первом случае они могли бы только при посредничестве тела C снова попасть на вогнутое зеркало путем, который прямо противоположен только что описанному. Прежде всего следует предположить, что тело C занимает такое положение, что из лучей, попадающих на него через отверстия 2 и 1, только бесконечно малая часть отбрасывается им обратно через отверстие 1 к отверстию 2. Следовательно, из рассматриваемых здесь лучей, только бесконечно малая часть претерпевает многократное отражение от вогнутого зеркала, и достаточно ограничиться теми лучами, которые отражаются от вогнутого зеркала лишь один раз. Из них часть испускается телом C, остальные — черной оболочкой. Первая часть дважды отразилась от пластины P; живая сила, поглощаемая от этих лучей телом C, равна

$$\int_0^\infty Er^2Ad\lambda.$$

Вторую часть, испускаемую черной оболочкой, в свою очередь, можно рассматривать, как состоящую из двух частей: из одной, попадающей на вогнутое зеркало без посредничества тела C, и другой, попадающей благодаря этому посредничеству. Первая обязана лучам, вышедшим из черной стенки, лежащей напротив вогнутого зеркала, прошедшим сквозь пластину P, отраженным от вогнутого зеркала к пластине P и от нее к отверстию 1. Не интересуясь тем, от какой части черной поверхности эти лучи вышли, их интенсивность можно найти с помощью доказанного в § 11 утверждения. Принимая его во внимание, получим интенсивность этих лучей, поглощенную телом C, равной

$$\int_0^\infty er(1-r)\,Ad\lambda.$$

Наконец, найдем интенсивность лучей, которые, выйдя из черной оболочки, через посредство тела C достигли вогнутого зеркала, снова вернулись к телу C и здесь поглотились. Назовем N величину, в которую переходит величина, обозначенная в § 12 буквой M, вследствие того, что внесена пластина P, а площадка 3 удалена; тогда искомая интенсивность равна

$$\int_0^\infty Nr^2Ad\lambda.$$

Различие между величинами M и N вызвано только тем изменением, которое претерпевают лучи, падающие от черной оболочки через отверстие 1 на тело C, вследствие внесения пластины P и удаления площадки 3. Если представим себе, что пластина P помещена на свое место, но площадка 3 не удалена, то величина M не испытает никакого изменения, так как все пучки лучей, идущие к отверстию 1, останутся без изменения; потеря, которую испытает пучок лучей, приходящий от площадки 2, вследствие отражения на пластине P, будет в точности возмещена отражением лучей, выходящих из площадки 3. Поэтому разность $M—N$ возникает только из-за удаления площадки 3 и, следовательно, равна части M, обязанной лучам, которые площадка 3 посылает к отверстию 1 через пластину P.

Поэтому, согласно предположению, сделанному в этом параграфе о положении тела C, разница $M—N$ бесконечно мала по сравнению с интенсивностью лучей той же длины волны, которые площадка 3 посылает к отверстию 1 через пластину P, следовательно, бесконечно мала по сравнению с интенсивностью лучей с той же длиной волны и с плоскостью поляризации a, которые поверхность 2 посылает к отверстию 1 в отсутствие пластины P, поэтому, наконец, также бесконечно мала по сравнению с величиной, обозначенной в § 12 M' (предполагая, что $1—A$ не бесконечно малая величина). Но так как $M'=M$, как это показано выше, то можно утверждать, что

$$N = M = M'.$$

Но по данному для M' определению

$$M' = e(1 - A),$$

и поэтому

$$\int_0^\infty Nr^2 A d\lambda = \int_0^\infty e(1 - A) r^2 A d\lambda.$$

Отсюда высказанное в начале этого параграфа утверждение может быть выражено уравнением

$$\int_0^\infty erAd\lambda = \int_0^\infty Er^2 Ad\lambda + \int_0^\infty er(1 - r) Ad\lambda + \int_0^\infty e(1 - A) r^2 Ad\lambda$$

или уравнением

$$\int_0^\infty (E - Ae) Ar^2 d\lambda = 0.$$

Из этого путем рассуждений, аналогичных приведенным в § 5 для подобного же уравнения, приходим к заключению, что для каждого значения λ $E/A=e$, или, подставляя значение e из § 7:

$$\frac{E}{A} = I\frac{w_1 w_2}{s^2}.$$

Таким образом, утверждение § 3 доказано в предположении, что из пучка лучей, падающих от площадки 2 через отверстие 1 на тело C, обратно к площадке 2 им отбрасывается лишь весьма несущественная часть лучей. Это утверждение справедливо и без такого ограничения, если принять во внимание, что, когда указанное условие не выполняется, достаточно лишь бесконечно мало повернуть тело C, чтобы это условие удовлетворялось, и что вследствие такого поворота величины E и A претерпевают лишь бесконечно малые изменения.

§ 14. Обобщение утверждения § 3. Приведенные рассуждения основаны на том, что пространство, в котором происходит излучение, пустое. Но эти же рассуждения справедливы и тогда, когда это пространство заполнено какой-либо полностью теплопрозрачной средой; только тогда функция I будет другой. Обозначение I можно сохранить для пустого пространства, а соответствующую функцию длины волны и температуры для некоторой теплопрозрачной среды назовем I'. Если n показатель преломления среды при температуре и для длины волны, к которым относятся I и I', то между I, I' и n существует простое соотношение, которое получается, как здесь будет показано, из доказанного выше утверждения.

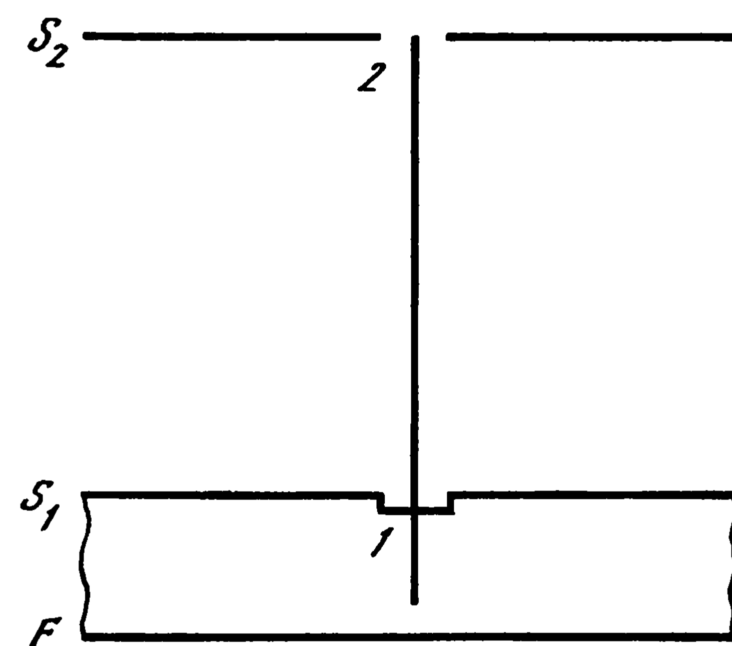


Рис. 5

Представим себе слой теплопрозрачной среды [4], ограниченной двумя параллельными плоскостями и находящийся с одной стороны в соприкосновении с черной поверхностью F. Толщина слоя пусть будет равна единице. Найдем для этого тела поглощательную способность A и испускательную способность E относительно некоторого пучка лучей. Отверстия 1 и 2, которые определяют вид пучка, находятся на экранах S_1 и S_2, первый из которых покрывает поверхность слоя, считавшуюся свободной, а второй экран параллелен первому.

Пусть линия, соединяющая центры обоих отверстий, перпендикулярна экранам. Из пучка лучей некоторой длины волны и с определенным направлением поляризации, который придет от отверстия 2 к отверстию 1, часть, обозначенная нами ρ, будет отражена отверстием 1; оставшаяся часть достигает поверхности F и здесь полностью поглотится; поэтому $A=1-\rho$.

Чтобы найти E, обозначим через x, y, x_1, y_1 и x_2, y_2 координаты некоторой точки поверхности F, отверстия 1 и отверстия 2, отсчитываемые от той точки, которая находится на оси пучка. Если эти три точки лежат на одном луче, то, если обозначить снова расстояние между обоими отверстиями через s, выражение

$$n\left(1+\frac{(x_1-x)^2}{2}+\frac{(y_1-y)^2}{2}\right)+\left(s+\frac{(x_2-x_1)^2}{2s}+\frac{(y_2-y_1)^2}{2s}\right)$$

должно иметь минимум относительно x_1 и y_1, т. е. имеем

$$x=x_1-\frac{x_2-x_1}{ns}, \qquad y=y_1-\frac{y_2-y_1}{ns}.$$

[4] См. рис. 5. — *Примеч. ред.*

Если w_1 и w_2 — поверхности обоих отверстий, то, аналогично рассмотрению, проведенному с большей общностью в § 10, находим, что интенсивность лучей с плоскостью поляризации a и с длинами волн, заключенными в пределах от λ до $\lambda+d\lambda$, которые, падая от F на отверстие 1, частично направляются к отверстию 2, равна

$$I'w_1w_2\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial y_2}-\frac{\partial x}{\partial y_2}\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)d\lambda=\frac{I'w_1w_2}{n^2s^2}\,d\lambda \text{ [6]}.$$

Из этих лучей часть $1-\rho$ проходит через отверстие 1 и попадает на отверстие 2. Следовательно,

$$E=(1-\rho)\,\frac{I'w_1w_2}{n^2s^2}.$$

Подставив эти значения для A и E в равенство

$$\frac{E}{A}=I\,\frac{w_1w_2}{s^2},$$

получим $I'=n^2I$ [7].

§ 15. Некоторые следствия из утверждения § 3. Если некоторое тело, например платиновую проволоку, постепенно нагревать, то, пока оно не достигнет определенной температуры, тело испускает только лучи, длины волн которых больше длин волн видимых лучей. При некоторой температуре начинают появляться лучи с длиной волны, соответствующей крайнему красному цвету. Если температуру поднимать все выше и выше, то появляются лучи все с меньшей и меньшей длиной волны таким образом, что при каждой температуре возникают новые лучи с соответствующей длиной волны, при этом интенсивность лучей с большими длинами волн растет. Применив доказанное утверждение к этому случаю, видим, что функция I для определенной длины волны равна нулю для всех температур ниже некоторой температуры, соответствующей данной длине волны, и возрастает вместе с температурой. Отсюда следует, что если применить это утверждение к другим телам, то все тела, если их температуру постепенно повышать, при одной и той же температуре начинают испускать лучи одной длины волны, т. е. при одной и той же температуре начинают светиться красным цветом, при более высокой (для всех одинаковой) температуре начинают испускать желтые лучи и т. д. Интенсивность лучей определенной длины волны, испускаемых различными телами при той же температуре, может быть, однако, различной; она пропорциональна поглощательной способности тел для лучей данной длины волны. Поэтому при одинаковых температурах металл светится сильнее, чем стекло, а стекло — сильнее, чем газ. Тело, которое при самых высоких температурах остается совершенно прозрачным, никогда не будет светиться. В согнутое из платиновой проволоки кольцо диаметром примерно 5 мм я поместил немного фосфорнокислого натрия и накалил его в слабо светящемся пламени бунзеновской горелки. Соль расплавилась, образовала жидкую линзу и при этом осталась совершенно прозрачной; но она совсем не светилась, в то время как соприкасающееся с ней платиновое кольцо испускало ярчайший свет.

Дрепер [5] [8] опытным путем пришел к выводу, что все твердые тела начинают светиться при одинаковой температуре. Но при проведении опытов он заметил, что некоторые тела, например известь, мрамор, полевой шпат, светились уже при более низких температурах, чем это следовало в соответствии с указанным выводом; он назвал это свечение фосфоресценцией и пишет, что оно своей окраской заметно отличается от свечения накаливания.

Но какое бы название этому свечению ни давать, оно противоречит утверждению § 3, и поэтому тело, дающее такое свечение, должно не удовлетворять предположению, сделанному при доказательстве этого утверждения, оно должно при сохраняющейся температуре не оставаться неизменным.

Фосфоресценция не вызвана только действием теплоты, она обусловлена не только температурой, но вызывается происходящими в теле изменениями; если эти изменения — вызваны ли они химической природой или другими причинами — прекратятся, то исчезнет и фосфоресценция.

§ 16. Из утверждения, сделанного в § 3, следует, что тело, которое поглощает больше лучей с одним направлением поляризации, чем с другим, в таком же соотношении испускает больше лучей с первым направлением поляризации, чем со вторым. Отсюда следует, как это представляется известным, что раскаленное непрозрачное тело, имеющее гладкую поверхность, в направлениях, наклонных к этой поверхности, испускает свет частично поляризованный, а именно перпендикулярно к плоскости, проходящей через луч и нормаль к этой поверхности; ибо падающие лучи, поляризованные перпендикулярно к плоскости падения, отражаются телом меньше, а значит, поглощаются им больше, чем лучи, плоскость поляризации которых совпадает с плоскостью падения. Благодаря этому утверждению можно легко указать состояние поляризации испускаемых лучей, если известен закон отражения падающих лучей.

Пластинка турмалина, отшлифованная параллельно оптической оси, при обычной температуре поглощает лучи, падающие на нее перпендикулярно, в бо́льшем количестве, когда их плоскость поляризации параллельна оси, чем когда она перпендикулярна оси. Предположив, что пластинка турмалина сохраняет это свойство при ее накаливании, видим, что она должна при этом испускать в перпендикулярном к ней направлении лучи, которые частично поляризованы, а именно в плоскости, проходящей через оптическую ось, т. е. в плоскости, перпендикулярной той, которая называется плоскостью поляризации турмалина.

Это поразительное следствие, получающееся из развитой здесь теории, я проверил на опыте, и оно подтвердилось. Испытываемые пластинки турмалина, внесенные в пламя бунзеновской горелки, длительное время давали умеренное свечение каления, не претерпевая остаточных изменений; после охлаждения они оказались лишь слегка помутневшими по углам. Свойство поляризовать проходящий свет сохранялось ими также и при накаливании, хотя и в значительно меньшей степени, чем при более низкой температуре.

Это свойство обнаруживалось, если смотреть через двоякопреломляющую призму и через пластинку турмалина на платиновую проволоку, накаляемую в том же пламени, что и пластинка. Два изображения платиновой проволоки

[5] *Draper J. W.* // Phil. Mag. 1847. Vol. 30 (3). P. 345—360.

имели неодинаковую яркость, но это различие было много меньше, чем тогда, когда пластинка турмалина находилась вне пламени. Двоякопреломляющей призме придавалось такое положение, при котором различие в яркости обоих изображений платиновой проволоки было максимальным.

Допустим, более яркое изображение было верхним. Затем после удаления платиновой проволоки сравнивались друг с другом оба изображения турмалиновой пластинки. Верхнее изображение было хотя и не разительно, но, несомненно, темнее, чем нижнее; оба изображения выглядели так, как если бы это были два одинаковых раскаленных тела, из которых верхнее имело более низкую температуру, чем нижнее.

§ 17. В заключение здесь можно было бы привести еще одно следствие из доказанного утверждения. Если пространство окружено телами одинаковой температуры и через эти тела не могут пройти никакие лучи, то внутри пространства всякий пучок лучей обладает такими качествами и интенсивностью, как если бы он исходил от абсолютно черного тела с той же температурой. Следовательно, пучок лучей не зависит от свойств и вида тел и обусловлен только температурой [9]. В справедливости этого утверждения можно убедиться, если принять во внимание, что пучок лучей такого же рода, что и выбранный, но противоположного направления, после бесконечно большого числа отражений, которые он испытывает одно за другим на телах, будет полностью поглощен. Следовательно, также и внутри непрозрачного накаленного полого тела с определенной температурой всегда имеет место одинаковая яркость, каковы бы ни были в остальном свойства этого тела.

3.
К ТЕОРИИ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ *

Выводы относительно образования световых лучей, их отражения и преломления, а также явлений дифракции, основанные преимущественно на рассмотрениях Гюйгенса и Френеля, во многом лишены надлежащей строгости. Вполне удовлетворительная теория этого предмета, развиваемая из гипотез волновой теории, и сегодня кажется еще невозможной; однако таким выводам надо придать бо́льшую строгость. Я позволю себе представить Академии соображения, которые к этому направлены и главное содержание которых я излагал в течение ряда лет в своих университетских лекциях. Аналогичную цель в отношении явлений дифракций преследуют в некоторых опубликованных работах Фрелих [1] и Фогт [2] [1].

§ 1. Будем предполагать, что свет реализуется в поперечных колебаниях эфира и что этот эфир является средой, которая ведет себя как твердое, упругое, изотропное и однородное тело, на отдельные части которого не действуют никакие силы, кроме сил, вызванных относительными смещениями. Если u, v,

---

* Zur Theorie der Lichtstrahlen // Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1882. Juni. S. 641—669. Перевод М. Г. Шраера.

[1] *Fröhlich J.* // Ann. Phys. 1878. Bd. 3. S. 376; 1879. Bd. 6. S. 414; 1881. Bd. 15. S. 592.

[2] *Voigt W.* // Ann. Phys. 1878. Bd. 3. S. 532.

w — компоненты по координатным осям смещения некоторой частицы эфира, центр тяжести которой в момент времени t имеет координаты x, y, z, то каждая из этих величин удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Phi, \tag{1}$$

где Δ — сумма вторых частных производных по x, y и z; a — скорость распространения света. Но нам нужны не любые решения этого уравнения, а лишь такие, для которых выполнено условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \; [^2].$$

Если U, V, W — произвольные решения данного уравнения, то

$$u = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \tag{2}$$

соответствуют некоторому возможному движению света, и обратно. Это имеет место всякий раз, как функции U, V, W удовлетворяют данному уравнению [3]. В дальнейшем под Φ будем понимать одну из величин U, V, W или u, v, w. Если T — период колебаний света, предполагаемого однородным, то каждая из таких шести величин будет линейной однородной функцией от

$$\cos 2\pi \frac{t}{T}, \qquad \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

В качестве меры интенсивности света в точке (x, y, z) примем среднее арифметическое значений $u^2+v^2+w^2$ за период T, т. е., положив

$$u = \mathfrak{u} \cos\frac{2\pi t}{T} + \mathfrak{u}' \sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad v = \mathfrak{v} \cos\frac{2\pi t}{T} + \mathfrak{v}' \sin\frac{2\pi t}{T},$$

$$w = \mathfrak{w} \cos\frac{2\pi t}{T} + \mathfrak{w}' \sin\frac{2\pi t}{T},$$

получим

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{u}'^2 + \mathfrak{v}^2 + \mathfrak{v}'^2 + \mathfrak{w}^2 + \mathfrak{w}'^2\right).$$

Пусть все бесконечное пространство заполнено рассматриваемой средой, и в точке 1 этого пространства находится светящаяся точка, координаты которой (x_1, y_1, z_1); r_1 — ее расстояние до точки (x, y, z); λ — длина волны света, т. е. произведение aT, тогда простейшее предположение, которое можно сделать о Φ, понимаемой как одна из трех величин U, V, W, что

$$\Phi = \frac{1}{r_1} \cos 2\pi \left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{3}$$

---

[3] *Clebsch A.* // J. reine und angew. Math. 1862. Bd. 61. S. 195.

Из этого выражения для Φ можно получить более общее, относящееся к тому же случаю, если ввести постоянный множитель (аддитивную постоянную к t), продифференцировать по x_1, y_1, z_1 один или несколько раз и взять сумму таким образом полученных выражений. Результат этой операции существенно упростится, если сделать предположение, имеющее для оптики фундаментальное значение, что длина волны λ может рассматриваться как бесконечно малая. Тогда, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, получим

$$\Phi = \frac{D}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{D'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right), \tag{4}$$

где D и D' зависят от $\partial r_1/\partial x_1$, $\partial r_1/\partial y_1$, $\partial r_1/\partial z_1$, или, что то же, от $\partial r_1/\partial x$, $\partial r_1/\partial y$, $\partial r_1/\partial z$, т. е. от направления линии r_1, а в остальном они являются постоянными. Согласно (2) выражения такого же вида пригодны и для u, v, w. Обозначим через A и A', B и B', C и C' значения D и D' для случая, когда $\Phi = u$ или v, w. Таким образом получим шесть величин, зависящих от направления r_1, а в остальном постоянных. Тогда интенсивность света в точке (x, y, z) будет равна

$$\frac{1}{2r_1^2}\left(A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2\right).$$

Отсюда видно, что рассматриваемая интенсивность света обратно пропорциональна квадрату расстояния от светящейся точки и изменяется с изменением направления линии r_1, обусловленном движением светящейся точки.

Пусть в последующих рассуждениях упомянутая светящаяся точка принята в качестве источника света; требуется исследовать возмущение, вызванное внесением постороннего тела вблизи данной точки. Существенное вспомогательное средство при этом исследовании представляет предложение, получающееся применением теоремы Грина к функциям, удовлетворяющим дифференциальному уравнению, найденному выше для Φ, и образующее уточнение и обобщение принципа Гюйгенса. Его уже вывел господин Гельмгольц в своей работе «Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden» [4] и указал на его важность; это предложение будет развито в следующих параграфах в другом направлении и другой форме.

§ 2. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ — две функции от x, y, z, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка внутри некоторого ограниченного пространства (которое может состоять из нескольких отдельных частей); пусть $d\tau$ — элемент этого пространства, ds — элемент его поверхности (также состоящей из отдельных частей), N — нормаль к ds, направленная внутрь пространства; тогда по теореме Грина

$$\int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N} - \mathfrak{V}\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N}\right)ds = \int\left(\mathfrak{V}\Delta\mathfrak{U} - \mathfrak{U}\Delta\mathfrak{V}\right)d\tau.$$

Положим, здесь $\mathfrak{U} = \Phi$, а относительно $\mathfrak{V}$ предположим, что она также удовлетворяет уравнению (1). Тогда имеем

[4] *Helmholtz H.* // J. reine und angew. Math. 1859. Bd. 57. S. 7.

$$\int\left(\Phi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}-\mathfrak{B}\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)ds=\frac{1}{a^2}\int\left(\mathfrak{B}\frac{d^2\Phi}{\partial t^2}-\Phi\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial t^2}\right)d\tau=$$
$$=\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\mathfrak{B}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\Phi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right)d\tau \text{ [3]}.$$

Умножив это равенство на dt и интегрируя его по времени в пределах от $-t'<0$ до $t''>0$, получим

$$\int_{-t'}^{t''}dt\int\left(\Phi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}-\mathfrak{B}\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)ds=\frac{1}{a^2}\left[\int\left(\mathfrak{B}\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\Phi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\right)d\tau\right]_{-t'}^{t''}. \quad (5)$$

Пусть теперь $\mathfrak{B}=F(r_0+at)/r_0$, где r_0 — расстояние точки (x, y, z) до произвольно выбранной точки o, а F — неотрицательная функция, равная нулю при каждом конечном положительном или отрицательном значении ее аргумента и удовлетворяющая условию

$$\int F(\zeta)\,d\zeta=1 \text{ [4]}, \quad (6)$$

где интеграл берется от некоторого отрицательного до некоторого положительного значения ζ.

Пусть теперь задано ограниченное пространство, заполненное однородным эфиром и свободное от светящихся точек; пусть s — его поверхность, ds — элемент поверхности. Возьмем точку o внутри этого пространства и применим к нему уравнение (5), исключив из этого пространства бесконечно малый шар с центром в точке o. Пусть dS — элемент поверхности этого шара, и пусть t' выбрано столь большим, чтобы

$$r_0-at'$$

было отрицательным и конечным для наибольшего значения, которое имеет r_0 на поверхности s, а значит, и во всем рассматриваемом пространстве; при этом условии в правой части (5) будут содержаться только такие значения $\mathfrak{B}$ и $\partial\mathfrak{B}/dt$, для которых r_0+at конечно, положительно или отрицательно, и которые поэтому обращаются в нуль. Тогда (5) примет вид

$$\int_{-t'}^{t''}dt\int\left(\Phi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}-\mathfrak{B}\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)ds+\int_{-t'}^{t''}dt\int\left(\Phi\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}-\mathfrak{B}\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)dS=0. \quad (7)$$

Второй из этих двух интегралов может быть найден. Обозначим через R радиус рассматриваемой бесконечно малой сферы и в подынтегральной функции второго интеграла опустим члены, которые становятся бесконечно малыми при умножении их на R^2; тогда сможем положить

$$\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial N}=-\frac{1}{R^2}F(a\ t), \qquad \mathfrak{B}=0,$$

т. е.

$$\int \left(\Phi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} - \mathfrak{B} \frac{\partial \Phi}{\partial N} \right) dS = -4\pi\Phi_0 F(at),$$

где через Φ_0 обозначено значение Φ в точке o. Далее, так как $F(at) \neq 0$ только при бесконечно малых значениях t, то вследствие (6) будем иметь

$$\int_{-t'}^{t''} F(at)\, dt = \frac{1}{a};$$

так что второй интеграл в (7) будет равен $-4\pi\Phi_0(o)/a$, где $\Phi(o)$ значение Φ_0 при $t=0$ [5]. И в первом члене (7) можно произвести упрощения, если использовать (6) при интегрировании по t. Прежде всего, имеем

$$a \int_{-t'}^{t''} \mathfrak{B} \frac{\partial \Phi}{\partial N} dt = a \int_{-t'}^{t''} \frac{F(r_0 + at)}{r_0} \frac{\partial \Phi}{\partial N} dt = \frac{1}{r_0} \frac{\partial \Phi}{\partial N},$$

где после дифференцирования надо положить $t=-r_0/a$ в $\partial\Phi/\partial N$. Обозначив

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = f(t), \tag{8}$$

приведем это выражение к виду

$$\frac{1}{r_0} f\left(-\frac{r_0}{a}\right).$$

Далее,

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{F(r_0 + at)}{r_0}}{\partial N} = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} F(r_0 + at) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{1}{a} \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t}$$

и поэтому

$$a \int_{-t'}^{t''} \Phi \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial N} dt = \frac{\partial \frac{1}{r_0}}{\partial N} \Phi\left(-\frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \int_{-t'}^{t''} \Phi \frac{\partial F(r_0 + at)}{\partial t} dt,$$

где $\Phi(-r_0/a)$ — значение Φ при $t=-r_0/a$. Применяя к последнему интегралу интегрирование по частям и учитывая, что F обращается в нуль при всех конечных значениях ее аргумента, приведем второй интеграл к виду

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r_0}\right)}{\partial N} \Phi\left(-\frac{r_0}{a}\right) - \frac{1}{a} \frac{1}{r_0} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

где также в $\partial\Phi/\partial t$ надо положить $t=-r_0/a$. Подставляя эти результаты в (7) и одновременно заменяя начало отсчета времени так, чтобы первоначальным началом отсчета стало t, получим

$$4\pi\Phi_0(t)=\int\left\{\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial N}\Phi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)-\frac{1}{ar_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\frac{\partial\Phi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{\partial t}-\frac{1}{r_0}f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)\right\}ds\ [6]. \quad (9)$$

Первые два члена подынтегральной функции могут быть объединены в один:

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{\Phi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0},$$

где дифференцирование необходимо производить так, что только r_0 считается переменным, а величины, от которых зависит Φ, надо оставить такими, какими они являются в элементе ds. После этого имеем

$$4\pi\Phi_0(t)=\int\Omega ds, \quad (10)$$

где

$$\Omega=\frac{\partial}{\partial N}\frac{\Phi\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0}-\frac{f\left(t-\frac{r_0}{a}\right)}{r_0}, \quad (11)$$

а $f(t)$ определяется (8).

Отсюда можно заключить, что движение эфира в пространстве, ограниченном поверхностью s, можно рассматривать как порожденное некоторым слоем светящихся точек, лежащих на s, ибо каждый из обоих членов, из которых составлено Ω, можно считать соответствующим светящейся точке, находящейся в элементе ds поверхности [7].

Последующие рассуждения покажут, что при некоторых условиях, которые дальше будем считать выполненными, равенство (10) верно и тогда, когда светящаяся точка лежит внутри пространства, ограниченного поверхностью s, а точка o находится вне его; при этом нормаль необходимо направить во вне. Применяя в этом случае (10) к пространству, ограниченному изнутри поверхностью s, а извне сферической поверхностью бесконечно большого радиуса с элементом dS, получим

$$4\pi\Phi_0(t)=\int\Omega dS+\int\Omega ds.$$

Предположим теперь, что до некоторого определенного конечного момента времени всюду господствует покой, так что для бесконечно большого отрицательного значения t всюду, а значит, и на нашей бесконечно большой сфере, $\Phi(t)$ и $f(t)$ равны нулю. Выбирая точку o на конечном расстоянии и рассматривая лишь конечные значения времени, получим, что для каждого элемента dS величина Ω равна нулю, так как здесь $t-r_0/a$ является отрицательной бесконечно большой; таким образом получим (10). Ограничения конечного положения точки o и конечного времени являются лишь кажущимися; каким бы ни было положение точки o и каким бы ни был момент t, можно всегда выбрать радиус сферы столь большим, чтобы приведенные рассуждения сохранили свою силу.

Применяя (10) к двум замкнутым поверхностям, имеющим общую часть, каждая из которых содержит внутри себя точку o, но не содержит светящейся точки, либо содержит светящуюся точку, но не точку o, и вычитая полученные таким образом результаты друг из друга, увидим, что интеграл, взятый по замкнутой поверхности $\int \Omega ds$, не окружающей ни одну из упомянутых точек, обращается в нуль. Он равен нулю и для замкнутой поверхности, которая окружает обе рассматриваемые точки, в чем можно убедиться, если применить (10) к двум замкнутым поверхностям, имеющим общую часть, из которых одна окружает точку o, но не светящуюся точку, другая — светящуюся точку, но не точку o.

Применение (10) к проблеме, поставленной в конце предыдущего параграфе, очевидно. Представим себе светящуюся точку 1 в однородном эфире, заполняющем бесконечное пространство; отнесем функцию Φ^* к движению, вызываемому этой точкой. Если в это пространство ввести постороннее тело, то оно вызовет изменение движения, так что вместо функции Φ^* мы должны будем рассматривать функцию Φ. Речь идет о том, чтобы определить функцию Φ для какой-нибудь точки o, лежащей вне данного тела. Если ds — элемент поверхности тела, dS — элемент поверхности бесконечно малой сферы, описанной вокруг светящейся точки, то вследствие (10) будем иметь

$$4\pi\Phi_0 = \int \Omega dS + \int \Omega ds.$$

Первый из этих двух интегралов найти легко. Изменение движения в элементе dS, вызванное введением рассматриваемого тела (за исключением некоторых определенных специальных случаев), не является бесконечно большим, и так как сферическая поверхность, на которой лежит dS, бесконечно мала, то ее влияние на значение рассматриваемого интеграла бесконечно мало. Таким образом, в этом случае можно заменить Φ на Φ^* и, значит, согласно (10), рассматриваемый интеграл будет равен $4\pi\Phi_0^*$, где Φ_0^* — значение Φ^* в точке o. Поэтому имеем

$$4\pi\Phi_0 = 4\pi\Phi_0^* + \int \Omega ds. \tag{12}$$

Это равенство позволяет в общем найти Φ_0, если известны Φ^* и значения Φ и $\partial\Phi/\partial N$ на поверхности тела.

§ 3. Для дальнейших исследований нужно знать значение интеграла $\int \Omega ds$, взятого по ограниченной поверхности, при выполнении некоторых условий. Будем теперь искать его значение, предполагая при этом, что длина волны бесконечно мала, что Φ порождена светящейся точкой 1, а значит, имеет вид выражения (4), что ни для какой конечной части поверхности s, по которой берется интеграл, или ее границы сумма $r+r_0$ не имеет постоянного значения или не является постоянной с точностью до бесконечно малых, что прямая линия, соединяющая точки 1 и 0, не проходит через границу поверхности и не бесконечно близка к ней. Требуется доказать, что названный интеграл обращается в нуль в случае, когда прямая, соединяющая точки 1 и 0, не пересекает

поверхность s. Вычисления покажут, что если такое пересечение имеет место, то интеграл будет равен $\pm 4\pi\Phi_0$, где верхний или нижний знак надо брать, смотря по тому, будет ли острым или тупым угол, образованный нормалью N в точке пересечения с прямой, соединяющей точки 1 и 0, и что если первое утверждение доказано, то это следует из (10).

Пусть сначала Φ задано с помощью выражения (3), т. е. положим

$$\Phi_0 = \frac{1}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right);$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\Phi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = -\frac{1}{r_1 r_0^2}\frac{\partial r_0}{\partial N}\cos 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - \frac{2\pi}{r_0 r_1 \lambda}\frac{\partial r_0}{\partial N}\sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right);$$

далее, согласно (8),

$$\frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) = -\frac{1}{r_1^2 r_0}\frac{\partial r_1}{\partial N}\cos 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) - \frac{2\pi}{r_0 r_1 \lambda}\frac{\partial r}{\partial N}\sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right);$$

поэтому в силу (11)

$$\Omega = \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos 2\pi\left(\frac{r_0 + r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \\ + \frac{2\pi}{r_1 r_0 \lambda}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right). \tag{13}$$

Для вычисления указанного интеграла при этом значении Ω будем исходить из следующего предположения.

Если $F(\zeta)$ непрерывна в интервале $(\zeta_0\zeta')$, а δ — постоянная, то интеграл

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{\partial\zeta}\sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta \ [^8] \tag{14}$$

стремится к нулю при $k \to +\infty$.

Справедливость этого предложения следует из рассуждений, вполне аналогичных тем, которые проводил Дирихле в своем исследовании по рядам Фурье в отношении аналогичного интеграла. Этот интеграл разлагают на такие части, чтобы внутри каждой из них $\partial F/\partial\zeta$ не была бы знакопеременной, не переходила бы от возрастания к убыванию или наоборот; для каждой такой части (число которых предполагается конечным) показывают, что она стремится к нулю при $k \to \infty$, разлагая ее дальше на части таким образом, чтобы все значения ζ, для которых $\sin(k\zeta + \delta) = 0$, попали между соответствующими пределами интеграла, и используют неравенства, позволяющие оценивать абсолютное значение этой части. Из этого предложения легко получается следующее.

Если $F(\zeta)$ имеет непрерывную производную в интервале (ζ_0, ζ'), то для $k = \infty$

$$k\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta = -\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(k\zeta + \delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}. \tag{15}$$

Действительно, интегрированием по частям получим

$$-\left[\frac{dF}{d\zeta}\cos(k\zeta+\delta)\right]_{\zeta_0}^{\zeta'}+\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'}\frac{d^2F}{d\zeta^2}\cos(k\zeta+\delta)\,d\zeta,$$

и появляющийся здесь новый интеграл имеет форму (14), а значит, стремится к нулю при $k\to\infty$.

Теперь представим себе поверхность s с непрерывной кривизной и допустим, что она ограничена; обозначим ее элемент через ds, а расстояния этого элемента до двух фиксированных точек 1 и 0 через r_1 и r_0; положим $\zeta=r_1+r_0$; обозначая через G непрерывную функцию точки в ds, через δ — некоторую постоянную, найдем значение интеграла

$$\int G\sin(k\zeta+\delta)\,ds \text{ при } k\to\infty. \tag{16}$$

С этой целью представим себе поверхности, уравнения которых суть $\zeta=$ $=$const, т. е. эллипсоиды вращения с фокусами в точках 1 и 0, и линии их пересечения с поверхностью s; положим

$$F(\zeta)=\pm\int G\,ds, \tag{17}$$

где интеграл нужно брать по той части поверхности s, которая лежит между двумя линиями пересечения, из которых одна соответствует переменному значению ζ, другая — произвольно выбранному фиксированному значению Z, и где знак «плюс» берется при $\zeta>Z$, «минус» — при $\zeta<Z$. При таком условии, если выбрать $d\zeta>0$, будем иметь

$$\frac{dF}{d\zeta}\,d\zeta=\int G\,ds, \tag{18}$$

где интегрирование распространяется на ту часть поверхности s, которая лежит между двумя линиями пересечения, соответствующими значениями ζ и $\zeta+d\zeta$. Поэтому, если ζ_0 — наименьшее, а ζ — наибольшее значение ζ на s, то интеграл (16) будет равен интегралу

$$\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}\frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta\ [^9],$$

т. е. интегралу (14); и поэтому он обращается в нуль при $k=\infty$ в случае, когда $F(\zeta)$ непрерывна на s, т. е. когда ζ не является постоянной ни в какой конечной части поверхности s.

Рассмотрим теперь в тех же обозначениях выражение

$$k\int G\sin(k\zeta+\delta)\,ds; \tag{19}$$

оно равно

$$k \int\limits_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{dF}{d\zeta} \sin(k\zeta + \delta)\, d\zeta,$$

т. е. левой части (15). Поэтому при $k=\infty$ он равен и правой части (15), если определенная с помощью (18) производная $dF/d\zeta$ непрерывна внутри поверхности s. Эта производная разрывна, если ζ постоянна на некоторой конечной части границы поверхности s; исключая этот случай, разрывность может наступить лишь тогда, когда $d\zeta$ обращается в нуль в некоторой точке поверхности; но в этом случае требуется специальное исследование. В противном случае остается справедливым (15), откуда и следует, что выражение (19) исчезает. При сделанных предположениях существует как наибольшее, так и наименьшее значения ζ в некоторой или в нескольких точках границы поверхности s и для каждой такой точки, подлежащей вычислению, интеграл $\int G ds$ и соответствующая ему производная $dF/d\zeta$ являются бесконечно малыми высшего порядка по отношению к $d\zeta$; поэтому эта производная тоже исчезает.

Теперь надо найти значение (19) для случая, когда $d\zeta=0$ в некоторой точке поверхности s. Пусть это случилось в точке (x, y, z) и пусть $g(x, y, z)=0$ уравнение этой поверхности; тогда

$$\frac{\partial r_1}{\partial x}+\frac{\partial r_0}{\partial x}=L\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial y}+\frac{\partial r_0}{\partial y}=L\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial z}+\frac{\partial r_0}{\partial z}=L\frac{\partial g}{\partial z} \text{ [10]},$$

где L — неопределенный множитель. Если обозначить через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; α, β, γ косинусы углов, образованных координатными осями соотв. с линией, идущей из точки 1 к точке (x, y, z), из точки 0 к точке (x, y, z) и нормалью N к s в этой точке, то последние равенства могут быть переписаны следующим образом:

$$\alpha_1+\alpha_0=M\alpha, \quad \beta_1+\beta_0=M\beta, \quad \gamma_1+\gamma_0=M\gamma, \tag{20}$$

где M означает некоторый новый множитель. Из них прежде всего следует, что линии r_1, r_0 и N лежат в одной плоскости и что

$$M(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)=M(\alpha\alpha_0+\beta\beta_0+\gamma\gamma_0);$$

это равенство показывает, что либо $M=0$, т. е. $\alpha_0=-\alpha_1$, $\beta_0=-\beta_1$, $\gamma_0=-\gamma_1$, т. е. точка (x, y, z) лежит между точками 1 и 0 на прямой, соединяющей эти точки, либо направления $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ образуют одинаковые углы с направлением N. Во втором случае линии r_1 и r_0 непременно лежат с противоположных сторон от нормали N, если они не совпадают с ней или с ее продолжением; так как при $\alpha_0=\alpha_1$, $\beta_0=\beta_1$, $\gamma_0=\gamma_1$ уравнения (20) не удовлетворяются, то это будет тогда, когда r_1 и r_0 совпадают с N или ее продолжением.

Изменим теперь значения обозначений x, y, z, обозначив через (x, y, z) переменную точку поверхности s относительно некоторой координатной системы, начало которой — прежняя точка (x, y, z), а ось z — нормаль N. Будем дальше предполагать, что размеры поверхности s бесконечно малы (или бесконечно велики относительно $1/k$); при этом предположении достаточно вычислить интеграл (19). Как было показано, его значение не изменится от присоеди-

нения к поверхности s новых частей. Тогда уравнение поверхности s будет иметь вид

$$z = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2, \tag{21}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — постоянные и $ds=dxdy$.

Для нахождения линий пересечения поверхности s с поверхностями $\zeta=$ $=\text{const}$ необходимо образовать выражение для ζ и разложить его по степеням x и y. Пусть x_0, y_0, z_0 — координаты точки 0 и

$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

тогда

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad \text{или}$$

$$r_0 = \sqrt{\rho_0^2 - 2xx_0 - 2yy_0 - 2zz_0 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Считая x и y бесконечно малыми первого порядка и разлагая r_0 с помощью (21) до бесконечно малых второго порядка включительно, получим

$$r_0 = \rho_0 - \frac{xx_0 + yy_0}{\rho_0} - \frac{a_{11}x + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}{\rho_0} z_0 + \frac{x^2 + y^2}{2\rho_0} - \frac{(xx_0 + yy_0)^2}{2\rho_0^3},$$

или, так как входящие в (20) величины a_0, β_0, γ_0 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{x_0}{\rho_0} = -\alpha_0, \quad \frac{y_0}{\rho_0} = -\beta_0, \quad \frac{z_0}{\rho_0} = -\gamma_0,$$

$$r_0 = \rho_0 + \alpha_0 x + \beta_0 \gamma + (a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_0 +$$
$$+ \frac{1}{2\rho_0}[x^2(1 - \alpha_0^2) - 2xy\alpha_0\beta_0 + y^2(1 - \beta_0^2)].$$

Полагая соответственно

$$\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

найдем таким же образом, что

$$r_1 = \rho_1 + \alpha_1 x + \beta_1 y + (a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2)\gamma_1 +$$
$$+ \frac{1}{2\rho_1}[x^2(1 - \alpha_1^2) - 2xy\alpha_1\beta_1 + y^2(1 - \beta_1^2)].$$

Но при выбранной системе координат $\alpha=0$ и $\beta=0$, и поэтому, согласно (20), $\alpha_1+\alpha_0=0$, $\beta_1+\beta_0=0$.

Поэтому имеем $\zeta=A_0+A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2$, где

$$A_0 = \rho_1 + \rho_0, \quad A_{11} = a_{11}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1 - \alpha_1^2}{2\rho_1} + \frac{1 - \alpha_0^2}{2\rho_0},$$

$$A_{12} = a_{12}(\gamma_1 + \gamma_0) - \frac{\alpha_1\beta_1}{2\rho_1} - \frac{\alpha_0\beta_0}{2\rho_0}, \quad A_{22} = a_{22}(\gamma_1 + \gamma_0) + \frac{1 - \beta_1^2}{2\rho_1} + \frac{1 - \beta_0^2}{2\rho_0}. \tag{22}$$

Таким образом, кривые, образованные пересечением поверхностей $\zeta=\mathrm{const}$ с поверхностью s, являются подобными и подобно расположенными коническими сечениями, общим центром которых является начало координатной системы. Пусть их уравнение относительно главных осей

$$\zeta - A_0 = \mu_1 x^2 + \mu_2 y^2,$$

т. е. пусть μ_1 и μ_2 (всегда действительные) — корни квадратного уравнения

$$(A_{11} - \mu)(A_{22} - \mu) - A_{12}^2 = 0. \tag{23}$$

Если μ_1 и μ_2 имеют одинаковые знаки, то сечения конуса будут эллипсами; $A_0=\min\zeta$, если μ_1 и $\mu_2 > 0$; $A_0=\max\zeta$, если μ_1 и $\mu_2 < 0$. В первом случае площадь эллипса, соответствующего значению ζ, будет

$$\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1\mu_2}},$$

во втором —

$$\frac{\pi(A_0 - \zeta)}{\sqrt{\mu_1\mu_2}},$$

где следует брать положительное значение корня, как и вообще здесь понимается положительный корень из положительного числа. Поэтому, согласно (17), если взять в качестве A_0 величину, обозначенную там через Z для значений ζ, при которых соответствующие эллипсы лежат внутри s, то в обоих случаях будем иметь

$$F(\zeta) = G\frac{\pi(\zeta - A_0)}{\sqrt{\mu_1\mu_2}},$$

где G относится к точке ($x=0$, $y=0$), т. е.

$$\frac{dF}{d\zeta} = G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}.$$

Если никакая часть границы поверхности s не совпадает с каким-нибудь эллипсом, то $dF/d\zeta$ непрерывна на этой поверхности и обращается в нуль при втором граничном значении ζ. Поэтому при положительных μ_1 и μ_2 для $k=\infty$ выражение (19) равно

$$G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cos(kA_0 + \delta_0), \tag{24}$$

а если μ_1 и μ_2 отрицательны, то оно равно

$$-G\frac{\pi}{\sqrt{\mu_1\mu_2}}\cos(kA_0 + \delta). \tag{25}$$

Менее простыми становятся вычисления, когда μ_1 и μ_2 имеют противоположные знаки и, следовательно, коническими сечениями будут гиперболы. В этом случае при $\zeta=A_0$ $dF/d\zeta$ испытывает разрыв. Выберем здесь в качестве коорди-

натных осей главные оси и придадим поверхности s определенный вид: именно, прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям $x=\pm a$, $y=\pm b$; пусть вершины углов его лежат на ассимптотах, т. е. пусть

$$a\sqrt{\mu_1}=b\sqrt{-\mu_2}=c,$$

где $\mu_1>0$, $\mu_2<0$, $c>0$. Действительная ось гиперболы, соответствующая данному значению ζ, совпадает с осью x, если $\zeta-A_0>0$, и с осью y, если $\zeta-A_0<0$. Полагая вновь равной A_0 величину Z, определенную с помощью (17), получим для $\zeta>A_0$

$$F(\zeta)=G\left\{2ab-\frac{4}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta-A_0}{\mu_1}}}^{a}\sqrt{\mu_1x^2-\zeta+A_0}\,dx\right\},$$

где G снова относится к точке ($x=0$, $y=0$). Отсюда следует, что

$$\frac{dF}{d\zeta}=G\frac{2}{\sqrt{-\mu_2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{\zeta-A_0}{\mu_1}}}^{a}\frac{dx}{\sqrt{\mu_1x^2-\zeta+A_0}},$$

или, так как $\int\limits_1^z\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}=\lg\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|$,

$$\frac{dF}{d\zeta}=G\frac{2}{\sqrt{-\mu_2\mu_1}}\lg\frac{c+\sqrt{c^2-\zeta+A_0}}{\sqrt{\zeta-A_0}}.$$

При $\zeta<A_0$ таким же образом находим

$$\frac{dF}{d\zeta}=G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\lg\frac{c+\sqrt{c^2+\zeta-A_0}}{\sqrt{A_0-\zeta}}.$$

Если учесть, что наименьшее значение ζ достигается в точке ($x=0$, $y=\pm b$) и оно равно A_0-c^2, а наибольшее — в точке ($x=\pm a$, $y=0$) и равно A_0+c^2, то выражение (19) примет вид

$$G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\left\{\int\limits_{A_0-c^2}^{A_0}\lg\frac{c+\sqrt{c^2+\zeta-A_0}}{\sqrt{A_0-\zeta}}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{A_0}^{A_0+c^2}\lg\frac{c+\sqrt{c^2-\zeta+A_0}}{\sqrt{\zeta-A_0}}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta\right\}.$$

Если положить $A_0-\zeta=\xi$ в первом из этих интегралов и $\zeta-A_0=\xi$ во втором, то это выражение станет равным

$$G\frac{2}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\int\limits_0^{c_2}\lg\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\left[\sin(k\xi+kA_0+\delta)-\sin(k\xi-kA_0-\delta)\right]d\xi,$$

или

$$G\frac{4}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}k\sin(kA_0+\delta)\int\limits_0^{c^2}\lg\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi d\xi.$$

Но теперь

$$k\int\limits_0^{c^2}\lg\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\cos k\xi d\xi=\left[\sin k\xi\lg\frac{c+\sqrt{c^2-\xi}}{\sqrt{\xi}}\right]_{\xi=0}^{\xi=c^2}-$$

$$-\int\limits_0^{c^2}\sin k\xi\frac{d}{d\xi}\lg\left(c+\sqrt{c^2-\xi}\right)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_0^{c^2}\frac{\sin k\xi}{\xi}d\xi.$$

Первый из этих трех членов равен нулю при любых k, так как выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль при $\xi=c^2$ и при $\xi=0$; второй имеет вид выражения (14) и поэтому обращается в нуль при $k=\infty$, так как $\lg(c+\sqrt{c^2-\xi})$ непрерывен и при $\xi=c^2$, хотя его производная становится бесконечной в этой точке; третий конечен при $k=\infty$ и равен

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{4}.$$

Поэтому искомое значение выражения (19) при $\mu_1\mu_2<0$ будет равно

$$G\frac{\pi}{\sqrt{-\mu_1\mu_2}}\sin(kA_0+\delta). \tag{26}$$

При дальнейшем обсуждении выражений (24), (25) и (26) надо использовать то, что

$$\mu_1\mu_2=A_{11}A_{22}-A_{12}^2, \tag{27}$$

μ_1 и μ_2 — корни уравнения (23) и A_{11}, A_{12}, A_{22} имеют значения, указанные в (22).

Проведенные только что исследования, как это следует из (20), относятся к двум случаям; первый из них — когда поверхность (s) пересекается прямой, соединяющей точки 1 и 0; второй — когда на (s) существует точка, обладающая тем свойством, что прямые, идущие из нее к точкам 1 и 0, образуют равные углы с нормалью к поверхности (s) и лежат с ней в одной плоскости. Первый из этих случаев подвергнем дальнейшему исследованию. В этом случае $\alpha_1+\alpha_0=0$, $\beta_1+\beta_0=0$, $\gamma_1+\gamma_0=0$.

Поэтому равенства (22) дают

$$A_{11}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)(1-\alpha_1^2),\qquad A_{12}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)\alpha_1\beta_1,$$

$$A_{22}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)(1-\beta_1^2)$$

и, согласно (27),

$$\mu_1\mu_2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)^2\gamma_1^2.$$

Корни μ_1 и μ_2 уравнения (23) суть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)\quad \text{и}\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_0}\right)\gamma_1^2,$$

т. е. оба положительны; поэтому, приравнивая выражения (19) и (24), получим

$$\pm G2\pi\frac{\rho_1\rho_0}{\rho_1+\rho_0}\frac{1}{\gamma_1}\cos(k(\rho_1+\rho_0)+\delta), \tag{28}$$

где знаки (+) и (—) выбираются в зависимости от знака γ_1.

При данном исследовании выражения (19) δ предполагалась постоянной; но оно годится и тогда, когда δ, как и G, являются непрерывными функциями точки поверхности (s); тогда δ и G в выражениях (24), (25), (26) и (28) надо отнести к точке ($x=0$, $y=0$). С помощью формулы

$$\sin(k\zeta+\delta)=\cos\delta\sin k\zeta+\sin\delta\cos k\zeta$$

можно заметить, что интеграл (19) при переменном δ может быть разложен на сумму двух интегралов одинакового вида, в которых δ принимает постоянное значение 0 и $\pi/2$.

С помощью найденных результатов легко доказать теперь утверждения, высказанные в начале данного параграфа в отношении интеграла $\int\Omega ds$.

Пусть Ω имеет значение, указанное в (13), а Φ — указанное в (3); положим

$$\frac{2\pi}{\lambda}=k,\qquad -\frac{t}{T}2\pi=\delta;$$

тогда увидим, что часть названного интеграла, относящаяся к первому члену Ω, обращается в нуль; то же верно и для другой его части, получающейся от второго члена, если на поверхности s не существует такой точки, что прямые, идущие из нее в точки 1 и 0, образуют равные углы с нормалью к поверхности и лежат с ней в одной плоскости, и если поверхность не пересекается прямой, соединяющей точки 1 и 0.

Если первое из этих двух условий не выполняется, то и в этом случае рассматриваемый интеграл обращается в нуль; чтобы найти его значение, нужно подставить в выражения (24), (25) или (28) значение G

$$\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}-\frac{\partial r_0}{\partial N}\right), \tag{29}$$

которое оно принимает в обозначенных точках, а это значение равно нулю, так как $\partial r_1/\partial N$ и dr_0/dN являются косинусами углов, равных друг другу. Поэтому $\int \Omega ds$ только тогда отличен от нуля, когда поверхность (s) пересекается прямой, проходящей через точки 1 и 0. В этом случае выражение (28) принимает свое значение, если в нем положить для G значение, которое имеет (29) в точке пересечения. Совмещая направление N, которое оно имеет в (13), с направлением оси z, а в (28) с γ_1, получим $\partial r_1/\partial N=\gamma_1$, $\partial r_0/\partial N=-\gamma_1$ и поэтому значение (29) равно $2\gamma_1/\rho_1\rho_0$, т. е.

$$\int \Omega ds = \pm\frac{4\pi}{\rho_1+\rho_0}\cos 2\pi\left(\frac{\rho_1+\rho_0}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)=\pm 4\pi\Phi_0,$$

где знак (+) берется при $\gamma_1 > 0$, знак (—) — при $\gamma_1 < 0$, т. е. смотря по тому, будет ли острым или тупым угол, образованный нормалью N с прямой, идущей из точки 1 в точку 0.

Этим доказано утверждение, о котором шла речь, для случая, когда Φ имеет указанное в (3) значение; оно остается справедливым, если перейти от этого равенства к общему равенству (4) указанным там способом.

§ 4. Для возможности получения следствий из уравнения (12) необходимо исследовать значения Φ и $\partial\Phi/\partial N$ на поверхности тела, к которому это уравнение относится.

Если на плоскость, являющуюся общей границей двух прозрачных сред, падает плоская световая волна, то образуются плоские отраженные и преломленные волны. Для того чтобы они возникли и имели надлежащее направление, надо принять во внимание, что смещения частиц эфира на границе обеих сред и их производные связаны линейными, однородными соотношениями с постоянными коэффициентами [11]. Пусть Φ_i относится к падающему свету, Φ_r — к отраженному в точке (ξ, η, ζ); пусть для первой среды $\zeta < 0$, для второй $\zeta > 0$ и

$$\Phi_i = A\cos 2\pi\left(\frac{l\xi+m\eta+n\zeta}{\lambda}-\frac{t+\alpha}{T}\right),$$

где l, m, n — косинусы углов, образованных координатными осями с направлением волновой нормали падающего света, в котором он распространяется. Тогда

$$\Phi_r = cA\cos 2\pi\left(\frac{l\xi+m\eta+n\zeta}{\lambda}-\frac{t+\alpha+\gamma}{T}\right),$$

где c и γ — постоянные, значения которых зависят от Φ, угла падения, состояния поляризации падающего света и от природы обеих сред. Поэтому если обозначения $\Phi_i(t)$ и $\Phi_r(t)$ считать равнозначными обозначениями Φ_i и Φ_r, то для $\zeta=0$ будем иметь

$$\Phi_r(t) = c\Phi_i(t+\gamma)$$

и

$$\frac{\partial \Phi_r(t)}{\partial \zeta} = -c\frac{\partial \Phi_i(t+\gamma)}{\partial \zeta}, \qquad (30)$$

из которых второе можно записать и в виде

$$\frac{\partial \Phi_r(t)}{\partial N} = -c\frac{\partial \Phi_i(t+\gamma)}{\partial N},$$

если N, как и раньше, означает нормаль к границе, направленную внутрь первой среды.

Если в падающем свете имеются волны с различными направлениями, так что Φ_i, как и Φ_r, являются суммами такого рода выражений, какими они принимались выше, то соответствующие равенства будут иметь место для отдельных членов этих сумм.

Это предложение может найти использование в случае, к которому относится уравнение (12), когда длина волны λ предполагается бесконечно малой, а кривизна поверхности рассматриваемого тела считается всюду конечной.

Уравнение (12) представляет Φ_0 (т. е. значение Φ в произвольной точке 0 рассматриваемого пространства) как сумму членов, порожденных светящейся точкой 1 и светящимися точками, лежащими на границе этого пространства.

Возьмем точку 0 бесконечно близко к границе поверхности, причем так, чтобы расстояние до нее было бесконечно малым и по отношению к λ. Тогда попадающие в нее световые волны можно рассматривать как частично падающие, частично отраженные или преломленные, смотря по тому, будут ли они распространяться к границе или от нее. Светящиеся точки, порожденные первыми, это те, которые находятся по одну сторону, а последними — по другую сторону от плоскости, проведенной через точку 0 параллельно ближайшему элементу граничной поверхности. Если предположить, что во второй среде нет падающих волн, то в первой среде существуют только падающие и отраженные волны; относя Φ_i к падающим, Φ_r к отраженным волнам, а Φ к суммарному их действию, будем иметь в точке 0

$$\Phi = \Phi_i + \Phi_r, \quad \partial\Phi/\partial N = \partial\Phi_i/\partial N + \partial\Phi_r/\partial N.$$

При этом равенства (30) будут справедливы тогда, когда падающий свет состоит только из одной системы волн, и для каждой такой системы, если таких систем больше одной.

Особенно прост и легок по сравнению с общим случай, когда вторая среда образована черным телом, т. е. таким, которое не отражает и не пропускает света. Практически такими свойствами должно обладать тело, в котором свет распространяется с той же скоростью, что и в прозрачной среде, и которое достаточно сильно поглощает свет. На поверхности такого тела, как и всякого непрозрачного, должны отсутствовать падающие волны, как это предполагалось выше; поэтому обозначенная через c величина у него всегда равна нулю; следовательно, на поверхности черного тела должны выполняться условия

$$\Phi_r = 0, \quad \partial\Phi_r/\partial N = 0. \qquad (31)$$

Если тело, упоминаемое в связи с (12), является черным и его поверхность всюду выпукла, то легко найти значения Φ и $\partial\Phi/\partial N$ на его поверхности. Представим себе плоскость, параллельную и бесконечно близкую к касательной плоскости к данному телу; тогда вся поверхность этого тела будет лежать по одну сторону от этой плоскости так, что каждый элемент ds может вносить некоторый вклад только в Φ_i, но не в Φ_r. Представим себе конус с вершиной в светящейся точке 1 и касающийся данной поверхности; линия касания делит всю поверхность на две части, из которых первая обращена к светящейся точке, а другая — нет; для точки, бесконечно близкой к первой части, вклад светящейся точки 1 в Φ_i вносится и в Φ^*; для точки, бесконечно близкой ко второй части, такой вклад вносится в Φ_r, где Φ^* вновь относится к движению, которое имело бы место, если бы черного тела не было. Поэтому для первой части

$$\Phi = \Phi^*, \qquad \partial\Phi/\partial N = \partial\Phi^*/\partial N; \tag{32}$$

для второй

$$\Phi_i = 0, \qquad \partial\Phi_i/\partial N = 0,$$

а тогда, согласно (31),

$$\Phi = 0, \qquad \partial\Phi/\partial N = 0. \tag{33}$$

Для черного тела произвольного вида условия (31) удовлетворяются, когда для тех точек поверхности, в которых она в первый раз встречает прямые, идущие из точки 1, точки принимают условия (32), а для всех остальных точек поверхности — условия (33). Из этих предположений следует, как это видно из доказательства в § 3, что интеграл $\int \Omega ds$, взятый по всей поверхности, равен нулю, если точка 0 бесконечно близка к первой части, и что он равен $-4\pi\Phi_0^*$, если точка 0 бесконечно близка к второй части поверхности. Отсюда с помощью (12) условия (31) даются для всей поверхности.

Однако из вышеупомянутого предложения следует, что $\Phi_0 = \Phi_0^*$ там, где точка 0 расположена в прозрачной среде, если прямая, соединяющая точки 1 и 0, не пересекает поверхность тела, и $\Phi_0 = 0$, если эта линия пересекает поверхность два раза или больше. Так как под Φ мы разумеем любое из смещений u, v, w, то это означает, что в первом из обоих рассматриваемых случаев поведение света в точке 0 такое же, как если бы черное тело отсутствовало, но во втором случае в том месте, где находится точка 0, будет господствовать темнота. Поэтому и говорят, что черное тело отбрасывает тень, а свет от светящихся точек распространяется прямолинейно, лучами, которые можно рассматривать независимыми друг от друга.

§ 5. Предложение, которое мы использовали (высказано в начале § 3), справедливо только при определенных, указанных там условиях; если они не выполнены, то неверными будут и следствия из этого предложения, и тогда наступают явления дифракции.

Представим себе светящуюся точку 1 и черный экран, в котором сделано круговое отверстие. Линия, которой касается поверхность экрана конуса с вершиной в точке 1, называется краем этого отверстия, он делит поверхность экрана на внутреннюю и внешнюю части. Пусть s — произвольная поверхность, ограниченная краем и образующая как с той, так и с другой из упомянутых

частей замкнутую поверхность, окружающую светящуюся точку. Если точка 0 лежит вне этой замкнутой поверхности, то в силу (12), согласно гипотезам, принятым в отношении черного тела, т. е. по условиям (32), (33) и по равенству (10),

$$4\pi\Phi_0 = \int \Omega ds, \tag{34}$$

где при образовании Ω Φ должно быть заменено на Φ^*, а интегрирование распространяется на поверхность s. Дифракционные явления могут наступить вблизи точки 0, если для какой-нибудь конечной части поверхности или ее границы с точностью до бесконечно малых r_1+r_0 является постоянной или если прямая, соединяющая точки 1 и 0, проходит бесконечно близко от границы поверхности (s). В явлениях, которые наблюдал Френель на оси круглого отверстия или круглого экрана в случае, когда светящаяся точка находилась на той же оси, r_1 и r_0, а значит, и r_1+r_0 были близки к постоянной для всех точек границы поверхности s. В явлениях дифракции, носящих имя Френеля, наступающих вблизи границы тени экрана, линия, соединяющая точки 1 и 0, проходит вблизи границы поверхности s; в явлениях дифракции Фраунгофера (которые наблюдаются в бесконечно удаленной точке с помощью бесконечно удаленной светящейся точки) для всех точек отверстия r_1+r_0 близка к постоянной. Для отыскания интенсивности в точке 0 и в этом случае в соответствии с (3) положим сначала

$$\Phi^* = \frac{1}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi. \tag{35}$$

Тогда Ω получит значение, указанное в (13). Оба члена, входящие в это равенство, имеют, вообще говоря, разные порядки, так как λ бесконечно мало; разность $\partial r_1/\partial N - \partial r_0/\partial N$ бесконечно мала, но здесь этот случай не будет рассматриваться. Поэтому равенство (23) дает

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\lambda}\int \frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)ds.$$

Ради простоты изложения будем предполагать, что поверхность s является плоскостью и что ее размеры столь малы по сравнению с r_1 и r_0, что r_1 и r_0 и их производные по нормали можно считать постоянными всюду, где они находятся под знаком косинуса, и, наконец, что линии r_0 образуют бесконечно малые углы с продолжением линий r_1. Тогда имеем $\partial r_0/\partial N = -\partial r_1/\partial N$ и

$$\Phi_0 = \frac{1}{\lambda r_0 r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N}\int \sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)ds.$$

Обобщим теперь выражение для Φ^* таким путем, каким мы вывели (4) из (3); тогда получим

$$\Phi^* = \frac{D}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \frac{D'}{r_1}\sin 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right), \tag{36}$$

где D и D' зависят от направления лучей, идущих от светящейся точки 1 к точке (x, y, z). При этом будет

$$\Phi_0 = \frac{1}{\lambda r_1 r_0} \frac{\partial r_1}{\partial N} \left\{ D \int \sin 2\pi \left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds - D' \int \cos 2\pi \left(\frac{r_1 + r_0}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) ds \right\},$$

где D и D' имеют только что указанные значения. Теперь под Φ надо понимать любое из смещений u, v, w. Заменяя D и D' на A и A', B и B', C и C' в зависимости от того, понимаем ли мы под Φ соответственно u, v, w, и учитывая принятое в § 1 определение для меры интенсивности света, получим, что интенсивность света на дифракционном отверстии равна

$$I = \frac{1}{2r_1^2} (A^2 + A'^2 + B^2 + B'^2 + C^2 + C'^2).$$

Если положить

$$c = \int \cos \left(2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda} \right) ds, \qquad s = \int \sin \left(2\pi \frac{r_1 + r_0}{\lambda} \right) ds,$$

то интенсивность света в точке 0 будет равна

$$I \frac{1}{\lambda^2 r_0^2} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} \right)^2 (c^2 + s^2),$$

что совпадает с разнообразными экспериментальными данными [5].

§ 6. Полученное выше равенство существенно предполагает, что размеры дифракционного отверстия очень велики по сравнению с длиной волны и его применение к дифракционным спектрам, получаемым с помощью частых решеток, щели которых имеют ширину лишь в несколько длин волн, вряд ли может быть оправдано [6]. Однако измерения, которым мы обязаны знанием длин волн, показали, что такое применение доставляет с большой точностью правильное положение максимумов света. Следующие рассуждения дают объяснение этим обстоятельствам на основе принятых нами гипотез.

Представим себе решетку, о свойствах которой не будем делать никаких специальных предположений, например, что она может быть проволочной, закопченой или алмазной; пусть она вставлена в надлежащее отверстие плоского черного экрана, простирающегося в бесконечность во все стороны. Будем понимать под ds элемент плоскости решетки, или, говоря точнее, элемент плоскости, очень близкой к решетке, лежащей с той ее стороны, где находится точка 0. Тогда справедливо равенство (9), и если предположить, что r_0 бесконечно велико, то оно упрощается и принимает вид

$$4\pi\Phi_0(t) = -\int \frac{1}{r_0} \left\{ f\left(t - \frac{r_0}{a}\right) + \frac{1}{a} \frac{\partial r_0}{\partial N} \frac{\partial \Phi\left(t - \frac{r_0}{a}\right)}{\partial t} \right\} ds.$$

За плоскость xy координатной системы примем плоскость, элемент которой обозначен был выше через ds; в качестве оси x возьмем перпендикуляр к щели, а началом координат будем считать центр решетки, которую предполагаем

[5] Ср.: *Fröhlich. J.* // Ann. Phys. 1879. Bd. 6. S. 429.
[6] Ср.: *Fröhlich. J.* // Ann. Phys. 1879. Bd. 6. S. 460; 1882. Bd. 15. S. 592.

прямоугольной; далее, пусть ρ_0 — длина отрезка от начала координат до точки 0, а α_0, β_0, γ_0 — косинусы углов, образованных этим отрезком с координатными осями. Тогда

$$r_0 = \rho_0 - \alpha_0 x - \beta_0 y, \qquad \partial r_0/\partial N = \gamma_0, \qquad ds = dx \cdot dy.$$

Далее имеем

$$\Phi(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + A' \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \qquad f(t) = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial N} = B \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + B' \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} = \frac{2\pi}{\lambda} A' \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - \frac{2\pi}{\lambda} A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

где A, A', B, B' — функции от x и y. Подставляя эти выражения в равенство для Φ_0, при надлежащем переносе начала отсчета времени, получим

$$\Phi_0 = \iint \left\{ C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right) + C' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x + \beta_0 y}{\lambda}\right)\right\} dxdy,$$

где C и C' — линейные функции от γ_0, обратно пропорциональные ρ_0, и, что особо важно, линейные однородные функции от A, A', B, B' с коэффициентами, не зависящими от x и y.

Пусть теперь источником света служит светящаяся точка, лежащая на бесконечности в отрицательном направлении оси z, $2b$ — длина щели, $2n$ — их число, e — расстояние между двумя соответствующими точками, следующими друг за другом, т. е. $2ne$ — ширина решетки. Тогда нужно принять, что A, A', B, B', а также C, C' зависят от y так, что остаются постоянными, когда y изменяется от $(-b)$ до (b), и обращаются в нуль, когда y лежит вне $[-b, b]$; от x же они зависят так, что являются периодическими при изменении x от $-ne$ до ne, а при других значениях x обращаются в нуль. Вследствие этого получим

$$\Phi_0 = \frac{\sin 2\pi \frac{\beta_0 b}{\lambda}}{\frac{\beta_0}{\lambda}\pi} \int_{-ne}^{ne} \left\{ C \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right) + C' \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\alpha_0 x}{\lambda}\right)\right\} dx.$$

Так как λ можно рассматривать как бесконечно малую относительно b, то множитель перед знаком интеграла является бесконечно малым для каждого конечного значения β_0, и в то же время он конечен, когда β_0 порядка λ/b. Величины C и C', стоящие под знаком интеграла, разложим по синусам и косинусам дуг, кратных $2\pi x/e$; тогда при целых h интегралы

$$\int_{-ne}^{ne} \cos \frac{2\pi x}{e} h \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha_0 dx, \qquad \int_{-ne}^{ne} \sin \frac{2\pi x}{e} h \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \alpha_0 dx$$

обращаются в нуль, а интегралы

$$\int_{-ne}^{ne} \cos\frac{2\pi x}{e} h \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha_0 dx, \qquad \int_{-ne}^{ne} \sin\frac{2\pi x}{e} h \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\alpha_0 dx$$

будут соотв. равны

$$\frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}+\frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)},$$

$$\frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}-\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}-\frac{\sin 2\pi ne\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}{2\pi\left(\frac{h}{e}+\frac{\alpha_0}{\lambda}\right)}.$$

Эти выражения являются, вообще говоря, бесконечно малыми относительно ne, если таковым является и λ; но они будут конечны, если $\alpha_0 \pm h\,\lambda/e$ имеет порядок $\lambda/(ne)$.

Так как под Φ можно понимать любое из смещений u, v, w, то отсюда следует, что для

$$\alpha_0 = \pm h\lambda/e, \qquad \beta_0 = 0$$

интенсивность света бесконечно велика по сравнению с нею во всех остальных точках поля зрения; это подтверждается и наблюдениями.

§ 7. Из обсуждений, которые мы провели, легко вывести и закон отражения световых лучей. Поставим против светящейся точки 1 произвольное тело. Ради простоты представим, что поверхность этого тела покрыта черной оболочкой, в которой имеется малое отверстие, находящееся со стороны светящейся точки. Вследствие таких геометрических обстоятельств отраженный пучок света, который при этом образуется, не попадает на поверхность тела во второй раз. Пусть снова Φ^* относится к движению, которое имело бы место, если бы постороннего тела не было, и пусть сначала Φ^* определена с помощью (35). Для выполнения надлежащих условий достаточно положить: для свободной части поверхности

$$\Phi_i = \Phi^*, \qquad \partial\Phi_i/\partial N = \partial\Phi^*/\partial N,$$

а значит, согласно (30),

$$\Phi_r = \frac{c}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t+\gamma}{T}\right), \qquad \frac{\partial\Phi_r}{\partial N} = -c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t+\gamma}{T}\right),$$

и поэтому

$$\Phi = \Phi^* + \frac{c}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t+\gamma}{T}\right), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial N} = \frac{\partial\Phi^*}{\partial N} - c\frac{\partial}{\partial N}\frac{1}{r_1}\cos 2\pi\left(\frac{r_1}{\gamma}-\frac{t+\gamma}{T}\right);$$

для точек зачерненных частей поверхности, которые в первый раз встречают лучи, идущие из светящейся точки 1,

$$\Phi = \Phi^*, \qquad \partial\Phi/\partial N = \partial\Phi^*/\partial N;$$

для всех остальных точек зачерненной поверхности

$$\Phi=0, \qquad \partial\Phi/\partial N=0.$$

Тогда вследствие (12) и (11) излишек значения Φ_0 над значением, которое имело бы Φ_0, если бы была зачернена вся поверхность постороннего тела, есть сумма интегралов

$$-\frac{1}{4\pi}\int\frac{c}{r_1 r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N}+\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\cos 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t+\gamma}{T}\right)ds$$

и

$$-\frac{1}{2\lambda}\int c\frac{1}{r_1 r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}+\frac{\partial r_0}{\partial N}\right)\sin 2\pi\left(\frac{r_1+r_0}{\lambda}-\frac{t+\gamma}{T}\right), \tag{37}$$

где интеграл берется по свободной части поверхности, которую можно было бы назвать поверхностью s [7]. Если точка 0 находится на конечном расстоянии от поверхности, то при бесконечно малом λ первым из этих двух интегралов можно пренебречь по сравнению со вторым, так что указанное различие между двумя значениями Φ_0 представляется интегралом (37).

Это останется верным и тогда, когда Φ^* задано равенством (36) вместо (35); только тогда значения c и γ будут другими. Интеграл (37) имеет вид интеграла (19); из рассмотрений, сделанных по поводу первого из них, следует, что он, вообще говоря, равен нулю, а (19) не равен нулю, если поверхность s пересекается прямой, соединяющей точки 1 и 0; интеграл (37) обращается в нуль и тогда, когда для упомянутой точки пересечения имеет место соотношение $\partial r_1/\partial N+\partial r_0/\partial N=0$.

Интеграл (37) отличен от нуля, если на поверхности s есть точка, для которой прямые, соединяющие ее с 0 и 1, образуют равные углы с нормалью к s и лежат с нею в одной плоскости. Этим мы доказали существование отраженных лучей и указали их направления. Отклонения наступают вследствие явления дифракции, если для некоторой конечной части поверхности s или ее границы r_1+r_0 будет постоянным с точностью до бесконечно малых или если точка 0 бесконечно близка к границе пучка отраженного света.

Из полученного выше закона, определяющего направления отраженных лучей, могут быть найдены геометрические свойства пучка лучей, выходящих из светящейся точки и отражающихся от кривой поверхности. Вычисления, выполненные в § 3, позволяют еще узнать, как изменяются интенсивность и фаза при переходе от точки к точке на луче такого пучка.

Часть Φ_0, соответствующая отраженному свету, т. е. выражение (37), может быть задана посредством выражений (24), (25) или (26), если положить

$$G=K/\rho_0,$$

где K означает величину, не зависящую от ρ_0. Отсюда следует, что на отраженном луче при изменении ρ_0 интенсивность по абсолютной величине обратно

[7] Можно без труда показать, что если точка 0 лежит на поверхности или бесконечно близка к ней, то это выражение сводится к принятым значениям Φ и $\partial\Phi/\partial N$. Но доказательство этого мы здесь давать не будем.

пропорциональна $\rho_0^2 \cdot \mu_1, \mu_2$. Согласно (27) и (22), это выражение может быть записано в виде

$$(b_{11}\rho_0 + c_{11})(b_{22}\rho_0 + c_{22}) - (b_{12}\rho_0 + c_{12})^2,$$

где величины b и c не зависят от ρ_0 и

$$c_{11} = (1 - \alpha_0^2)/2, \quad c_{12} = -\alpha_0\beta_0/2, \quad c_{22} = (1 - \beta_0^2)/2.$$

Если $\rho_0 = f_1$ и $\rho_0 = f_2$ (действительные) корни квадратного уравнения, которое получается, если положить это выражение равным нулю, то интенсивность будет обратно пропорциональна и абсолютной величине

$$(\rho_0 - f_1)(\rho_0 - f_2).$$

В точках $\rho_0 = f_1$ и $\rho_0 = f_2$ интенсивность бесконечна; это фокусы лучей.

Относительно фазы можно заметить, что она, как показывают выражения (24), (25), (26), изменяются скачкообразно на $\pi/2$, когда точка 0 проходит через один из фокусов.

Вряд ли следует напоминать, что рассмотрения, вполне аналогичные тем, которые проведены в отношении отражения, могут быть сделаны и в отношении преломления света.

II

РАБОТЫ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

4. О ФРАУНГОФЕРОВЫХ ЛИНИЯХ *

В связи с выполненным мною совместно с Бунзеном исследованием спектров окрашенных пламен, благодаря которому стало возможным определить качественный состав сложных смесей по виду их спектров в пламени паяльной лампы, я сделал некоторые наблюдения, приводящие к неожиданному выводу о происхождении фраунгоферовых линий и позволяющие по ним заключить о вещественном составе атмосферы солнца и, возможно, также ярких неподвижных звезд.

Фраунгофер заметил, что в спектре пламени свечи есть две светлые линии, которые совпадают с двумя темными линиями *D* солнечного спектра [1]. Точно такие же светлые линии, но еще более яркие, можно получить, если ввести в пламя поваренную соль. Я получил солнечный спектр, но при этом солнечные лучи перед тем, как они попадали на щель, проходили через сильное пламя с поваренной солью. Если солнечный свет достаточно ослабить, то на месте обеих темных линий *D* появляются две светлые; но когда интенсивность света превышает некоторую определенную величину, две темные линии *D* проявляются с гораздо большей отчетливостью, чем в отсутствии пламени с поваренной солью.

Как правило, спектр друммондова огня [2] содержит обе светлые линии натрия, если светящийся участок известкового цилиндра недолго подвергался прокаливанию; если же этого не делать, то дублет становится слабее и, наконец, совсем исчезает. Если эти линии исчезли или только слабо видны, то спиртовое пламя, в которое внесена поваренная соль, помещенное между известковым цилиндром и щелью, действует так, что на месте светлых линий появляются две темные линии превосходной резкости и тонкости, во всех отношениях совпадающие с линиями *D* солнечного спектра. Таким образом можно искусственно вызвать линии *D* солнечного спектра в спектре, в котором они вообще отсутствуют.

Если в пламя бунзеновской горелки внести хлористый литий, то в спектре последнего появляется очень светлая, резко ограниченная линия, находящаяся между фраунгоферовыми линиями *B* и *C*. Если теперь пучок солнечных лучей умеренной интенсивности пропустить через пламя и направить на щель, то на указанном месте видно светлую линию на более темном фоне; но при большей силе солнечного света на ее месте выступает темная линия, имеющая такой же характер, что и фраунгоферовы линии. Если пламя убрать, то линия исчезает, насколько я мог видеть, полностью.

Из этих наблюдений я заключаю, что окрашенные пламена, в спектрах кото-

* Ueber die Fraunhofer'schen Linien // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1859. Oct. S. 662—665. Перевод Р. Б. Сегаля.

рых наблюдаются светлые резкие линии, так ослабляют проходящие через них лучи того же цвета, что на месте светлых линий появляются темные, если только за пламенем находится источник света достаточно большой интенсивности, в спектре которого эти линии обычно отсутствуют. Я далее заключаю, что темные линии солнечного спектра, не обязанные своим появлением земной атмосфере, возникают из-за присутствия в раскаленной атмосфере солнца таких веществ, которые в спектре пламени на том же самом месте дают светлые линии. Следует принять, что совпадающие с D светлые линии в спектре пламени всегда вызываются находящимся в нем натрием [3], поэтому темные линии D солнечного спектра позволяют заключить, что в атмосфере солнца имеется натрий. Брюстер нашел в спектре пламени селитры светлые линии на месте фраунгоферовых линий A, a, B; эти линии указывают на присутствие калия в солнечной атмосфере [4]. Из моего наблюдения, согласно которому красной литиевой полосе в солнечном спектре не соответствует никакая темная линия, по-видимому, следует, что лития в солнечной атмосфере или нет, или его сравнительно мало.

Таким образом, исследование спектров окрашенных пламен приобрело новое и важное значение; совместно с Бунзеном я собираюсь его провести так широко, как только это позволят наши возможности. При этом мы продолжим изучение обнаруженного мною ослабления лучей света пламенем. Опыты, проделанные нами в этом направлении, уже установили факт, который нам представляется имеющим большое значение. Чтобы в друммондовом свете появились темные линии D, требуются пламя поваренной соли более низкой температуры. Для этого годится пламя разбавленного водой спирта, но не пламя бунзеновской горелки. В пламени горелки малейшее количество поваренной соли, поскольку оно вообще заметно, действует так, что выявляются светлые линии натрия. Мы оставляем за собой право развить те следствия, которые могут вытекать из этого факта.

5.
ХИМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСРЕДСТВОМ НАБЛЮДЕНИЙ СПЕКТРОВ *. I

Известно, что многие вещества имеют свойство, будучи внесенными в пламя, в спектре последнего вызывать определенные светлые линии. На этих линиях может быть основан метод качественного анализа, который значительно расширяет область химических реакций и приводит к решению задач, до сих пор даже не ставившихся. Здесь мы ограничимся прежде всего тем, что разовьем этот метод для щелочных и щелочно-земельных металлов, на ряде примеров разъясним его достоинства.

Упомянутые линии проявляются тем отчетливее, чем выше температура и чем меньше собственная светимость пламени. Предложенная одним из нас газовая горелка [1] [1] создает пламя очень высокой температуры и очень малой светимости; поэтому такое пламя лучше всего пригодно для опытов с веществами, дающими светлые линии.

---

* Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen / *G. Kirchhoff*, *R. Bunsen* // Ann. Phys. 1860. Bd. 110. S. 161—169. Перевод Р. Б. Сегаля, Л. С. Полака.

[1] *Bunsen R.*, *Roscoe H.* Photometrische Untersuchungen // Ann. Phys. 1857. Bd. 100. S. 85.

В табл. I представлены спектры, которые получаются от пламени газовой горелки, если в нем испарять возможно более чистые хлорные соединения калия, натрия, лития, стронция, кальция, бария. Чтобы облегчить распознавание, тут же приведен солнечный спектр.

Из соединений калия в опытах использовался раскаленный хлористокислый калий, который предварительно перекристаллизовывался от шести до восьми раз. Хлористый натрий мы получали из чистого углекислого натрия и соляной кислоты и точно так же очищали его путем многократно повторяемой перекристаллизации. Литиевая соль очищалась путем четырнадцатикратного осаждения углекислым аммонием.

Соединение кальция было представлено как можно более чистым, растворенным в соляной кислоте мрамором. Из этого раствора фракционным осаждением с углекислым аммонием выпадала в осадок двумя порциями углекислая известь; последняя из них переводилась в азотнокислую известь. Полученную таким образом соль кальция мы многократно растворяли в абсолютном спирте и, наконец, после испарения спирта и осаждения с углекислым аммонием обработкой соляной кислотой превращали в хлористое соединение.

Для получения чистого хлористого бария мы многократно экстрагировали имеющееся в продаже соединение — заливали его почти абсолютным спиртом и кипятили. Полученный остаток, освобожденный от спирта, растворялся в воде, затем фракционно осаждался двумя порциями. Только вторая порция растворялась в соляной кислоте, а полученный хлористый барий затем еще очищался посредством повторных перекристаллизаций.

Чтобы получить возможно более чистый хлористый стронций, имеющееся в продаже соединение неоднократно перекристаллизовывалось из спирта и фракционно осаждалось с углекисым аммонием, выпадая двумя порциями. Второй осадок растворялся в азотной кислоте; азотнокислую соль очищали от последних следов кальция, заливая его спиртом, а затем выпаривая. Из очищенного таким образом продукта после осаждения с углекислым аммонием и растворения осадка в соляной кислоте получался, наконец, хлористый стронций. Все эти операции производились, насколько было возможно, в платиновых сосудах.

На рис. 1 изображен прибор, служивший нам большей частью для наблюдения спектров. Зачерненный изнутри ящик A имеет форму трапеции и покоится на трех ножках; боковые его стенки, угол между которыми около 58°, несут две зрительные трубы B и C. Окулярные линзы первой удалены и заменены пластиной, на которой находится образованная двумя латунными лезвиями щель, расположенная в фокусе линзы-объектива. Перед щелью установлена горелка так, чтобы ее пламя находилось на оси трубы B. Несколько ниже того места, где ось [как бы] проходит через пламя, находится согнутый в маленькую петлю конец очень тонкой платиновой проволоки, поддерживаемой подставкой E; на этой петле расплавляется капля исследуемого, предварительно обезвоженного хлористого соединения. Между объективами зрительных труб B и C находится полая призма F, наполненная сероуглеродом; преломляющий угол ее 60°. Призма покоится на латунной пластине, способной поворачиваться вокруг вертикальной оси. Эта ось имеет на своем нижнем конце зеркало G и над ним рукоятку H, служащую для того, чтобы поворачивать призму и зеркало. Напро-

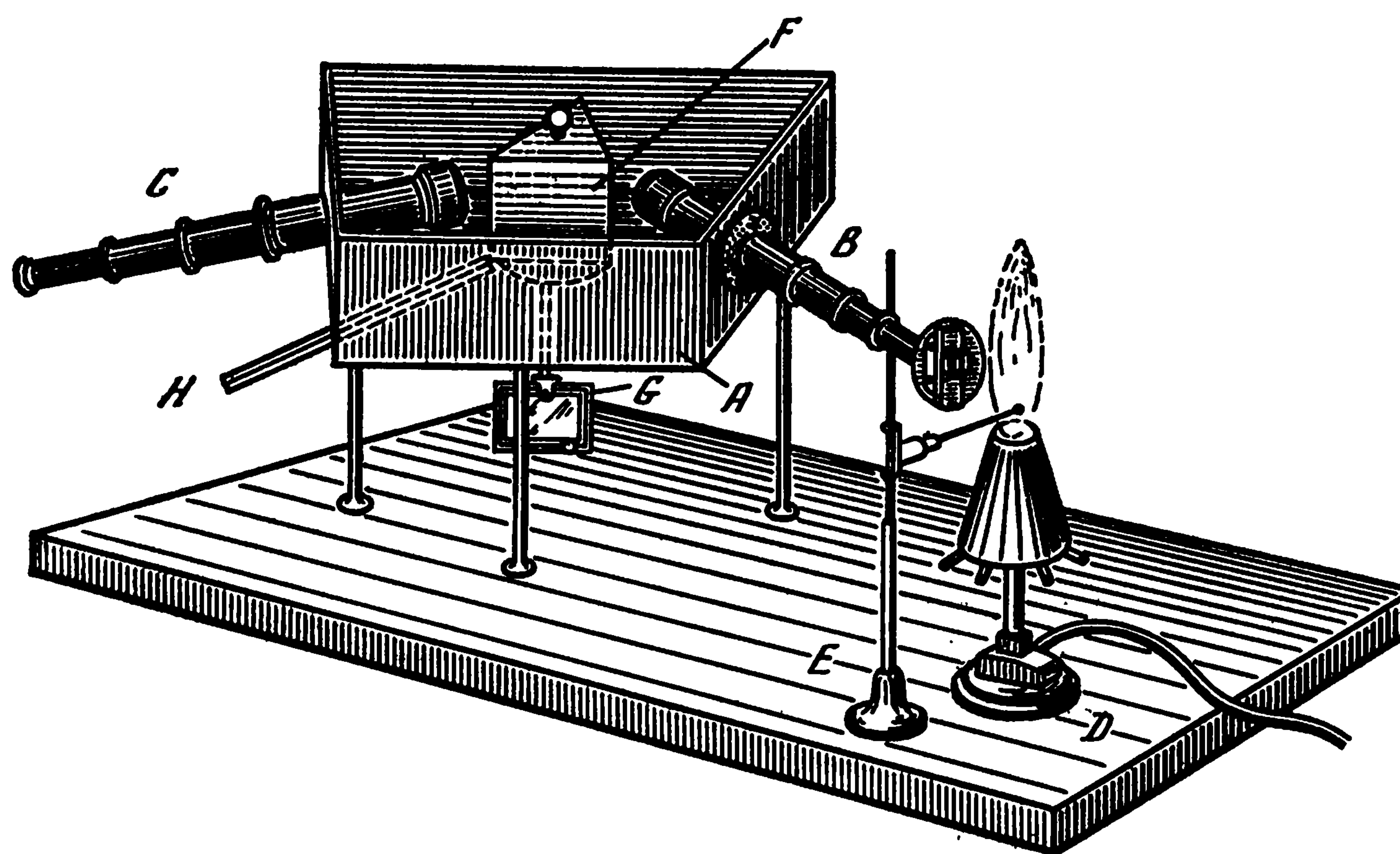


Рис. 1

тив зеркала укреплена маленькая зрительная труба, с помощью которой можно видеть зеркальное изображение горизонтальной шкалы, расположенной на небольшом удалении. Благодаря вращению призмы можно провести изображение спектра пламени мимо вертикальной нити зрительной трубы *C* и совместить с этой нитью любой участок спектра. Каждой точке спектра соответствует сделанный по шкале отсчет. Если спектр очень неяркий, то нить зрительной трубы *C* подсвечивается с помощью линзы, которая направляет на нить часть испускаемых лампой лучей через небольшое отверстие, проделанное сбоку в окуляре зрительной трубы *C*.

Представленные в табл. I спектры, полученные для названных выше хлористых соединений, сравнивались со спектрами, которые получаются, когда бромиды, иодиды, гидроксилы, сульфаты и карбонаты соответствующих металлов вносят в пламя: серы, сероуглерода, содержащего воду спирта, светильного газа (бесцветное пламя), окиси углерода, водорода, гремучего газа.

Этим обширным и отнявшим много времени исследованием, подробности которого мы считаем возможным опустить, было установлено, что различие соединений, в которые входили металлы, разнообразие химических процессов в пламени разных веществ и громадная разница в температурах пламени не оказывали никакого влияния на положение спектральных линий, соответствующих разным металлам.

Насколько значительна была разница в температурах, видно из следующего рассмотрения.

Температуру пламени можно оценить с помощью равенства

$$t = \frac{\sum gw}{\sum ps},$$

в котором t означает искомую температуру пламени; g — вес вещества, сгорающего с кислородом; w — теплоту его сгорания; p — вес и s — удельную теплоту продукта горения.

Приняв следующие теплоты горения [2]:

сера	2240 °C	этилен	11640
сероуглерод	3400	дитетрил	11529
водород	34462	окись углерода	2403
рудничный газ	13063		

и подставив, согласно Реньо [3], удельные теплоты при постоянном давлении

для серной кислоты	0,1553
для угольной кислоты	0,2164
для азота	0,2440
для водяного пара	0,4750,

найдем, таким образом, температуру

пламени серы	1820 °C	пламени окиси углерода [3]	3042
сероуглеродного пламени	2195	пламени водорода в воздухе [4]	3259
пламени светильного газа [2]	2350	пламени гремучего газа [5]	8061

Оказалось, что соединение металла дает тем более интенсивный спектр, чем выше температура пламени. В одинаковом пламени большую силу света дает то соединение данного металла, которое обладает большей летучестью.

Чтобы получить другие примеры того, что любой из многократно названных здесь металлов всегда вызывает в спектре одинаковые линии, мы сравнивали приводимые спектры со спектрами электрической искры, проскакивающей между электродами, образованными этими металлами.

Маленькие кусочки калия, натрия, лития, стронция и кальция прикреплялись к тонким платиновым проволокам и затем расплавлялись попарно в стеклянных трубках так, что они оказывались разделенными промежутками в 1—2 мм, а проволочки были протянуты сквозь стеклянную стенку трубок. Трубка помещалась перед щелью спектрального прибора: с помощью индукционной катушки Румкорфа мы создавали электрические искры, проскакивающие между кусочками металлов, и сравнивали их спектр со спектром газового пламени, в которое внесено хлористое соединение соответствующего металла. Пламя находилось за стеклянной трубкой. В то время, как катушка Румкорфа попеременно то в ключалась, то выключалась, можно было без всяких измерений легко и строго убедиться в том, что в сверкающем спектре искры светлые линии спектра пламени не смещались. Кроме них, в спектре искры появлялись еще другие светлые линии, часть из которых следовало приписать

---

[2] Liebig's Ann. 1855. Bd. 111. S. 258.
[3] *Bunsen R.* Gasometrische Methoden. Braunschweig, 1857. S. 254.
[4] Ibid.
[5] Ibid.

Таблица I

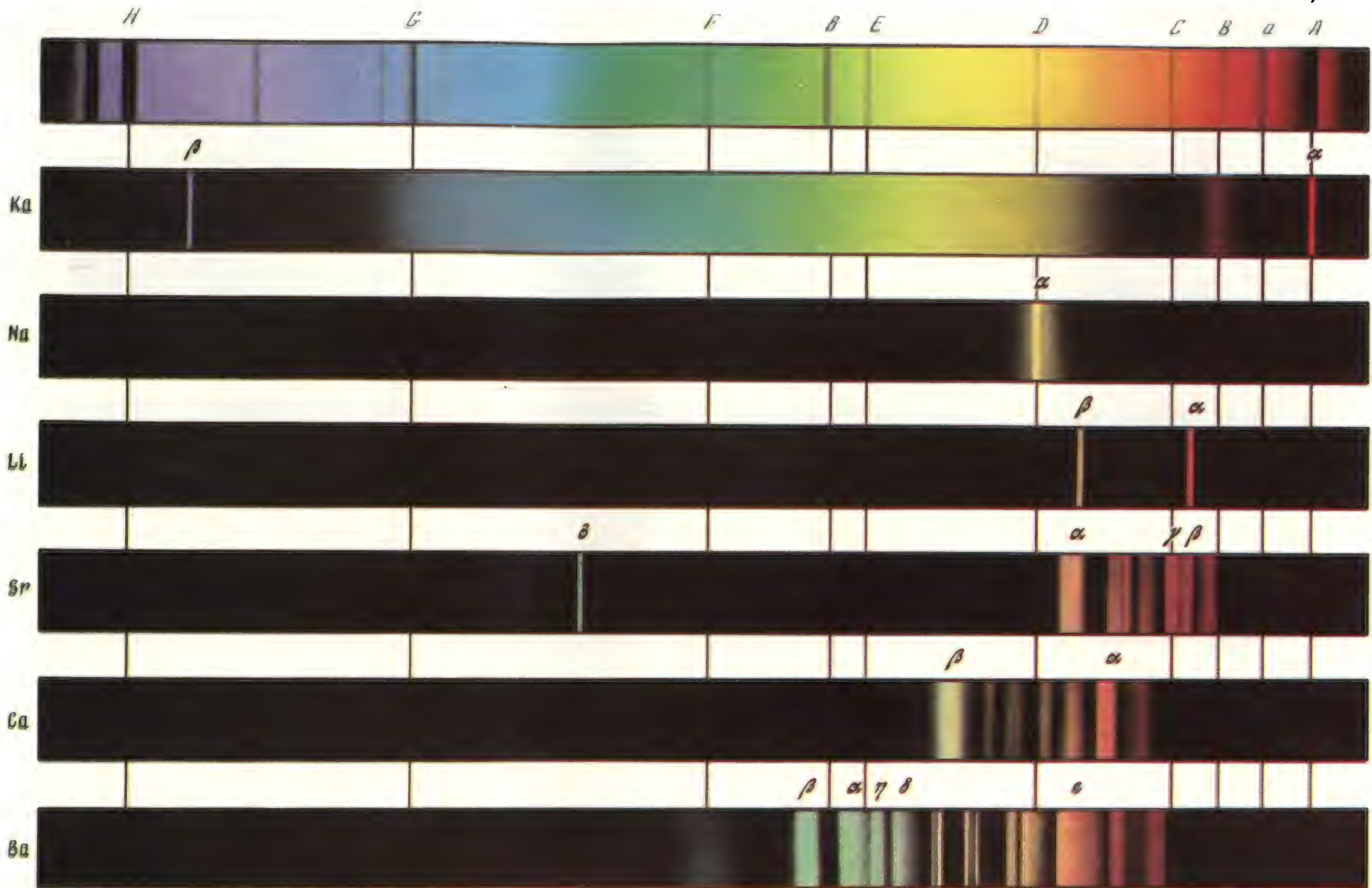
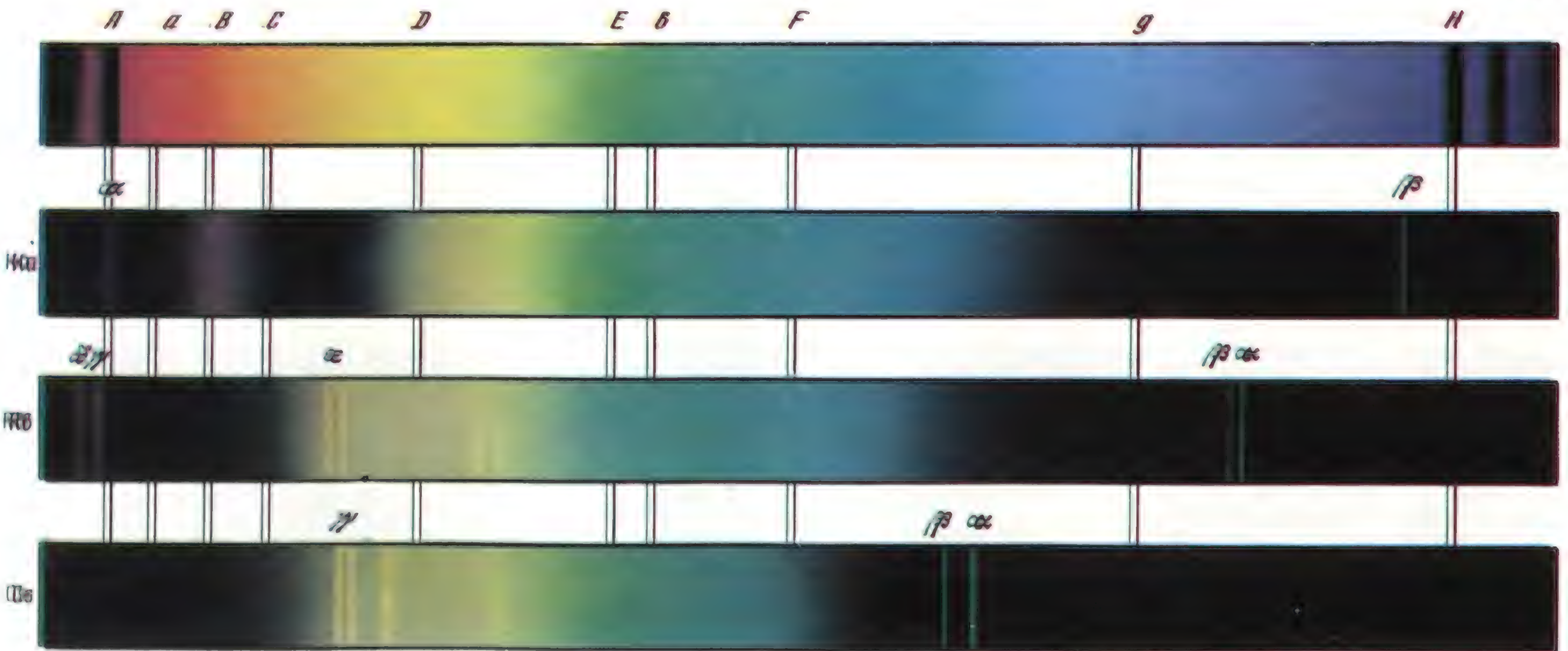


Таблица II



наличию посторонних металлов в электродах, другую часть — азоту, который заполнял трубку после того, как кислород окислял электроды [6].

Отсюда представляется несомненным, что светлые линии упомянутых спектров следует считать надежными признаками присутствия соответствующих металлов. Они могли бы служить в качестве индикатора, с помощью которого эти вещества обнаруживаются отчетливее, быстрее и при меньших количествах, чем с помощью любого другого аналитического метода.

Приведенные [в табл. I] спектры относятся к случаю, когда щель столь широка, что из темных линий солнечного спектра видны лишь наиболее отчетливые, когда увеличение наблюдательной зрительной трубы невелико (примерно четырехкратное) и сила света умеренная. Эти условия кажутся нам самыми благоприятными, когда речь идет о том, чтобы выполнить химический анализ посредством наблюдений спектров. Вид спектров при других условиях может быть существенно другим. Если разрешающую способность увеличить, то многие линии, обозначенные как простые, распадаются на несколько линий, например, линия натрия распадается на две; если увеличить силу света, то во многих спектрах появляются новые линии, а соотношение интенсивностей прежних линий изменится. Вообще с увеличением силы света интенсивность более темной линии растет быстрее, чем более светлой, но все же так, что не превосходит ее. Это отчетливо видно на примере двух линий лития. Из этого правила мы наблюдали только одно исключение: линия Ba η при меньшей силе света не заметна, тогда как линия Ba γ видна очень отчетливо, а при большей силе света первая значительно ярче второй. Этот факт представляется нам имеющим важное значение, и ему мы посвятим дальнейшее исследование.

Теперь следует обсудить подробнее свойства отдельных спектров, знание которых важно в практическом отношении, а также обратить внимание на преимущества, которыми обладает основанный на них химико-аналитический метод.

Натрий

Реакция на натрий является самой чувствительной из всех спектральных реакций. Желтая линия Na α — единственная, которая выявляет спектр натрия, — совпадает с фраунгоферовой линией D и выделяется своими резкими границами и чрезвычайной яркостью. Если температура пламени очень высока и количество вещества очень велико, то вблизи линии появляются следы сплошного спектра. В этом случае возле нее линии других веществ, слабые сами по себе, кажутся еще более ослабленными, и поэтому часто становятся видимыми только, когда реакция на натрий почти исчезает.

Реакция на соединения кислорода, хлора, иода и брома, на соли серной и угольной кислот проявляется наиболее явно. Но наблюдается реакция даже на соли кремниевой, борной, фосфорной кислот и на другие огнестойкие соли.

---

[6] Когда в одном опыте со стронциевыми электродами мы применили трубку, наполненную водородом вместо азота, ток разряда вскоре превратился в световую дугу, а стенки трубки покрылись серым налетом. Когда трубку под нефтью вскрыли, то оказалось, что газ водород исчез и образовалось безвоздушное пространство. По-видимому, при громадных температурах электрической искры газ восстанавливает оксид стронция, который не был полностью удален с поверхности металла.

Уже Сван [7] обратил внимание на то, что малое количество поваренной соли вызывает отчетливо видимую линию натрия [4].

Следующий опыт показывает, что химия не может указать ни одной реакции, которая хотя бы в малейшей степени могла сравняться по чувствительности с этим спектрально-аналитическим методом определения натрия. Мы сожгли 3 миллиграмма хлористокислого натрия с молочным сахаром в углу комнаты, самом удаленном от места расположения нашего прибора. Комната, в которой проводились наблюдения, вмещает примерно 60 кубических метров воздуха. Одновременно наблюдалось находившееся перед щелью бесцветное пламя горелки, но уже через несколько минут пламя постепенно окрасилось в бледно-желтый цвет и дало сильную линию натрия, которая только через 10 минут снова полностью исчезла.

Зная вес соли натрия и вес находящегося в комнате воздуха, легко рассчитать, что в одной весовой единице воздуха может быть не больше 1/20 000 000 весовой единицы взвеси натриевого дыма. Для наблюдения спектра необходимо время порядка секунды. За это время с учетом необходимого для поддержания горения кислорода в пламя поступает приблизительно 50 $см^3$ или 0,0647 г воздуха, который содержит меньше, чем 1/20 000 000 частей соли натрия. Получается, что глаз с достаточной четкостью может обнаружить еще меньше, чем 1/3 000 000 миллиграмма натриевой соли [5]. При такой чувствительности реакции становится понятным, что отчетливая реакция на натрий в раскаленном атмосферном воздухе отсутствует лишь крайне редко. Более двух третей поверхности Земли покрыто раствором поваренной соли. Осаждающаяся пена набегающих друг на друга морских волн беспрерывно превращается в водяную пыль.

Капельки морской воды, попадающие таким путем в атмосферу, испаряются. Остаются содержащие соль пылинки, составляющие хотя и переменную по величине, но, по-видимому, почти всегда присутствующую часть атмосферы, и, возможно, что эти пылинки поставляют соль малым организмам, в то время как большие растения и животные получают ее из почвы.

Содержание соли в воздухе, легко доказываемое благодаря спектральному анализу, заслуживает внимания еще и в другом отношении. А именно, если существуют каталитические влияния, в чем теперь, пожалуй, едва ли можно сомневаться, которые воздействуют на миазматическое распространение болезней, то такое антисептическое вещество, как поваренная соль, должно на них существенно влиять. Из ежедневных, длительное время продолжающихся спектральных наблюдений легко можно будет узнать, находятся ли в какой-либо связи изменения интенсивности спектральной линии Na α, вызванной находящимися в атмосфере соединениями натрия, с появлением и направлением распространения эндемических болезней.

В неслыханной чувствительности реакций на натрий следует также искать причину того, что все находящиеся в воздухе вещества через некоторое время при нагревании в пламени показывают линию натрия. Только у некоторых соединений удается устранить последние следы линии Na α, если их десять и более раз перекристаллизовывать из воды, которая соприкасалась только с пла-

[7] *Swan W.* // Ann. Phys. 1857. Bd. 100. S. 311.

тиновыми сосудами. Тонкая, как волос, платиновая проволока, освобожденная прокаливанием от всяких следов натрия, снова дает самую отчетливую реакцию, после того как несколько часов находилась на воздухе. Не меньшую реакцию показывает пыль, выделяющаяся в комнате, так, например, уже достаточно захлопнуть запыленную книгу, чтобы на расстоянии нескольких шагов вызвать сильнейшую вспышку линии Na α.

Литий

Раскаленный светящийся пар соединений лития дает две резко очерченные линии: одна из них — очень слабая линия Li β, а другая — яркая красная линия Li α. По надежности и чувствительности также и эта реакция превосходит все реакции, известные до сих пор в аналитической химии. Однако по чувствительности она несколько уступает реакции на натрий, возможно, только потому, что глаз к желтому свету более чувствителен, чем к красному. После сжигания 9 миллиграмм углекислого лития, смешанного с избытком молочного сахара и хлористокислого калия, в помещении, вмещающем приблизительно 60 кубических метров воздуха, эта линия становилась отчетливо видимой.

Поэтому из расчета, подобного приведенному выше, следует, что глаз способен уже с наибольшей четкостью определить присутствие углекислого лития в количестве, даже меньшем, чем 9/1 000 000 миллиграмма. Эта же соль, распыленная в количестве 0,05 г указанным способом, сообщает воздуху той же самой комнаты способность вызывать линию Li α в течение промежутка времени, длящегося более часа.

Лучше всего для определения лития пригодны его соединения с кислородом, хлором, иодом и бромом. Однако и углекислая, сернокислая и даже фосфорнокислая соли почти так же хорошо подходят для этой цели. Содержащие литий ископаемые — трифилин, сподумен, петалит, лепидолит — достаточно только подержать в пламени, как сразу же появляется интенсивнейшая линия Li α. Таким путем непосредственно выявляется литий во многих полевых шпатах, например в ортоклазе из Бавено. В этом случае линия появляется одновременно с внесением образца в пламя. Так, оказалось, что литий содержится в слюде из Альтенберга и Пенига, но не содержится в слюде из Миаска, Ашаффенбурга, Модума, Бенгалии, Пенсильвании и т. д.

В случаях, когда в силикатах естественного происхождения содержалось только исчезающе малое количество лития, он непосредственно не наблюдался. В таких случаях проверку лучше всего производить следующим образом: нагревают и испаряют небольшое количество исследуемого вещества с плавиковой кислотой или фтористым аммонием, над остатком выпаривают немного серной кислоты и растворяют сухую массу в абсолютном спирте. Спиртовый раствор выпаривают досуха, а затем еще раз растворяют в спирте; полученную таким путем жидкость испаряют на плоской стеклянной пластинке. Оставшийся после этого налет легко соскребывается ножом и на платиновой проволоке вносится в пламя.

Обычно для опыта совершенно достаточно 0,1 миллиграмма такого налета. Другие соединения, как, например, кремниевокислые, в которых обнаруживаются еще последние следы лития, путем выпаривания с серной кислотой

или каким-либо другим способом превращаются в сернокислые соли и затем обрабатываются таким же образом.

Этими опытами легко и надежно устанавливается неожиданный результат: литий относится к числу веществ, наиболее широко распространенных в природе. Очень легко он был обнаружен в 40 кубических сантиметрах морской воды, взятой в Атлантическом океане (39°15′ западной долготы, 41°41′ северной широты). Заметные следы лития содержит зола морских водорослей, прибитых Гольфстримом к шотландским берегам. Все без исключения полевые шпаты и кварцы из гранита Оденвальда, испытанные нами, содержали литий.

Очень чистая питьевая вода из источника на гранитном западном склоне Некарталя в Шлирбахе возле Гейдельберга содержит литий, тогда как в воде бьющего из цветного песчаника источника, поступающей в водопровод нашей химической лаборатории, его не оказалось. Минеральная вода, которой требуется не менее одного литра для обнаружения лития при обычном химическом анализе, показывает линию Li α, если только одну ее каплю внести в пламя на платиновой проволочке [8].

Все испытанные нами золы деревьев, выросших на гранитной почве Оденвальда, так же как и русские и другие купленные поташи, содержали литий. Даже в золе табака, виноградных листьев, виноградной лозы и винограда [9], как и в золе продуктов полеводства, выращенных в долине Рейна вблизи Ваккгаузеля, Дейдесгейма и Гейдельберга не на гранитной почве, содержится незначительное количество лития, как и в молоке животных, питавшихся этими продуктами полеводства [10].

Вряд ли необходимо отмечать, что множество летучих солей натрия и лития наряду с реакцией на натрий показывает с несколько меньшей отчетливостью и остротой реакцию на литий. Красная линия лития видна еще достаточно отчетливо, если вносимая в пламя бисеринка содержит только 1/1000 миллиграмма соли лития, тогда как непосредственно глаз не обнаруживает в пламени ничего, кроме желтого цвета натрия, без какого-либо намека на красную окраску.

Вследствие большей летучести соли лития реакция на натрий наблюдается обычно несколько дольше. Поэтому когда нужно обнаружить очень малые следы лития, содержащегося вместе с натрием, то пробную бусинку надо помещать в пламя, одновременно наблюдая в окуляр. Тогда линия лития часто видна в первых летучих продуктах лишь несколько мгновений.

Там, где при техническом получении соединений лития речь идет о выборе используемого сырья и целесообразной технологии, спектральный анализ является бесценным средством. Так, например, достаточно испарить в пламени только по одной капле, взятой из различных маточных щелочных растворов,

---

[8] Если требуется внести в пламя жидкость, то один конец платиновой проволочки толщиной в лошадиный волос изгибают в кольцо небольшого диаметра и ударом расплющивают его. Если на образовавшееся ушко опустить каплю жидкости, то на нем останется висеть количество жидкости, достаточное для опыта.

[9] В маточном растворе, выпадающем при фабричном производстве винной кислоты, накапливается столь много лития, что его можно получить в значительном количестве.

[10] Д-р Фольварчны легко обнаруживал присутствие соединений лития даже в золе человеческой крови и тканей по линии Li α.

наблюдая при этом в окуляр спектроскопа, чтобы сразу же убедиться, что многие отходы солеварен богаты литием, о чем раньше и не подозревали.

Таким образом, благодаря спектральному методу можно обнаружить непосредственно в процессе производства любые потери лития в виде побочных продуктов или отходов и тем самым легко разработать методы производства, более целесообразные, чем применявшиеся до сих пор [11].

Калий

Летучие соединения калия дают в пламени очень протяженный сплошной спектр, обнаруживающий только две характеристические линии; одна из них — Ка α [6] — лежит в крайней красной области, граничащей с инфракрасными лучами, и в точности совпадает с темной линией *A* солнечного спектра; другая — Ка β — в фиолетовой области на другом конце спектра, также соответствует линии Фраунгофера. Кроме того, только в самом интенсивном пламени видна еще одна очень слабая линия, совпадающая с фраунгоферовой линией *B*. Голубая линия весьма слаба, но для обнаружения калия она почти так же хорошо пригодна, как и красная.

Из-за того, что обе линии расположены вблизи границ видимого глазом спектра, реакция является менее чувствительной. Линии становились видимыми только тогда, когда мы сжигали в воздухе нашей комнаты 1 г хлористокислого калия, смешанного с молочным сахаром. Поэтому следует заключить, что глаз, таким образом, способен обнаружить уже 1/1000 миллиграмма хлористокислого калия.

Гидроксид калия и все без какого-либо исключения соединения калия с летучими кислотами дают реакцию. Однако силикаты калия и подобные огнестойкие соли сами по себе вызывают реакцию только при очень большом преобладании содержания калия. Чтобы вызвать появление характеристических линий при меньшем содержании калия, необходимо предварительно расплавить пробную бусинку вместе с небольшим количеством углекислого натрия. Присутствие солей натрия, следовательно, не препятствует реакции и лишь немного уменьшает ее чувствительность [7]. Благодаря этому можно легко отличить полевой шпат, санидин и адуляр от альбита, олигоклара, лабрадора и анортита.

Чтобы обнаружить исчезающе малые следы калия, надо только нагреть силикаты вместе с большим избытком фтористого аммония на платиновой крышке до слабого свечения, после чего остаток внести в пламя на платиновой проволоке. Таким путем обнаруживается, что почти все силикаты содержат калий. Соли лития столь же мало препятствуют реакции. Так, например, достаточно внести в пламя перед щелью обгоревший конец сигары, чтобы самым отчетливым образом тотчас же возникли желтая линия натрия и обе красные линии калия и лития — металлов, всегда присутствующих в табачной золе.

---

[11] Мы получили таким улучшенным методом из 2 кружек минеральной воды (около 4 литров) маточный раствор из минерального источника, который при выпаривании с серной кислотой дает 1, к 2 осадка, т. е. пол-унции карбоната лития коммерческой чистоты ценою около 140 флоринов за фунт. Большое число других маточных растворов минеральных источников, исследованных нами, столь же богаты соединениями лития.

Стронций

Спектры щелочно-земельных металлов по простоте значительно уступают спектрам щелочных металлов. Спектр стронция характерен отсутствием зеленой полосы. Его восемь линий — шесть красных, одна оранжевая и одна голубая — отлично видны. Важнейшими из них по положению и интенсивности являются оранжевая линия Sr α, выступающая сразу за линией натрия со стороны красного конца спектра, обе красные линии Sr β и Sr γ, а также голубая линия Sr δ. Чтобы определить чувствительность реакции, мы быстро нагрели на большом пламени в платиновой чашечке водный раствор хлористого стронция с известным количеством соли, пока вода не испарилась и чашечка не накалилась. При этом соль превратилась в микроскопические частички, поднявшиеся в воздух в виде белого дыма. Взвешивание остатка соли в чашке показало, что таким путем 0,077 г хлористого стронция в виде тонкой пыли перешло в воздух комнаты, вес которого 77 000 г. После того как воздух комнаты был равномерно перемешан посредством раскрытого дождевого зонтика, приведенного в быстрое движение, появились отчетливые характеристические линии спектра стронция. На основе этого опыта можно утверждать, что еще обнаруживаемое количество стронция составляет 6/100 000 миллиграмма.

Самую отчетливую реакцию дают соединения стронция с хлором и с другими галогенами. Гидроксид стронция и углекислый стронций дают реакцию гораздо более слабую, сернокислый — еще слабее, соединения с огнестойкими кислотами — самую слабую либо вовсе не дают никакой реакции. Поэтому сначала вносят в пламя пробную бусинку вещества, а затем [вновь вносят] после предварительного увлажнения соляной кислотой. Если в бусинке можно предположить наличие сернокислых солей, то перед увлажнением соляной кислотой ее надо подержать несколько мгновений в восстанавливающей области пламени, чтобы превратить сернокислую соль в сернистое соединение, разлагаемое соляной кислотой.

Для обнаружения стронция в соединениях кремниевой кислоты, фосфорной кислоты, борной кислоты или других огнестойких кислот лучше всего поступать следующим образом. Для смешивания пробы с углекислым натрием надо взять вместо платинового тигля коническую спираль из платиновой проволоки. Последняя в пламени нагревается до белого каления и погружается в обезвоженный, мелко истолченый, рыхлый углекислый натрий, который все же еще содержит достаточно влаги, чтобы необходимое количество соли прилипло к проволоке уже после первого погружения. В такой спирали расплавление происходит гораздо быстрее, чем в платиновом тигле, так как масса накаливаемой платины невелика, а расплавляемая соль находится в непосредственном контакте с пламенем. Если предназначенный для смешивания тонко измельченный порошок небольшой платиновой лопаткой внести в расплавленную соду и подержать в раскаленном состоянии несколько минут, то достаточно, повернув спираль острием кверху, постучать ею по краю тарелки, чтобы ее содержимое оказалось на тарелке в виде большого остывающего шарика. Шарик покрывают листком писчей бумаги и раздавливают упругим лезвием ножа. После удаления бумаги этим же ножом измельчают массу до тончайшего порошка.

Порошок собирают вместе на краю слегка наклоненной тарелки, осторожно

заливают горячей водой, которой промывают порошок несколько раз, наклоняя тарелку попеременно в разные стороны, и, наконец, жидкость сливают. Многократно повторяя эту операцию, легко удается извлечь растворимые соли, не возмущая осадок и без его значительных потерь. Если вместо воды применить раствор поваренной соли, то операция удается еще легче и надежнее. Осадок содержит стронций в виде углекислой соли, уже несколько десятых миллиграмма которой, помещенные на платиновую проволоку и смоченные соляной кислотой, дают интенсивнейшую реакцию.

Таким способом становится возможным без платинового тигля, без чашки для измельчения, без чашки для настаивания, без воронок и фильтров проделать за несколько минут все необходимые операции по смешиванию, измельчению, настаиванию и промыванию.

Реакциям на калий и натрий присутствие стронция не мешает [8]. Также и реакция на литий проявляется со всей отчетливостью одновременно с тремя названными реакциями, если количество лития не очень мало по сравнению с количеством стронция. Тогда линия лития Li α появляется в виде узкой, интенсивно красной, резко ограниченной полосы на более слабом красном фоне широкой стронциевой полосы Sr β.

Кальций

Спектр кальция уже с первого взгляда отличается от четырех ранее рассмотренных спектров тем, что он содержит в зеленой области в высшей степени характерную и интенсивную линию Caβ. Другим не менее характерным признаком может служить также очень интенсивная оранжевая линия Caα, лежащая в красной области спектра значительно дальше, чем линия натрия Naα и оранжевая линия стронция Srδ.

При сжигании некоторого количества хлористого кальция, хлористокислого калия и молочного сахара получается дым, реакция на который имеет приблизительно ту же чувствительность, что и на дым хлористого стронция, полученный при тех же условиях. Из поставленного таким образом опыта получается, что уже 6/100 000 миллиграмма хлористого кальция обнаруживаются легко и с полной уверенностью.

Реакцию показывают лишь соединения кальция, летучие в пламени, причем с тем большей отчетливостью, чем более они летучи. В этом отношении первыми стоят хлористый кальций, иодистый кальций, бромистый кальций. Сернокислый кальций дает спектр лишь после того, как он начинает преобладать в смеси, при этом спектр получается интенсивный и держится долго. Точно так же реакция на углекислый кальций становится наиболее отчетливой после того, как углекислота улетучивается.

Соединения кальция с огнестойкими кислотами ведут себя в пламени индифферентно. Но если их обработать хлористоводородной кислотой, то реакция легко получается следующим образом. Несколько миллиграммили даже несколько десятых миллиграмма тонко измельченного вещества на слегка увлажненном расплющенном платиновом ушке вносят в менее горячую область пламени, где порошок, не расплавляясь, спекается. Если теперь капнуть соляной кислотой на ушко, то капелька, скорее всего, на нем повиснет. Если эту

капельку поместить в самую горячую область пламени перед щелью спектрального аппарата, то она испарится, причем, вследствие эффекта Лейденфроста [9], не закипая. Если при этом, пока капля испаряется, смотреть в трубу спектроскопа, то в тот момент, когда остатки жидкости превращаются в пар, появляется сверкающий спектр кальция, который вспыхивает лишь на один момент при малом содержании кальция, но при более значительных его количествах длится более или менее долго.

Таким способом можно обнаружить кальций только в силикатах, реагирующих с соляной кислотой. Для силикатов, не реагирующих с соляной кислотой, анализ производится следующим образом. Несколько миллиграмм исследуемого вещества, измельченного в тончайший порошок, на плоской крышке платинового тигля смешивается с приблизительно одним граммом фтористого аммония, и крышку держат в пламени до тех пор, пока она после испарения фтористого аммония не раскалится. Налет соли, находящийся на крышке, увлажняют одной или двумя каплями серной кислоты и удаляют избыток последней повторным нагреванием в пламени. Если теперь ногтем пальца или лопаточкой соскрести в одно место налет на крышке, состоящий из сернокислых солей, и приблизительно один миллиграмм его посредством проволоки внести в пламя, то при наличии Ka, Na и Li получим прежде всего характеристические реакции на эти три вещества одновременно или одну за другой. Если же еще имеются кальций и стронций, то их спектры обычно появляются несколько позже, после того как Ka, Na и Li улетучиваются. При очень малом содержании кальция или стронция реакция на эти металлы отсутствует; но она немедленно появляется, если на обработанную несколько мгновений в восстановительной зоне пламени проволоку покапать соляной кислотой, а затем снова внести проволоку в пламя.

Все эти испытания (только нагрев или нагрев с соляной кислотой, обработка лишь фтористым аммонием или вместе с серной или соляной кислотами) дают в руки минералогам и еще больше геологам целый ряд чрезвычайно простых характеристик, чтобы надежно определять многие встречающиеся в природе вещества, имеющиеся в виде мельчайших фрагментов, в том числе и столь похожие друг на друга минералы, состоящие из двойных силикатов, содержащих кальций. Вряд ли столь надежное определение достижимо путем обычных анализов, сложных, отнимающих много времени и требующих большого количества материала. Лучше всего это покажут некоторые примеры.

1. Испаряющаяся на платиновой проволоке капля морской воды показывает сильную натриевую реакцию, а после испарения поваренной соли — слабую кальциевую реакцию, которая после увлажнения проволоки соляной кислотой на мгновение становится в высшей степени интенсивной. Если несколько десятых грамма остатка морской воды обработать серной кислотой и спиртом по способу, указанному для обнаружения лития, то легко получается реакция на калий и на литий. Присутствие в морской воде стронция лучше всего обнаруживается в накипи на котлах морских пароходов. Ее отфильтрованный солянокислый раствор после выпаривания и растворения в небольшом количестве спирта дает от основного хлорида железа желтое помутнение, которое за несколько дней выпадает в осадок. Этот осадок собирается на фильтре и промывается спиртом. Фильтр сжигается на тонкой платиновой проволоке,

при этом вместе с линиями кальция возникает полный и интенсивный спектр стронция.

2. Почвенные воды часто непосредственно дают реакцию на калий, натрий, литий, кальций и стронций. Если, например, внести в пламя минеральную воду из Дюркхейма или из Крейцнаха, то получаются линии Naα, Liα, Caα и Caβ. Если вместо почвенной воды использовать каплю ее маточного раствора, то те же линии возникают с интенсивнейшим блеском. По мере того как хлористый натрий и хлористый литий испаряются, а хлористый кальций становится преобладающим, постепенно появляются характеристические линии спектра стронция, который становится все более и более ярким во всей своей полноте. Таким образом, просто взглянув на спектр одной-единственной испарившейся в пламени капли, за несколько мгновений мы имеем полный анализ смеси, состоящей из пяти элементов.

3. Обгоревший кончик сигары, смоченный небольшим количеством соляной кислоты и помещенный в пламя, дает линии Naα, Kα, Liα, Caα и Caβ.

4. Кусок калиевого стекла из трубки для сжигания как с соляной кислотой, так и без нее дает линии Naα и Kα, а обработанный фтористым аммонием и серной кислотой — еще и линии Caα, Caβ и следы Liα.

5. Ортоклаз из Бавено сам по себе или с соляной кислотой дает только линию Naα и следы Kα и Liα, с фтористым аммонием и серной кислотой — интенсивные линии Naα, Kα и более слабую Liα. После улетучивания обнаруженных таким образом веществ смоченная HCl и внесенная в пламя проба дает едва различимые вспышки линий Caα и Caβ. После этого опыта налипший на платиновую проволоку остаток, смоченный азотнокислым оксидом кобальта и раскаленный, показывает характерную для глинозема окраску. Если добавить еще известную реакцию на кремнезем, то из этих проб, выполнимых за несколько минут, следует, что бавенский ортоклаз содержит кремнезем, глинозем, калий и следы натрия, кальция и лития, тогда как какие-либо следы окиси бария и стронция в нем отсутствуют.

6. Адуляр из Готтара ведет себя совершенно подобно ортоклазу, только реакция на литий отсутствует полностью, а на кальций — почти полностью.

7. Лабрадорит из Сан-Пауло сам по себе дает только линию натрия Naα, но не дает спектра кальция. Однако проба, смоченная хлористоводородной кислотой, выявляет очень яркие линии кальция Caα и Caβ. Проба с фтористым аммонием дает еще слабую калиевую реакцию и едва заметные следы лития.

8. Лабрадорит из корсиканского диорита ведет себя таким же образом, только в нем отсутствуют следы реакций на литий.

9. Мозандрит из Бревича и чевкинит из Ильменских гор сами по себе дают реакцию на натрий, но после обработки соляной кислотой получаются еще линии Caα и Caβ.

10. Мелинофан из Ламое сам по себе дает только Naα, но с соляной кислотой еще и Caα, Caβ и Liα.

11. Шеелит и сфен уже после обработки соляной кислотой дают очень интенсивную кальциевую реакцию.

12. Если наряду с кальцием присутствует небольшое количество стронция, то для его обнаружения целесообразнее всего выбрать линию Srδ. С ее помощью удается легко обнаружить ничтожные количества стронция в очень многих оса-

дочных известняках. Линии Naα, Liα, Kaα, особенно же Liα, появляются уже непосредственно при накаливании известняка в пламени. Превращенные посредством соляной кислоты в хлористый кальций и в таком виде внесенные в пламя, эти вещества дают те же самые линии, но часто еще и достаточно отчетливую линию Srδ. Но последняя появляется лишь на короткое время, в течение которого она вследствие процесса испарения в пламени постепенно усиливается и обычно проявляется наиболее отчетливо незадолго до исчезновения спектра кальция.

Таким путем были обнаружены линии Naα, Liα, Kaα, Caα, Caβ, Srδ у следующих известняков: силурийского известняка из Кугельбада возле Праги; ракушечного известняка из Рорбаха возле Гейдельберга; известняка из Мальша в Бадене, мела из Англии.

Следующие известняки показывали только линии Naα, Liα, Kaα, Caα, Caβ, но не показывали голубую линию стронция: девонский известняк из Герольштейна в Эйфеле; карбоновый известняк из Планитца в Саксонии; цехштейн из Нордгаузена на Гарце; юрский известняк из Штрейтберга во Франконии; мрамор из Ауэрбаха, из гранита [12].

Уже из этого небольшого количества опытов видно, что более обширные и тщательные спектрально-аналитические исследования на содержание лития, калия, натрия и стронция в различных известняковых соединениях с учетом их возраста и мест распространения представляют большой геологический интерес и, возможно, могли бы привести к неожиданным заключениям о природе древнего океана и морских бассейнов, в которых происходило образование этих известняков.

Барий

Спектр бария — самый сложный по сравнению со спектрами всех щелочных и щелочно-земельных металлов. От ранее рассмотренных он отличается уже с первого взгляда благодаря зеленым линиям Baα и Baβ, превосходящим все остальные по интенсивности и при слабой реакции первыми появляющимся и последними исчезающим. Линия Baγ менее заметна, но все же ее еще можно рассматривать как характеристическую линию. Сравнительно довольно большое протяжение спектра является причиной того, что спектральная реакция соединений бария вообще несколько менее чувствительна, чем реакция ранее рассмотренных веществ. Хлористый барий в количестве 0,3 грамма, смешанный с молочным сахаром и сожженный в нашей комнате, после того как воздух был хорошо перемешан раскрытым дождевым зонтиком, давал длительное время очень отчетливую линию Baα. Отсюда после вычисления, подобного уже выполненному для натрия, можно заключить, что реакция позволяет обнаружить со всей отчетливостью количество бария, меньшее, чем 1/1000 миллиграмма.

Хлористый барий, бромистый барий, иодистый барий, фтористый барий,

[12] Посредством описанной выше процедуры со спиртом из 20 г этого мрамора получалось так много азотнокислого стронция, что появлялся полный интенсивный спектр стронция. Присутствует ли стронций также и в других приведенных здесь известняках, обработанных подобным же образом, мы не проверяли.

гидрат окиси бария, углекислый и сернокислый бариты показывают превосходную реакцию. Поэтому они могут быть обнаружены при непосредственном нагреве в пламени.

Реагирующие с соляной кислотой силикаты, содержащие баритовые земли, дают такую же реакцию, если их внести в пламя вместе с каплей соляной кислоты, как это указывалось для известняка. Так, например, соль бария [10], обработанная по этому способу, дает линии Caα и Caβ одновременно с линиями Baα и Baβ.

Соединения баритовой земли с огнестойкими кислотами, ведущие себя с соляной кислотой или без нее индифферентно в пламени, лучше всего растворить с углекислым натрием указанным для стронция способом, а затем испытать полученный таким путем углекислый барит. Если в таких соединениях содержатся вместе Ca, Ba и Sr в очень различных количествах, то полученную углекислую соль растворяют в капле азотной кислоты и после выпаривания спиртом из осадка извлекают нитрат кальция. Остаток содержит еще барит и стронций, которые легко проявляются одновременно, если находятся в сопоставимых количествах. Если же требуется определить последние едва уловимые следы стронция или бария, то остаток прокаливанием с нашатырем превращают в хлористые соединения, из которых хлористый стронций легко извлекается спиртом и приводится к концентрации, достаточной для его обнаружения. Если ни одно из веществ, на которые проводится анализ, не находится в исчезающе малом количестве, то все описанные здесь их разделения становятся совершенно ненужными, как показывает следующий опыт. Смесь из хлористого натрия, хлористого калия, хлористого лития, хлористого кальция, хлористого стронция и хлористого бария, в которой каждое из шести составляющих ее веществ содержалось в количестве не более 1/10 миллиграмма, вносилась в пламя, и наблюдался ее спектр. Сначала появлялась интенсивная желтая линия натрия Naα на фоне слабого сплошного спектра. Когда последний начинал бледнеть, возникала четко ограниченная интенсивная красная линия лития Liα и рядом с ней, подальше от линии натрия, тусклая линия калия Kα, тогда как линии бария Baα и Baβ выступали самым отчетливым образом на присущем им месте и со свойственным им оттенком. По мере того как соединения калия, лития и бария все более и более улетучивались, их линии снова поочередно постепенно бледнели и исчезали, пока, наконец, через несколько минут, словно из тумана, стали возникать линии кальция и стронция. Линии Caα, Caβ, Srα, Srβ, Srγ и Srδ выявились со всей резкостью, с присущими им видом, оттенком и расположением, а затем, спустя довольно длительное время, они снова побледнели и вовсе исчезли.

Отсутствие какого-либо одного или сразу нескольких компонентов в этой смеси при таком наблюдении обнаруживается мгновенно по отсутствию соответствующих линий спектра [13].

Тем, кому отдельные спектры известны из многих наблюдений, не требуются точные измерения отдельных линий; их цвет, взаимное расположение, свое-

---

[13] Перевод заключения статьи Г. Кирхгофа сделан Л. С. Полаком. — *Примеч. ред.*

образная форма и оттенок, степень блеска являются характеристиками, которые вполне достаточны для надежной ориентации и для неопытных наблюдателей. Эти характеристики являются критериями для сравнения, которые можно использовать, подобно неким реагентам, при изучении различных осадков по их внешнему виду.

Аналогично тому как осадки могут быть различного характера: железообразные, порошкообразные, творожистые, зернистые или кристаллические, так и спектральные линии имеют присущие им особенности — одна линия резко ограничивается кантами, другие размываются с одной или с обеих сторон, одинаково или неодинаково, одни могут быть шире, а другие у́же. И если обычно для исследования используются лишь те осадки, которые выпадают при возможно большем разведении раствора, то и при спектральном анализе для изучения состава используются только те линии, которые проявляются при наименьшем количестве вещества и не слишком высокой температуре.

В этом смысле оба метода примерно одинаковы. Зато спектральный анализ, рассматриваемый как своеобразный реактив, имеет в отношении окраски особенность, которая обеспечивает ему преимущество перед любыми другими аналитическими методами. В самом деле, среди осадков, которые используются при распознавании веществ, бóльшая часть имеет белый цвет, и только некоторые из них являются окрашенными. При этом окраска осадков не очень постоянна и имеет различные оттенки в зависимости от того, какой осадок более плотный или более рыхлый. Кроме того, часто уже мельчайшие примеси посторонних веществ изменяют характерную окраску на совершенно неизвестную. Поэтому более тонкие градации цветов осадков не принимаются во внимание как химические характеристики.

При спектральном анализе, напротив, окрашенные полосы не подвержены таким посторонним влияниям и не меняются в присутствии других веществ [11]. Места, которые они занимают в спектре, определяют химическое свойство, которое имеет столь же фундаментальную и неизменную природу, как атомный вес веществ, и могут быть поэтому установлены с почти астрономической точностью.

Совершенно особое значение спектрально-аналитическим методам придает то обстоятельство, что они почти бесконечно раздвигают границы, которых до сих пор достигла химическая характеристика материи. Они обещают дать нам драгоценные сведения о распространении и распределении веществ в геологических формациях. Уже немногие опыты, описанные в настоящей статье, приводят к неожиданному заключению, что не только калий и натрий, но также литий и стронций, правда, в меньших количествах, должны считаться веществами, распространенными повсюду на нашей Земле.

Не менее важную роль должен сыграть спектральный анализ в открытии до сих пор неизвестных элементов. Действительно, когда речь идет о веществе, которое столь экономно распространено в природе, что прежними методами анализа его распознать нельзя, то можно надеяться, что многие такие вещества могут быть обнаружены и определены простым рассмотрением спектров их пламен. И в самом деле, мы уже имели возможность убедиться, что существуют до сих пор неизвестные элементы [12].

Мы полагаем, что, опираясь на не вызывающие сомнения результаты спек-

трально-аналитического метода, уже теперь можно выдвинуть утверждение: наряду с калием, натеием и литием имеется еще четвертый металл, принадлежащий в группе щелочных металлов. Он имеет такой же характерный и простой спектр, как литий, — металл, который дает в нашем спектральном приборе только две линии: слабую синюю, которая почти совпадает с линией стронция Srδ, и другую, тоже синюю, но расположенную немного ближе к фиолетовому концу спектра, а интенсивностью и резкостью границ соперничающую с линией лития.

Выше мы представили спектральный анализ как изумительно простое средство для обнаружения мельчайших следов определенных элементов в земных телах. С другой стороны, он открывает для химического исследования область, совершенно недоступную до сего времени, простирающуюся далеко за границы Земли и самой Солнечной системы [[13]]. Так как рассматриваемый аналитический метод использует раскаленный газ, чтобы в и д е т ь, то естественно возникает мысль, что его можно применить к атмосфере Солнца и к неподвижным звездам. Однако он должен быть измерен из-за света, который испускают ядра этих мировых тел. В статье «Об отношении между испускательной и поглощательной способностями тел для тепла и света» [14] один из нас с помощью теоретического рассмотрения доказал, что спектр накаленного газа о б р а щ а е т с я, т. е. светлые линии превращаются в темные, когда позади находится источник света достаточной интенсивности, который дает непрерывный спектр. Отсюда необходимо сделать вывод, что солнечный спектр с его темными линиями есть не что иное, как обращение спектра, который имеет сама по себе атмосфера Солнца. Таким образом, для химического анализа солнечной атмосферы нужно лишь разыскать те вещества, которые, будучи внесены в пламя, дают светлые линии, совпадающие с темными линиями солнечного спектра.

Здесь уместно в качестве экспериментального подтверждения упомянутого теоретически выведенного закона привести следующие выполненные нами опыты:

светлая красная линия в спектре газового пламени, в которое внесена гранула хлористого лития, превращается в черную, когда через это пламя пропускается неослабленный солнечный свет;

заменив гранулу хлористого лития на гранулу хлористого натрия, получим в солнечном спектре темную двойную линию D необыкновенной четкости (совпадающую со светлой линией натрия);

в спектре друммондова света [[14]] появляется темная двойная линия D, когда его лучи проходят через пламя водного раствора спирта, в который внесен хлористый натрий [15].

[14] Ann. Phys. 1860. Bd. 109. S. 275—301.

[15] В мартовском номере Phil. Mag. за 1860 г. Стокс напомнил, что Фуко еще в 1849 г. провел наблюдение, аналогичное вышеупомянутому. При исследовании электрической дуги между заостренными углями он заметил (Mem. l'Institut. 1849. P. 45), что в этом спектре на месте двойной линии D солнечного спектра находится светлая линия и что темная линия D становится отчетливее или появляется в спектре дуги, если через нее пропустить солнечный свет или свет одного из раскаленных заточенных углей и наложить это излучение на спектр. Упомянутое в тексте наблюдение объясняет это интересное, уже 11 лет тому назад отмеченное Фуко явление и показывает, что оно не обусловливается свойствами во многих отношениях еще столь загадочного электрического света, а вызывается одним из соединений натрия, содержащегося в угле, и которое благодаря току превратилось в раскаленный газ.

Нам представляется не лишенным интереса получить дополнительные подтверждения найденного примечательного теоретического закона. Их можно получить с помощью опытов, которые следует здесь описать. Мы взяли и раскалили толстую платиновую проволоку в пламени и электрическим током подвели ее близко к точке плавления. Проволочка излучала яркий спектр без каких-либо следов светлых или темных линий. Если же между проволочкой и щелью прибора поместить пламя весьма разбавленного водного раствора спирта, в котором растворена поваренная соль, то появляется очень четкая темная линия D.

В спектре платиновой проволочки, которая накалена в пламени, можно получить темную линию D, если перед пламенем поместить пробирку, на поверхности которой нанесено немного амальгамы натрия, нагретой до кипения. Этот опыт важен потому, что он показывает: при температуре, гораздо более низкой, чем калильный жар, пары натрия оказывают адсорбирующее действие точно в том же месте спектра, что и при более высоких температурах, которые мы можем создать, так и при тех температурах, которые имеют место в солнечной атмосфере.

Светлые линии спектров Ka, Sr, Ca, Ba можно обратить, используя солнечный свет и применяя смеси хлорнокислых солей этих металлов с молочным сахаром. Перед щелью аппарата устанавливается маленький желоб, в который помещается эта смесь; неослабленный солнечный свет проходит вдоль желоба и падает на щель, а смесь поджигается сбоку раскаленной проволочкой.

Зрительная труба, используемая для наблюдения, устанавливается так, что точка пересечения ее нитей, натянутых под углом, приходится на светлую линию спектра пламени, обращение которой должно быть доказано; наблюдатель концентрирует свое внимание на том, чтобы определить, появляется ли в момент вспышки темная линия, проходящая через точку пересечения нитей. Таким способом при хорошем перемешивании горючей смеси очень легко наблюдать обращение линий Baα, Baβ, Kaβ. Последняя из этих линий совпадает с ярчайшей, но не отмеченной Фраунгофером, темной линией в солнечном спектре; эта линия появляется в момент вспышки соли калия и оказывается значительно ярче обычной. Чтобы наблюдать описанным способом обращение светлой линии спектра стронция, следует путем просушки тщательнейшим образом очистить хлорид стронция от следов влаги; следы влаги способствуют тому, что в момент вспышки выделяющиеся частицы соли заполняют пламя, солнечные лучи ослабляются и делается наблюдаемым положительный спектр стронция.

В настоящей статье мы ограничились исследованием спектров щелочных и щелочноземельных металлов и исследовали их только настолько, насколько это необходимо для анализа веществ Земли. Мы предполагаем расширить эти исследования, что желательно в связи с анализом земных тел и анализом атмосфер небесных тел.

Гейдельберг, апрель 1860

6.
ХИМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСРЕДСТВОМ НАБЛЮДЕНИЙ СПЕКТРОВ *. II

В нашей первой статье, появившейся в 110-м томе этих трудов, мы показали, что линии спектров, полученных от раскаленных паров различных соединений металлов, можно использовать для самого надежного и самого тонкого химического анализа. Аналитический метод, основанный на наблюдении различных спектральных линий, особенно полезен при анализе таких веществ, которые встречаются в ничтожно малых количествах, а также для таких, которые по своим химическим свойствам очень близки друг к другу.

В первом случае метод является исключительно ценным способом для обнаружения веществ, во втором — для их отличия и по своей надежности далеко превосходит все, что до сих пор достижимо посредством химического анализа. Поэтому нельзя не высказать своей уверенности в том, что этот метод, столь необычным образом широко раздвинувший возможности анализа, должен быть особенно пригодным для открытия элементов, еще остающихся неизвестными, которые либо очень редко встречаются, либо так мало отличаются от других веществ, что имевшиеся до сих пор несовершенные средства не позволяли их обнаружить.

Наше предположение оправдалось уже при первых шагах, предпринятых в этом направлении, когда нам удалось, применяя указанный метод, наряду с калием, натрием и литием обнаружить еще два других новых щелочных металла, несмотря на то, что соли этих новых элементов дают точно такие же осадки, как и соли калия, а их содержание столь мало, что требуется обработать более 44 000 кг дюркхеймской минеральной воды и 150 кг лепидолита, чтобы получить несколько граммов окончательного материала, необходимого для исследования.

Если в пламя спектрального аппарата внести каплю маточного раствора минеральной воды из Дюркхейма, то обнаруживаются только характерные линии натрия, калия, лития, кальция и стронция. Если же отделить хорошо известным способом соединения кальция, стронция и магния, затем экстрагировать спиртом в нитраты щелочные металлы, а литий удалить возможно более полно углекислым аммонием, то получится маточный раствор.

В спектре он показывает линии натрия, калия и лития, а кроме них, еще две превосходные, лежащие близко друг к другу голубые линии, одна из которых почти совпадает с линией Srδ. Так как ни одно из известных к настоящему времени простых веществ не вызывает в этом месте спектра двух таких линий, то существование неизвестного до сих пор элемента, относящегося к группе щелочных металлов, можно считать доказанным.

Легкость, с которой только одна тысячная миллиграмма вещества, к тому же еще смешанного с соединениями лития, калия и натрия, смогла быть опознана в качестве нового элемента благодаря свечению его раскаленных паров голубым светом, пожалуй, позволяет оправдать наше предположение назвать этот эле-

* Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen / *G. Kirchhoff*, *R. Bunsen* // Ann. Phys. 1861. Bd. 113. S. 337—381. Статья печатается с сокращениями. Перевод Р. Б. Сегаля.

мент цезием, с символом его Cs, от слова caesius, которым древние римляне обозначали голубизну ясного неба [1].

Если обработать саксонский лепидолит одним из известных способов, при котором щелочи, отделенные от остальных составных частей, получаются в виде раствора, а затем осаждать такой раствор хлоридом платины, то получится обильный осадок, который при исследовании с помощью спектрального аппарата позволяет обнаружить только линии калия. Но если этот осадок многократно промывать кипящей водой, каждый раз исследуя его в спектральном аппарате, то на фоне постепенно убывающего по яркости сплошного калиевого спектра между линией стронция Sr δ и линией калия Ka β появляются две новые прекрасные фиолетовые линии. По мере продолжения экстракции интенсивность этих линий возрастает, а вместе с тем постепенно появляется еще целый ряд новых линий в красной, желтой и зеленой областях спектра. Ни одна из этих линий не принадлежит ни одному из известных до сих пор элементов. Из них две красные линии особенно примечательны тем, что лежат за фраунгоферовой линией A или за совпадающей с ней линией Ka α, т. е. в крайней красной области солнечного спектра. Поэтому, учитывая такую замечательную особенность темно-красных спектральных линий, мы предлагаем для нового щелочного металла название рубидий с символом Rb (rubidus), которое применялось древними римлянами для обозначения самого темного красного цвета [2].

Прежде чем подробнее рассмотреть спектры рубидия и цезия, сначала расскажем об исследованиях, выполненных одним из нас, чтобы установить химическую природу обоих новых элементов и их самых важных химических соединений.

1. ПОЛУЧЕНИЕ, АТОМНЫЙ ВЕС И РАСПРОСТРАНЕННОСТЬ СОЕДИНЕНИЙ РУБИДИЯ

Для получения чистого хлористого рубидия использовался солевой остаток, очищенный по возможности полностью от земли и лития, приготовленный из 150 кг растворенного саксонского лепидолита. Отделение нового элемента и предварительное определение его атомного веса производилось следующим образом. Солевой остаток растворялся в воде и обрабатывался приблизительно 100 г хлорида платины, однако не до полного выпадения калия. Платиновый осадок кипятился в воде 20 раз, но всякий раз только с малым количеством воды, а остаток после кипячения снова добавлялся к первоначальному растворенному солевому остатку, причем каждый раз появлялся осадок, который кипятился точно так же, как и предыдущий. В процессе кипячения окрашенные первоначально в темный желто-коричневый цвет растворы становились все светлее, так что по установившейся светлой и более уже не менявшейся окраске раствора легко можно было определить тот момент, когда кипячение можно прекратить. Если при повторении этих операций осадки растворенных солевых

---

[1] *Геллий Авл.* Аттические ночи. II. 26. Из Нигидия Фигула: «Нашими же предками голубизна, которая греками называлась γλαυχῶπις — голубоглазость, названа по цвету неба».

[2] Там же. «Более темно-красный же (rubidus) — значительно темнее ярко-красного». [Перевод с лат.]

остатков при многократном кипячении полностью растворяются, то извлечение можно считать законченным.

После того как собранный вместе прокипяченный платиновый осадок еще несколько раз обработать кипящей водой, он высушивается и восстанавливается в струе водорода, причем остается некоторое количество платины с нечистым хлористым рубидием, из которого последний извлекается водой. Этот водный раствор разбавляется, снова при кипячении с хлоридом платины дает осадок и еще раз из осадка, восстанавливаемого водородом, получают хлористый рубидий.

Полученное таким способом хлористое соединение в количестве 2,2496 г, которое мы обозначим A, дает 2,7688 г хлористого серебра.

Исследуемое количество соли A растворятся примерно в тридцатикратном количестве воды и снова при кипячении с приблизительно также разбавленным раствором хлорида платины дает осадок, причем осадок начинает появляться только через некоторое время. При охлаждении жидкости его количество быстро возрастает, и, когда температура понизится приблизительно до 40 °С, раствор фильтруют, осадок восстанавливают, из восстановленной массы получают хлористое соединение B.

0,9022 г этого количества соли дают 1,0712 г хлористого серебра.

Такое же отделение снова повторялось с солевой массой B, при этом получалась солевая масса C.

1,3540 г последней дают 1,6076 г хлористого серебра.

При последующем применении этого же метода отделения к C получается солевая масса, которую мы обозначим D.

1,9486 г этой массы D дают 2,3091 г хлористого серебра.

Поэтому количества хлористого серебра, получаемые из одной весовой части хлористого рубидия после каждого из этих отделений, равняются для A 1,2308, B — 1,1873, C — 1,1873, D — 1,1850.

Эти числа показывают, что вещество, полученное в трех последних случаях, имеет уже постоянный химический состав.

Так как в последнем продукте (D) спектральные линии цезия и лития уже почти полностью отсутствовали (табл. II), а линия Ка α была такой слабой, что в нашем менее светосильном спектральном аппарате она уже вообще больше не воспринималась, то вещество, полученное в трех последних случаях, следует рассматривать как чистый хлорид рубидия.

Чтобы получить новое доказательство чистоты выделенного указанным способом хлористого металла, был найден еще и другой метод разделения. Метод основан на том, что три щелочных металла приблизительно на одну пятую часть всей их массы превращают в углекислые соли и обезвоженную солевую массу извлекают спиртом. Если вместе с рубидием находится еще и другой щелочной металл, атомный вес которого отличается от веса рубидия, то состав спиртового раствора должен отличаться от состава остатка. Но, как уже было показано, растворенная в спирте соль, переведенная затем в хлорное соединение, имела такой же состав, как и первоначальный, не растворившийся в спирте продукт. А именно: 0,5116 г хлорного соединения дают 0,6078 г хлористого серебра, т. е. на одну часть хлористого соединения приходится 1,1830 г хлористого серебра, что довольно хорошо совпадает с составом, полученным

в приведенных выше опытах. Если учитывать только осадки, имеющие постоянный состав, и принять, согласно Стассу, атомный вес серебра 107,94, а хлора 35,46, то, полагая атомный вес водорода 1, для атомного веса рубидия получим *B* — 85,31, *C* — 85,32, *D* — 85,55, *E* — 85,24, или в среднем 85,36 [1].

Следовательно, атом нового металла еще тяжелее, чем атом калия. Если даже найденное значение не имеет той степени точности, которая присуща определениям атомного веса, то все же мы полагаем, что найденное число отличается от истинного не больше, чем это имеет место для большинства атомных весов, считающихся правильными и используемыми без всякого сомнения. Едва ли надо говорить, что остающиеся при описанном способе получения вещества остатки, обработанные так же, как и основное вещество, дают еще заметное количество хлористого рубидия.

Представляется интересным, если даже и не с большой точностью, то хотя бы приблизительно, определить количество рубидия, содержащееся в лепидолите. Для этого использовался лепидолит из Розены вблизи Градишко в Моравии, содержащий, как показал спектральный анализ, наряду с рубидием также и следы цезия. Жидкость, полученная при растворении щелочью 13,509 г лепидолита, обычным способом осаждалась в осадок хлоридом платины. Осадок, состоящий из платината калия и платината рубидия, восстановленный водородом, давал 2,0963 г хлористого калия и хлористого рубидия. Оба вторично осаждались хлоридом платины, а полученный осадок кипятился в небольших порциях воды так долго, пока растворы не становились светло-желтыми. Оставшееся вещество после кипячения и охлаждения снова осаждалось в осадок, который обрабатывался так же, как и предыдущий. Двойная соль хлористой платины, которая после сгущения жидкости осаждалась в третий раз, подвергалась такой же обработке, и эти операции повторялись до тех пор, пока осадок после кипячения не растворялся легко в небольшом количестве воды без остатка.

Собранные вместе труднорастворимые платиновые осадки после восстановления водородом давали 0,0421 г хлористого рубидия, что соответствовало 0,24 части окиси рубидия на 100 частей исследуемого лепидолита. Если этот результат сопоставить с результатом анализа, выполненного в местной лаборатории г-ном Купером, то для лепидолита из Розены получается следующий состав (в %):

Кремнезем	50,32	Оксид цезия	следы
Глинозем	28,54	Оксид лития	0,70
Оксид железа	0,73	Фторид лития	0,99
Негашеная известь	1,01	Фторид натрия	1,77
Магнезия	0,51	Фторид калия	12,06
Оксид рубидия	0,24	Вода	3,12
			99,99

Мы здесь не говорим о целом ряде спектрально-аналитических анализов маточных растворов почвенных вод, так как обратимся к ним в разделе, посвященном цезию [2]. Эти анализы показали, что в источниках, содержащих поваренную соль, имеются калий, натрий, литий, окись цезия и почти всегда

присутствуют следы соединений рубидия. Хотя рубидий всегда присутствует в ничтожном количестве, но по распространению его ни в коем случае нельзя считать очень редким элементом.

2. МЕТАЛЛИЧЕСКИЙ РУБИДИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЕГО СОЕДИНЕНИЯ

Материал, имевшийся в нашем распоряжении, в целом едва ли достигал одной унции. Поэтому нельзя было растрачивать его, восстанавливая углекислую соль при высокой температуре, и мы сразу же решили ограничиться опытом, при котором рубидий отделяется электролитически. Если через расплавленный хлористый рубидий пропустить электрический ток, идущий от графитового стержня, служащего положительным электродом, к железной проволоке, являющейся отрицательным электродом, то видно, как на поверхности этой проволоки выделяется рубидий, который горит красноватым светом.

Если железный электрод поместить внутрь стеклянного колокола, сквозь который в течение опыта пропускать сухой, лишенный кислорода водород, то горение тотчас же прекращается. Однако металл не собирается в колоколе, он исчезает в таком же количестве, как и возникает, восстанавливая при этом хлористый рубидий в субхлорид, который растворяется в хлориде, поэтому последний вблизи железного электрода приобретает голубую, как у смальты, окраску. Хотя в голубой, совершенно прозрачной массе ни простым глазом, ни под микроскопом не обнаруживается малейших следов металлического вещества, однако она разлагает воду с выделением водорода и образованием бесцветного раствора, дающего сильную щелочную реакцию. Хлористый калий при таких же условиях точно так же образует голубой субхлорид.

Повторим опыт со смесью равных количеств хлористого рубидия и хлористого кальция при значительно более низкой температуре, чем температура калильного жара, т. е. при температуре плавления этой двойной соли. Получится вещество, которое, если бросить его в воду, точно так же самым энергичным образом выделит водород. При этом на поверхность выбрасываются следы металлических шариков, которые сами собой воспламеняются. Все же и таким способом нельзя получить металл в количестве, достаточном для более точного исследования его свойств. Однако очень легко может быть получена амальгама рубидия, если в нейтральном водном концентрированном растворе хлористого рубидия в качестве отрицательного электрода взять ртуть, а положительного — платиновую проволоку.

Ртуть вследствие нагревания превращается в амальгаму рубидия, которая после охлаждения образует твердую, белую, как серебро, хрупкую кристаллическую массу. Эта амальгама разлагает воду при обычной температуре, отбирает кислород из воздуха, покрываясь при нагревании слоем гидрооксида рубидия. Если образовать электрическую цепь, включив между амальгамой рубидия и амальгамой калия хлористый рубидий или хлористый калий, то оказывается, что амальгама рубидия является электроположительной по отношению к амальгаме калия. Отсюда видно, что калий не является самым электроположительным элементом; в приведенных условиях он электроотрицателен по отношению к рубидию ⟨. . .⟩[3]

[3] Русский перевод статьи печатается с сокращениями. — *Примеч. ред.*

5. РЕАКЦИИ СОЕДИНЕНИЙ РУБИДИЯ И ЦЕЗИЯ

Цезий и рубидий не осаждаются ни сероводородом, ни углекислым аммонием. Поэтому оба металла относятся к той же группе, что и магний, литий, натрий и калий. От магния, лития, натрия они отличаются своим поведением по отношению к хлориду платины, которым они осаждаются так же, как и калий. Оксид рубидия и оксид цезия не отличаются от оксида калия при воздействии реагентов, выявляющих основания. Все три оксида дают одинаковые осадки: при воздействии винной кислоты — кристаллические, кремнефтористоводородной кислоты — в виде опалесцирующего прозрачного порошка, хлорной кислоты — в виде кристаллических зерен; все три, если только они не связаны жаростойкими кислотами, полностью испаряются на платиновой проволоке и окрашивают пламя в фиолетовый цвет. Хотя этот фиолетовый цвет для калия кажется более голубоватым, для рубидия более красноватым, а для цезия еще краснее, однако эти небольшие различия можно обнаружить лишь тогда, когда три пламени наблюдаются рядом друг с другом, а испаряемые соли совершенно чистые.

Следовательно, по своему отношению к реагентам оба новых элемента не отличаются от калия. Единственным средством, с помощью которого их можно обнаружить, является спектральный анализ.

Спектры рубидия и цезия в высшей степени характерны и отличаются большой красотой. При их исследованиях и измерениях мы пользовались усовершенствованным аппаратом, который по всем характеристикам имел значительные преимущества по сравнению с прибором, описанным в нашей первой статье. Кроме того что этот аппарат был более удобным в работе и давал более яркие и четкие изображения, он позволял еще сравнивать друг с другом спектры двух источников света по их резкости, причем одновременно со спектрами видна была хорошо обозримая шкала с цифрами.

Прибор изображен на рис. 1 [3]. На верхнем конце чугунной подставки *F* привинчена латунная пластина, несущая на себе призму *P* из флинтгласа с преломляющим углом в 60° и трубу *A*. Эта труба имеет на конце, обращенном к призме, собирающую линзу, а на противоположном конце закрыта пластиной с вертикальной щелью. На подставке закреплены два кронштейна таким образом, что они могут поворачиваться вокруг оси подставки *F*. На одном из них находится подзорная труба *B* с восьмикратным увеличением, на другом — труба *C*, на одном конце которой, обращенном к призме, закреплена собирающая линза, а на другом — шкала, видимая наблюдателю, смотрящему в подзорную трубу, благодаря ее отражению от передней грани призмы. Эта шкала получена как фотографическое изображение миллиметровой шкалы, изготовленной на стеклянной пластине, в масштабе приблизительно 1/15 [4]. Шкала закрывалась станиолем таким образом, что видимой оставалась только узкая полоска, на которой находились штрихи и числа.

[4] Эта миллиметровая шкала чертилась на стеклянной полоске, покрытой тонким слоем сажи и растворенного в глицерине воска. Штрихи и числа, которые в проходящем свете выглядели светлыми на темном фоне, на фотографии становились темными на светлом фоне. Еще лучше была бы для спектрального аппарата шкала, в которой светлые штрихи видны на темном фоне. Такая шкала, обладающая редким совершенством, была изготовлена в Париже Саллероном и Ферье.

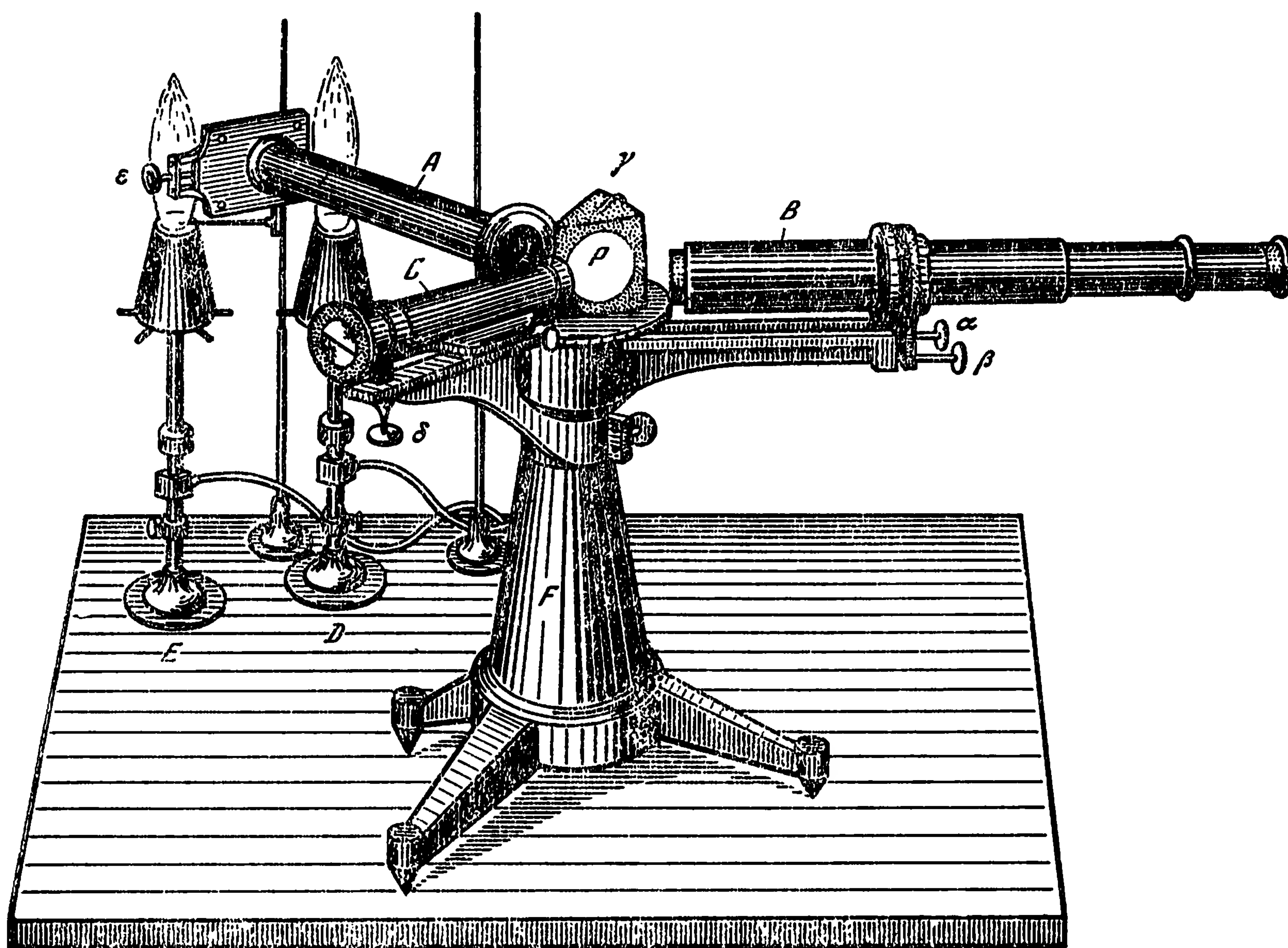


Рис. 1

Щель прибора в увеличенном масштабе представлена на рис. 2. Только верхняя ее половина открыта, а перед нижней находится маленькая равносторонняя стеклянная призма. Благодаря полному внутреннему отражению призмы сквозь нижнюю половину щели проходят лучи от источника D, тогда как лучи от источника E свободно проходят сквозь ее верхнюю половину. Небольшой экран S над призмой прикрывает верхнюю половину щели от попадания в нее лучей от источника D. Это приспособление позволяет наблюдателю видеть спектры обоих источников света непосредственно один над другим и тем самым легко судить о совпадении или несовпадении их линий [5].

Опишем сборку прибора и методику работы на нем.

Окулярную трубу B, находящуюся вне прибора, выдвигают так, чтобы очень удаленный предмет был отчетливо виден. После этого ее ввинчивают в предназначенное для нее кольцо прибора, для чего необходимо предварительно ослабить винты α и β. После этого устанавливают трубу A, ось ее приблизительно совпадает с осью трубы B, а щель ее раскрыта настолько широко, чтобы ее было отчетливо видно через окулярную трубу. Затем посредством двух винтов щель закрепляют так, чтобы ее середина оказалась приблизительно в середине поля зрения. После этого на измерительном столе, на указанном для нее месте, устанавливают призму и фиксируют ее в нужном положении пружиной γ.

Если теперь ось трубы A направить на светящуюся поверхность, например на пламя свечи, то ее спектр мы увидим в нижней половине окулярной трубы B, повернув ее на соответствующий угол вокруг оси основания F. После того как окулярная труба займет это положение, укрепляют трубу C на предназначенном

[5] Прибор изготовлен на известном оптическом и астрономическом предприятии К. А. Штейнхейля в Мюнхене.

для нее рычаге. Повернув трубу C на подходящий угол вокруг оси основания F и осветив укрепленную на ней шкалу, увидим в окулярной трубе B зеркальное изображение этой шкалы, полученное при отражении от передней грани призмы P. Это изображение надо сделать совершенно отчетливым, вдвигая или выдвигая шкалу в направлении оси трубы C. Поворачивая же ее вокруг оси трубы C, устанавливают конечную линию штрихов параллельно граничной линии спектра, а с помощью винта δ приводят обе эти линии к совпадению.

Чтобы правильно установить оба источника света D и E, можно воспользоваться двумя методами. В основе одного лежат светлые линии, появляющиеся в спектре внутренней части несветящегося газового пламени, так тщательно исследованные Сваном. Если лампу E передвигать перед щелью, то можно легко найти место, когда эти линии становятся видимыми; отсюда лампа медленно сдвигается влево до тех пор, пока эти линии совсем или почти совсем не исчезнут. В этом случае перед щелью находится правая граница пламени, и сюда надо вносить бусинку исследуемой соли. Таким же образом устанавливается и источник света D.

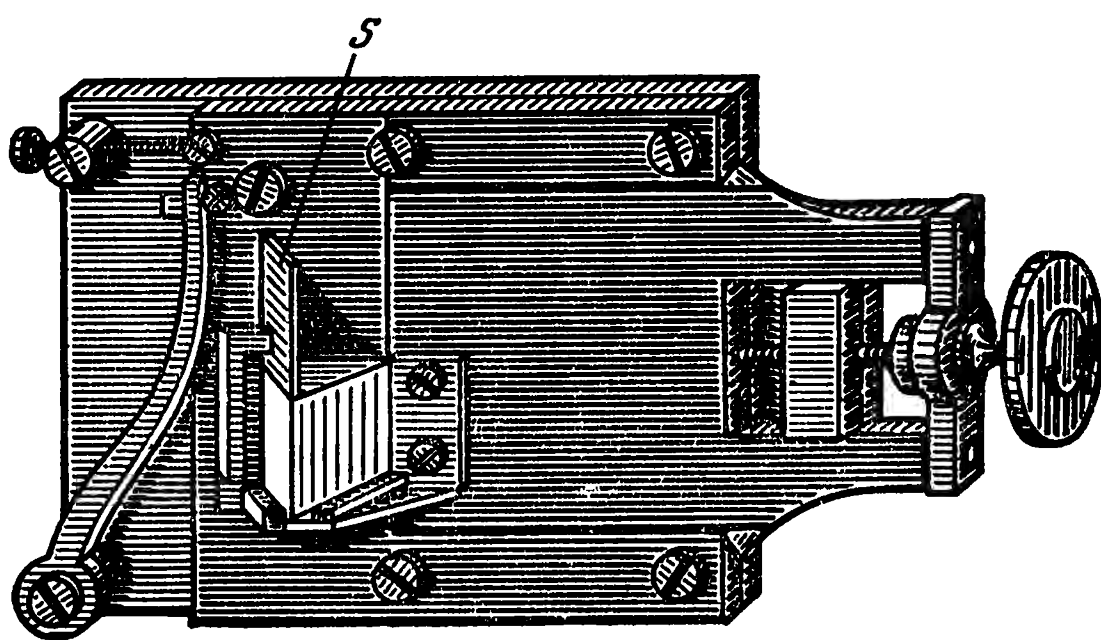


Рис. 2

Другой метод следующий. Окулярную трубу B устанавливают так, что самая светлая часть спектра пламени свечи находится приблизительно посредине поля зрения. Затем перемещают пламя свечи перед окуляром в направлении оси и ищут перед щелью такое положение для глаза, при котором верхняя половина щели освещена наиболее ярко. После этого лампу E устанавливают так, что щель оказывается сзади той части пламени, из которой исходит наибольшее количество света при внесении туда бусинки. Таким же образом находят положение лампы D, визируя при этом через маленькую призму нижнюю половину щели.

Винт ε служит для того, чтобы установить ширину щели, соответствующую силе света источника и той точности, с которой спектр исследуется.

Посторонний свет не попадает в окулярную трубу благодаря черному покрывалу, надеваемому через крестообразное отверстие на трубу C и закрывающему призму P и трубы A и B.

Освещать шкалу целесообразнее всего посредством светящегося пламени, устанавливаемого перед ней. При необходимости яркость пламени ослабляется кусочком папиросной бумаги, помещаемым непосредственно перед шкалой. При этом, отодвигая пламя, легко получить такую освещенность шкалы, которая соответствует силе света наблюдаемого спектра.

Чтобы получать изображения спектров цезия и рубидия, согласующиеся со спектрами других металлов, данные о которых опубликованы в нашей предыдущей статье, мы поступали следующим образом.

Трубу C мы устанавливали так, чтобы определенный штрих шкалы, обозна-

ченный числом 100, совпадал с фраунгоферовой линией D солнечного спектра, и наблюдали положение на шкале фраунгоферовых линий A, B, C, D, E, F, G, H. Найденные по шкале отсчеты назовем A, B, C, . . . После этого посредством интерполяции вычислялась и вычерчивалась шкала, штрихи которой соответствуют штрихам шкалы прибора и у которой отсчеты, соответствующие точкам A, B, C. . ., находятся друг от друга на таком же расстоянии, как и одноименные линии нашего первого изображения спектров. С помощью этой шкалы для новых спектров рисовались кривые, ординаты которых пропорциональны силе света в различных точках шкалы. На основе этих кривых получены изображения спектров, представленные на табл. II [6]. На нем, как и в предыдущей статье, указаны только те линии, которые наиболее характерны в смысле своего положения, резкости и интенсивности. Считаем необходимым это обстоятельство здесь снова повторить и даже подчеркнуть, потому что возникало много соблазнов сделать заключение о существовании новых веществ по линиям, не обозначенным в наших спектрах.

Под солнечным спектром мы снова приводим для сравнения спектр калия, так как замечательное сходство новых щелочных металлов с калием несомненно выражается также и в их спектрах. Все три спектра имеют в средней своей части сплошную полосу, яркость которой в обе стороны постепенно уменьшается, причем у калия она наибольшая, у рубидия — средняя, а у цезия — наименьшая. Точно так же у всех трех элементов самые интенсивные и наиболее характерные линии выступают на границах красного и синего спектров.

Из линий рубидия особенно интересны две великолепные линии Rb α и Rb β, имеющие чрезвычайно большую интенсивность и поэтому наиболее подходящие в качестве признака для обнаружения металла. Менее интенсивны, но все же еще очень характерны линии Rb δ и Rb γ. По своему расположению они в высшей степени замечательны, так как обе лежат за фраунгоферовой линией A, а одна из них находится уже в той части солнечного спектра, которая видима глазу только с помощью специальных методов. Другие линии, приходящиеся на сплошную часть спектра, менее пригодны в качестве опознавательного признака, и появляются они только тогда, когда вещество очень чистое, а сила света велика. Нитрат рубидия, хлорид рубидия, хлорат и перхлотрат рубидия вследствие их большой летучести дают самые интенсивные линии. Также и сульфат рубидия и подобные соли дают прекрасный спектр. Даже у кремниевокислых и фосфорнокислых солей спектр обнаруживается во всех своих частях самым отчетливым образом.

Для спектра цезия особенно характерны две голубые линии Cs α и Cs β, находящиеся вблизи линии стронция Sr δ и примечательные чрезвычайной интенсивностью и резкостью контура. Наряду с ними можно упомянуть также менее используемую линию Csγ. Приведенные в таблице желтая и зеленая линии, появляющиеся только при большой интенсивности света, для обнаружения ма-

[6] Совпадение этого изображения с нашим предыдущим изображением спектров неполное и не может быть полным, ибо мы убедились, что различные фотокопии могут существенно отличаться. Но это не мешает ими пользоваться. Пусть с помощью шкалы, описанной в тексте, найдена на нем какая-то линия, положение которой почти совпадает с положением наблюдаемой линии. Можно легко и надежно установить их идентичность, поместив одновременно вещества, их вызывающие, в оба пламени перед щелью.

лых количеств соединений цезия непригодны; но их целесообразно использовать для определения чистоты таких соединений. Они ярче и острее, чем желтая и зеленая линии калиевого спектра, которые мы по этой причине вовсе не приводим в таблице. В отношении *отчетливости* реакции различные соединения цезия ведут себя совершенно аналогично соответствующим соединениям рубидия: хлориды, фосфаты и силикаты соли дают еще вполне отчетливые линии. *Чувствительность* реакций у солей цезия несколько больше, чем у соответствующих соединений рубидия: водяная капля весом в 4 миллиграмма, содержащая только 0,0002 миллиграмма хлористого рубидия, позволяет еще отчетливо увидеть линии Rb α и Rb β. В то же время 0,00005 миллиграмма хлористого цезия уже легко обнаруживаются при тех же условиях по линиям Cs α и Cs β.

Если с соединениями цезия и рубидия смешаны элементы щелочной группы, то чувствительность, естественно, значительно убывает, как видно из следующих опытов. В пламя вносилась смесь хлористых соединений в капле воды весом примерно в 4 миллиграмма, находящейся на ушке из платиновой проволоки.

Хлорид цезия обнаруживался уже в количестве 0,003 миллиграмма, если он был смешан с 300- или 400-кратным количеством хлорида калия или хлорида рубидия. 0,003 миллиграмма хлорида рубидия можно было обнаружить с трудом, и только если добавленное к нему количество хлорида калия или хлорида натрия не превышало 100- или 150-кратное его количество.

0,001 миллиграмма хлорида цезия еще отчетливо определялась, если он смешивался с 1500-кратным количеством хлорида лития. Однако 0,001 миллиграмма хлорида рубидия нельзя было обнаружить, когда количество добавленного к нему хлорида лития превышало его вес более чем в 600 раз.

В заключение этой статьи мы не можем не затронуть вопрос, к которому нам впоследствии придется вернуться снова. Среди большого числа всех изученных нами до сих пор солей, допускающих спектрально-аналитическое исследование благодаря своей летучести в пламени, нам не встретилась ни одна, которая не давала бы характеристических линий металлов, несмотря на самое большое различие элементов, связывающих металл. Наоборот, столь многочисленные наблюдения, выполненные при самых разнообразных условиях, могли бы легко привести нас к предположению, что во всех случаях спектральные линии вещества появляются совершенно независимо от других элементов, с которыми это вещество химически связано, а, следовательно, поведение элемента в отношении спектра его паров в химически связанном или в химически несвязанном состоянии всегда одно и то же. И все же это предположение никак не оправдано. Мы многократно подчеркивали, что светлые линии спектра раскаленного газа должны совпадать с линиями поглощения, которые этот газ вызывает в сплошном спектре достаточно большой яркости. Известно, что линии поглощения пара иода не вызываются иодистоводородной кислотой и что, с другой стороны, линии поглощения азотной кислоты не появляются вновь при механической смеси азота и кислорода. Ничто не отрицает возможности влияния химической связи на линии поглощения, подобного тому, которое проявляется

в этих примерах при более низкой температуре. Оно могло бы иметь место и при температуре калильного жара. Но если химическая связь в раскаленном газе изменяет линии поглощения, то она должна изменять также и светлые линии его спектра.

Из этого соображения, по-видимому, следует, что если у некоторых соединений возникают спектральные линии элемента, то у других соединений вместо них появятся новые линии. Но все же возможно, что используемые нами летучие соли не сохраняли свой состав при температуре пламени, а распадались, так что всегда получались пары свободных металлов, которые вызывали одни и те же линии. И точно так же можно себе представить, что химическое соединение всегда будет показывать иные линии, чем элементы, из которых оно состоит.

Гейдельберг, июнь 1861

7.
СОЛНЕЧНЫЙ СПЕКТР *

Если пропустить через призму как можно более чистый солнечный спектр и наблюдать его в трубу с малым увеличением, то между линиями, которые Фраунгофер обозначил буквами, можно различить множество тонких линий и туманных полос. При более сильном увеличении и большем числе призм, если оптический прибор достаточно совершенен, в этих полосах удается рассмотреть все новые и новые группы линий, легко различимые и распознаваемые, — группы линий, сравнимые с созвездиями, позволяющими с легкостью отыскивать отдельные звезды.

Лишь немногие из этих групп линий различимы на опубликованном Фраунгофером изображении солнечного спектра [1]. То же в значительной мере относится и к изображению солнечного спектра, опубликованному недавно Брюстером и Гладстоном [2] [[1]]. Я попытался воспроизвести с возможной полнотой и точностью группы линий для самой светлой части солнечного спектра. Таблицы I и II — литографические копии с выполненного мной чертежа [3]**.

Замечательный прибор, которым я пользовался при наблюдении солнечного спектра, изготовлен в оптических и астрономических мастерских К. А. Штейнхейля в Мюнхене и изображен на рис. 1.

---

* Das Sonnenspectrum // Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Berlin: F. Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 1862. S. 1—21. Перевод Ю. А. Данилова.

** Таблицы I и II, а также Приложения к ним в настоящем издании не приводятся. (Фрагмент табл. I и II, см. между с. 88—89). — *Примеч. ред.*

[1] *Fraunhofer J.* // Denkschriften Akad. Wiss. München (1814—1815). 1817. Bd. V. S. 193—226.

[2] *Brewster D., Gladstone J. H.* // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1860. P. 149—160.

[3] Мой чертеж охватывает отрезок солнечного спектра от *A* до *Gc*. Я вынужден ограничиться публикацией лишь этой части спектра, так как остальное требует проверки, которую я не смогу произвести в ближайшее время, ибо глаза мои чрезмерно утомлены продолжительными наблюдениями солнечного спектра.

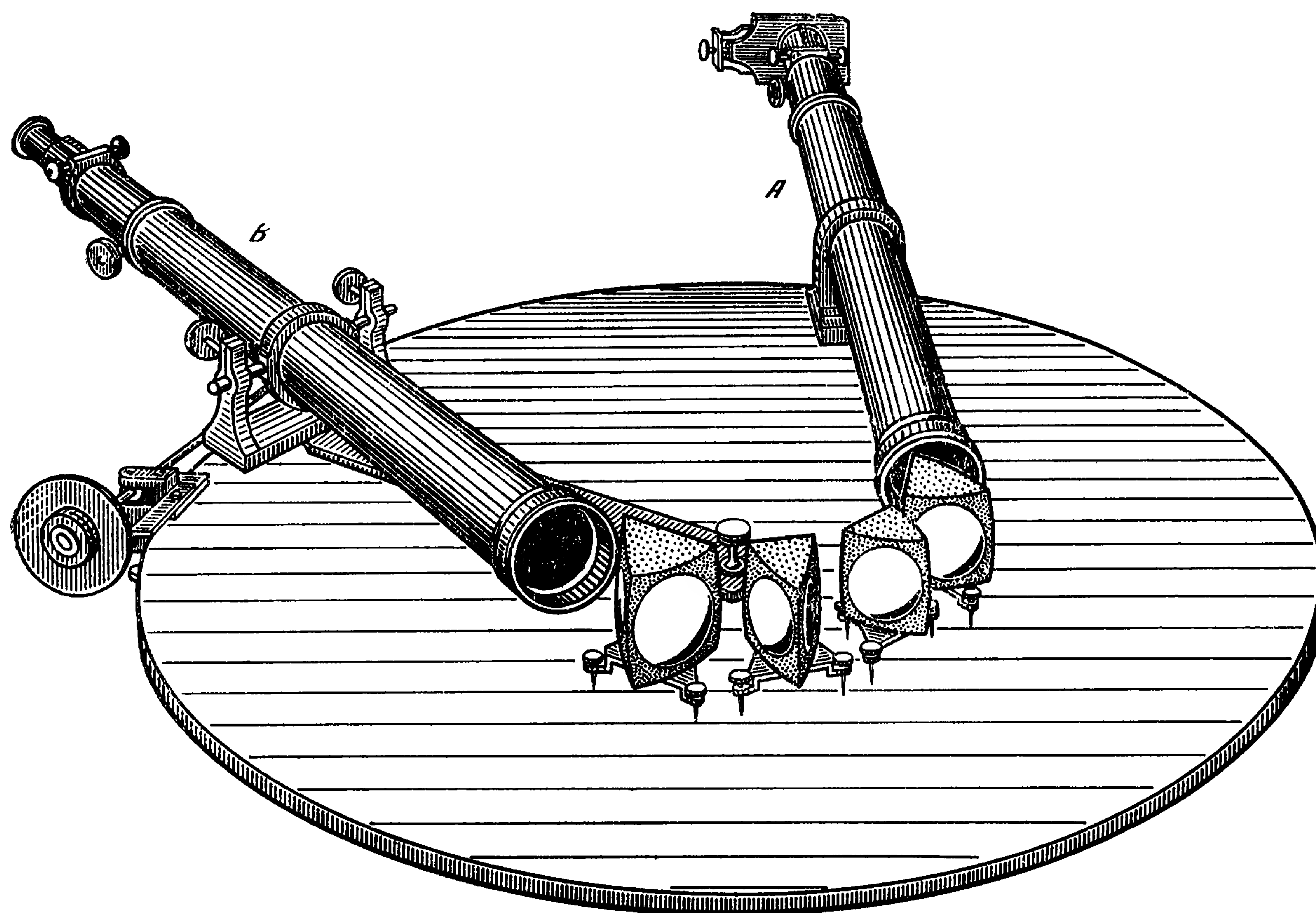


Рис. 1

На круглой железной пластине, верхняя поверхность которой может поворачиваться в своей плоскости, установлена труба A, окуляр ее заменен металлическим затвором с щелью, ограниченной двумя лезвиями. Ширина щели регулируется микрометрическим винтом, чтобы совместить прорезь с фокусом ахроматического объектива с фокусным расстоянием 18 дюймов и апертурой 18 линий [2]. Труба B, снабженная таким же объективом, укреплена на медной рукояти, поворачивающейся вокруг центра железной пластины и приводимой в движение либо непосредственно рукой, либо с помощью микрометрического винта.

Между двумя объективами установлены четыре призмы из флинтгласа с диаметром окружности преломляющей поверхности 18 линий, тремя углами по 45° и четвертым углом 60°. Каждая из призм установлена на медном столике, ножками которого служат три винта. Труба B может двигаться относительно медной рукояти, на которой она установлена, двояким образом: поворачиваться вокруг горизонтальной оси и перемещаться поступательно в направлении оси, как видно из рисунка. Труба, которой я пользовался в своих измерениях, давала примерно 40-кратное увеличение.

При юстировке прибора я придерживался следующей методики. Труба B наводилась на какой-нибудь очень удаленный предмет. На тот же предмет наводилась труба A, причем щель ее сдвигалась до тех пор, пока предмет не становился отчетливо видимым. В результате две трубы оказывались в таком положении, что их оси пересекались почти под прямым углом. В окрестности точки пересечения осей устанавливалась плоскопараллельная стеклянная

пластинка, так же, как и каждая из четырех призм, прикрепленная к медному столику.

Винты, на которые опирался столик с призмой, установлены так, а труба B наклонена под таким углом, что, поворачивая пластинку к трубе B то одной, то другой стороной, можно было совместить зеркальное отражение середины щели с перекрестием нитей трубы B. Стеклянная пластинка, плоскости которой установлены перпендикулярно поверхности железной пластины, заменялась одной из призм.

Винты столика, служащего подставкой для призмы, регулировались до тех пор, пока зеркальное отражение середины щели не совмещалось с перекрестием нитей трубы B (в качестве зеркал служили преломляющие поверхности призмы). Если преломляющее ребро призмы было установлено перпендикулярно поверхности железной пластины, то аналогичные операции производились и над другими призмами. Затем я ставил на место гелиостат с часовым механизмом, предназначенный для отражения в прибор солнечных лучей, и ориентировал железную пластину так, чтобы солнечные лучи, прошедшие через щель, осветили среднюю часть линзы объектива трубы A, после чего я устанавливал призмы и трубу B, следя за тем, чтобы в последнюю был виден спектр. Призмы можно было поворачивать так, чтобы лучи, подлежащие наблюдению, претерпевали почти минимальное отклонение, и сдвигать так, чтобы лучи, прошедшие через центр объектива трубы A, проходили вблизи средней части призм.

Наконец, трубу B можно было перемещать параллельно самой себе с таким расчетом, чтобы подлежащие наблюдению лучи, которые прошли через центр объектива трубы A, попали в центр объектива трубы B. Это условие, весьма существенное для отчетливости спектра, удавалось соблюсти с помощью двух крышек, в каждой из которых была прорезана узкая вертикальная щель, находившаяся перед двумя объективами.

Если установка трубы B была неверной, то все поле зрения становилось темным. При соответствующем сдвиге трубы появлялась полоса света, которую можно было переместить в центр поля зрения. Если затем снять крышки с объективов, надлежащим образом сузить щель и слегка подрегулировать окуляр трубы B, то спектр становился виден с такой отчетливостью, с какой, по моему глубокому убеждению, его не наблюдал еще никто.

Для измерения расстояний между отдельными линиями я использовал деления круга, нанесенные на головку микрометрического винта, с помощью которого можно было поворачивать зрительную трубу B. Окуляр устанавливался при этом так, чтобы крест нитей пересекали темные линии под углом 45°. Точку пересечения нитей я с помощью микрометрического винта совмещал с каждой из этих линий, считывая соответствующее деление и записывая наряду с отсчетом оценку интенсивности и ширины линии. По этим записям линии были нанесены на изображение спектра.

При построении изображения я пользовался своего рода делительной машиной, состоявшей из горизонтальной шкалы катетометра, на ползунке которого я укрепил чертежное устройство, как в обычной делительной машине. Но вместо резца я взял рейсфедер, винт которого имел круг с нанесенными по краю делениями, соответствовавшими различной ширине изображаемых линий. Все линии классифицировались по интенсивности. Самые темные линии на-

носились самой густой тушью, затем я разводил тушь и наносил линии следующего порядка и так далее вплоть до самых светлых линий.

Построив изображение участка спектра, я сравнивал его с реальным спектром. Обнаруженные ошибки в ширине, интенсивности или в положении линий я устранял, производя уточненные оценки, и рисовал спектр заново. Сравнение и новый рисунок выполнялись каждый раз до тех пор, пока не достигалось удовлетворительное согласие всех групп линий с наблюдаемыми.

Над рисунком спектра я поместил шкалу с миллиметровыми делениями и произвольно выбранным началом отсчета. Эта шкала служила главным образом для удобства обозначения каждой из нарисованных линий — по отметкам шкалы, соответствовавших линиям. Например, две линии, обозначенные Фраунгофером буквой D, я обозначил 1002,8 и 1006,8. Фраунгоферова линия E состоит из двух линий 1522,7 и 1523,7. Буквой b Фраунгофер обозначил три линии: 1633,4, 1648,3 и 1655,0 [4]. Шкала позволяет также указывать с большей точностью и те места спектра, в которых нет темных линий. Между отсчетами шкалы, соответствующими отдельным линиям, и показателями преломления моих призм никакой связи нет хотя бы потому, что призмы более или менее точно установлены в минимуме отклонения лучей.

Брюстер сделал [4] важное открытие, обнаружив, что, когда Солнце приближается к горизонту, в солнечном спектре появляются новые темные линии, происхождение которых, несомненно, связано с атмосферой. С помощью своего прибора я часто отчетливо наблюдал удивительно красивые группы таких линий вблизи линий D. Тем не менее я не стал изображать их на рисунке спектра, так как он соответствует солнечному спектру в момент, когда Солнце стоит высоко над горизонтом.

Но и при большой высоте Солнца над горизонтом я наблюдал в самых различных частях спектра следы линий и туманные полосы, которые не пытался передать на своем рисунке. Не сомневаюсь, что при большем числе призм во многих из этих полос удалось бы различить отчетливые группы линий. Работа моего прибора позволяет утверждать, что оптическое искусство в настоящее время достигло таких успехов, которые позволяют удвоить или утроить число призм по сравнению с тем, сколько их до сих пор было, без ущерба для четкости линий. Отклонение лучей превышало бы тогда 180°. Устройство прибора не мешало бы производить наблюдения и в этом случае, если призмы устанавливать на линии, образующие «хвосты».

Разрешение этих туманных хвостов представляется мне столь же интересным, как разрешение туманных пятен на звездном небе, а более точное исследование солнечного спектра — не менее важным, чем изучение звездного неба.

---

[4] Таблицы I и II напечатаны в шести красках с шести различных литографских камней [3]. Технические трудности не позволили при этом сохранить тождество различных оттисков между собой и с оригинальным рисунком. Чтобы помочь читателю уловить ошибки (хотя и малые), возникшие при литографировании и печати, я привожу в приложении перечень отсчетов шкалы, соответствовавших на исходном рисунке серединам отдельных линий. Для удобства читателя я привожу также оценки интенсивности и ширины линий. Интенсивность оценивалась числами от 1 до 6; 1 соответствовала самым светлым, 6 — самым темным линиям, ширина линий обозначалась буквами a, b, c, d, e, f, g, причем a — самая узкая, g — самая широкая линия.

СПЕКТРЫ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Цвета, в которые соли определенных металлов окрашивают пламя паяльной трубки, уже давно служили признаками, по которым химики открывали присутствие этих металлов. Так, желтую окраску вызывают соли натрия, фиолетовую — соли калия, красную — соли лития и стронция, зеленую — соли бария. Однако указанный способ открытия металлов становится мало пригодным, если несколько металлов присутствуют одновременно: вызываемые ими окраски маскируют одна другую. Картмелл [5] по предложению Бунзена показал, что во многих случаях этот недостаток удается устранить, если рассматривать пламя сквозь окрашенные стекла или жидкости.

Еще раньше Бунзен усовершенствовал метод, заменив пламя паяльной трубки пламенем горелки, носящей его имя. Возникла мысль применить вместо цветных стекол и жидкостей призму и с ее помощью разложить смешанные цвета пламени, тем более что призма уже неоднократно применялась в исследовании спектров пламен.

Фраунгофер обнаружил светлые линии в спектре пламени свечи. Брюстер и Миллер обнаружили другие светлые линии в спектрах пламен некоторых солей. Сван [6, 7] тщательнейшим образом измерил положения светлых линий в спектре внутреннего конуса пламени бунзеновской газовой горелки и обнаружил те же линии в спектрах пламен многих других углеводородных соединений.

Миллер проводил свои опыты следующим образом. Исследуемую соль он растворял в спирте и анализировал пламя спирта с помощью призмы. Изображения полученных им спектров приведены в его отчете [8, 9]. Бунзен и я в нашей совместной работе [10] заменили спиртовое пламя Миллера пламенем бунзеновской газовой горелки менее ярким и обладающим более высокой температурой. В наружный слой этого пламени мы вводили с помощью тонкой платиновой проволочки различные соли, в том числе и те, которые исследовал Миллер, и наблюдали спектр светящихся паров, поднимавшихся над капелькой соли. Представившиеся нам при этом явления существенно отличались от тех, которые наблюдал Миллер.

Они принадлежат к числу оптических явлений с наибольшей яркостью, какую только можно вызвать, и по сравнению с явлениями, описанными Миллером, отличаются большой простотой, позволившей без труда наблюдать их характерные особенности. Причина этого заключалась в том, что мы наблюдали только спектр взятой нами соли, но зато с большой яркостью, в то время как в опытах Миллера собственный спектр большей частью был скрыт светом горевшего спирта.

Легко и вне всяких сомнений мы убедились, что самые различные соли одного и того же металла, если они летучи, порождают в спектре одни и те же светлые линии, отличающиеся лишь различной интенсивностью, и что смесь

---

[5] *Cartmell R.* // Phil. Mag. 1858. Nov.
[6] *Swan W.* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1857. Vol. 21. P. 411—429.
[7] *Swan W.* // Ann. Phys. 1857. Bd. 100.
[8] *Miller W. A.* // Phil. Mag. 1845. Aug. P. 81—91.
[9] *Miller W. A.* // Ann. Phys. 1846. Bd. 69.
[10] *Bunsen R., Kirchhoff G.* // Ann. Phys. 1860. Bd. 110. S. 161—169. [См. статью 5 настоящего издания. — *Примеч. ред.*]

солей различных металлов дает спектр, который возник бы при наложении спектров, соответствующих отдельным металлам. Это позволило нам создать на основе светлых спектральных линий метод качественного химического анализа, плодотворность которого подтверждается рядом достигнутых успехов.

После того как мы научились распознавать с помощью пламени бунзеновской горелки спектральные линии, соответствующие отдельному металлу, нам удалось научиться открывать их и в спектрах других, менее подходящих для создания спектров пламен, когда в них вносили какую-нибудь летучую соль исследуемого металла, а также в спектре электрической искры, когда электроды были изготовлены из этого металла или покрыты раствором соответствующей соли.

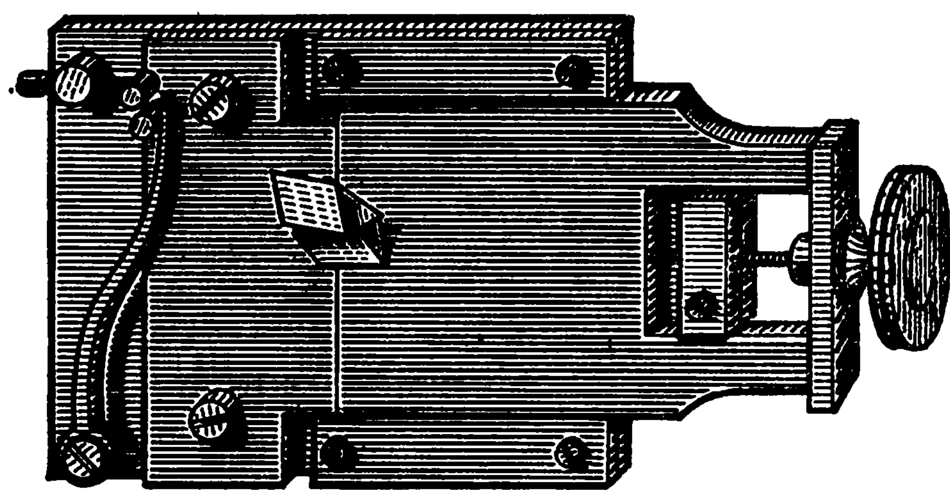


Рис. 2

Для более точного определения спектральных линий отдельного элемента неоценимым вспомогательным средством служат темные линии солнечного спектра. Чтобы воспользоваться ими, я укрепил перед верхней половиной щели описанного выше прибора две небольшие прямоугольные призмы из стекла. Я расположил их так, что, когда солнечные лучи проходили прямо сквозь нижнюю половину щели, через верхнюю половину к большим призмам могли проходить после двукратного полного отражения лучи от установленного сбоку искусственного источника света. Малые призмы расположены друг относительно друга так, что их гипотенузные поверхности параллельны и после поворота на угол около 15° вокруг оси, перпендикулярной плоскости их соприкосновения, склеены терпентином. В таком положении они закреплены перед щелью, как это показано на рис. 2.

Благодаря этому, когда в верхней половине поля зрения (астрономической) трубы находился солнечный спектр, в нижней половине непосредственно под ним можно было наблюдать спектр искусственного источника света и с высокой надежностью судить об относительном расположении светлых линий спектра искусственного источника света и темных линий солнечного света.

Для получения спектров металлов я почти исключительно пользовался электрическими искрами, поскольку они позволяют достичь наибольшей яркости.

Спектр электрических искр впервые исследовал Фраунгофер, заметивший в нем много светлых линий. Уитстон открыл, что искровые спектры различаются в зависимости от природы электродов. Массон обнаружил то же самое для многих металлов. Ангстрем открыл, что светлые линии, составляющие искровой спектр, распадаются на два класса, один из которых обусловлен природой газа, в котором образуется искра, а другой — металлами, между которыми она проскакивает.

Ван дер Виллиген [5] сильно упростил эксперименты над спектром электрической искры, заменив электрическую машину, применявшуюся названными выше физиками, индукционным аппаратом Румкорфа. Ему удалось впервые

наблюдать появление новых линий в спектре искры, добавлявшихся к прежним, когда электроды покрывались растворами каких-нибудь солей.

Плюккер [6] исследовал спектры электрического света в трубках Гейсслера с многими различными наполнителями и измерил положения светлых линий в этих спектрах. Фуко экспериментировал над спектрами электрической дуги между остриями из угля и различных по своей природе металлов и отметил большую яркость многих из возникавших линий.

В своих опытах я создавал электрические искры по методу Ван дер Виллигена. Источником искр служил индукционный аппарат Румкорфа, который при возбуждении от достаточно мощной цепи позволял получать искры длиной до 0,3 м. Цепь, которую я использовал, состояла из 3—4 цинково-угольных элементов с очень большой поверхностью, какие обычно использовал в своих наиболее крупных индукционных аппаратах Румкорф. Концы индукционного провода были соединены с обкладками лейденской банки, каждая из которых была величиной около 0,2 м^2. От обкладок широкие медные шины вели к электродам, между которыми должны были проскакивать искры.

Зазор между электродами я выбрал около 3 мм. Электроды во многих случаях состояли из проволочек диаметром от 1 до 2 мм. Часто это были куски металла неправильной формы, припаянные к медным проволочкам. Исследуемый металл брался не в чистом виде, а в виде хлоридов, нанесенных на электроды из другого металла с уже известным спектром.

Свет от электрической искры после двукратного полного отражения в укрепленных перед щелью малых призмах должен был проходить в направлении оси трубы *A*. Чтобы найти необходимое для этого расположение электродов, я помещал перед окуляром трубы *B* в направлении ее оси пламя. Если мой глаз занимал подходящее положение перед щелью, то я видел через малые призмы половину щели, окрашенную в тот цвет, на который была направлена труба. Я стремился найти такую точку наблюдения, с которой половина щели казалась наиболее светлой, и передвигал электроды так, чтобы щель совпадала с линией, соединяющей электроды.

Ширину щели при сравнении спектров электрической искры с солнечным спектром я в большинстве случаев выбирал такой же, как при наблюдении одного солнечного спектра в отдельности. Поэтому, несмотря на слепящий блеск электрической искры, большинство светлых линий в ее спектре имели малую интенсивность. Для наблюдения их я ослаблял солнечный спектр, пропуская его до того, как он попадал на щель, через цветное стекло.

Результаты моих наблюдений представлены на таблицах I и II. Чтобы хоть каким-то образом указать различия в интенсивности отдельных светлых линий, я изобразил их штрихами трех различных толщин. Большинство светлых линий значительно ярче, чем они были бы, если бы их свет был однородным в строгом смысле слова. Выполняя рисунок спектра, я учитывал это обстоятельство лишь в тех особенно бросающихся в глаза случаях, когда линии выглядели как широкие полосы. Примером могут служить широкие зеленые полосы, встречающиеся в спектре цинка, одна из которых заключена в пределах от 1996 до 2000, а другая — от 2014 до 2018. Горизонтальная линия, соединяющая нижние концы вертикальных штрихов, изображающих эти светлые полосы,

означает скобки. Под ней следовало бы поставить символ химического элемента Zn, отнеся его к обеим полосам.

Светлые линии, связанные с атмосферным воздухом, в котором проскакивала искра, при малом зазоре между остриями [11] и узкой щели были плохо заметны. Я выбрал из них только одну группу в желтой и одну группу в зеленой части спектра, хотя мог различить и многие другие линии. Изображение не претендует на полноту и в случае линий спектров металлов. Я пытался воспроизвести только наиболее яркие линии.

При сравнении спектров различных металлов заметно, что многие линии совпадают. Особенно отчетливо заметно совпадение одной линии железа с одной линией магния при 1655,6 и одной линии железа с одной линией кальция при 1522,7. Мне представляется весьма интересным вопрос, являются ли эти и аналогичные совпадения только кажущимися, т. е. совпадают ли соответствующие линии точно или только расположены достаточно близко. Я не приписываю своим наблюдениям точность, необходимую для достаточно достоверного ответа на поставленный вопрос, и считаю, что для этого потребовалось бы еще большее увеличение числа призм и усиление интенсивности света. Для достижения последнего лучше всего было бы вместо индукционного тока аппарата Румкорфа использовать непрерывный ток цепи, состоящей из большого числа пар.

В заключение этого раздела я приведу следующее замечание. Положение светлых линий, или точек, максимумов яркости в спектре светящегося пара не зависит от температуры, присутствия паров других веществ и, помимо всех остальных условий, от химических свойств пара. Справедливость этого утверждения отчетливо следует из опытов, проведенных для проверки его Бунзеном и мною, и подтверждается многими другими наблюдениями, произведенными мной на описанном выше необычно чувствительном приборе.

Однако вид спектра одного и того же пара в различных условиях может сильно отличаться. Достаточно изменить только массу светящегося пара, чтобы придать его спектру иной характер. Если увеличивать толщину слоя пара, свечение которого исследуется, то яркость всех его линий возрастает, но поразному. Согласно теоретическому утверждению, приведенному в следующем разделе [7], яркость светлых линий растет значительно медленнее, чем интенсивность темных.

Ощущение, испытываемое глазом от линии, помимо яркости, зависит от ширины линии. Может случиться, что одна линия, менее заметная при малой толщине слоя излучающего пара, как менее яркая, при увеличении толщины слоя из-за большей ширины становится более интенсивной. Так, если интенсивность всего спектра плавно уменьшать до тех пор, пока различимыми останутся только наиболее интенсивные линии, то вполне может случиться, что вид спектра при изменении массы пара будет сильно изменяться.

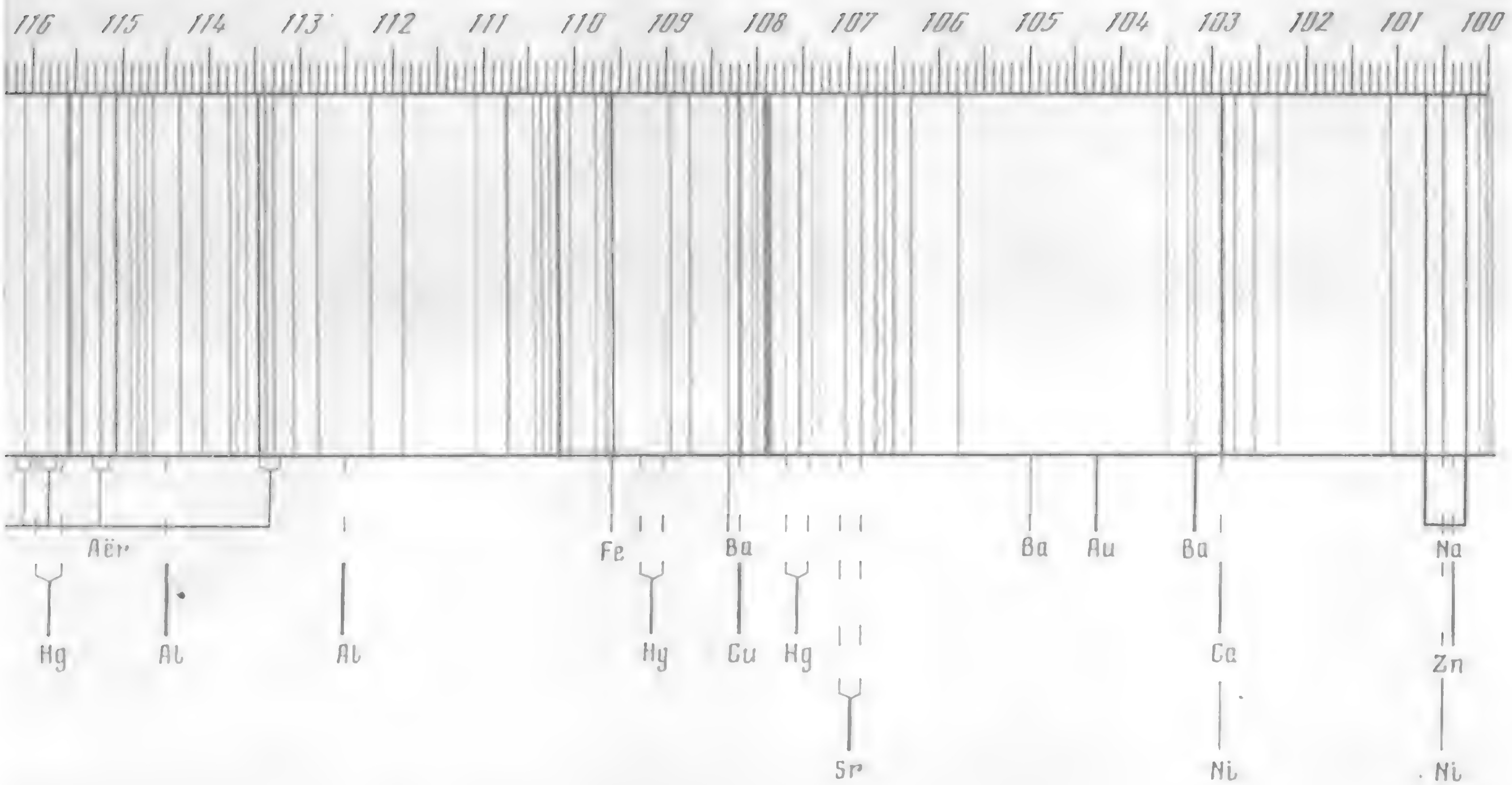
Действие, аналогичное массе, оказывает на спектр пара и его температура. При повышении температуры максимумы интенсивности остаются на прежних местах, но интенсивность их возрастает в различной мере. Влиянием массы и температуры полностью объясняется, почему наиболее характерные линии в спектрах металлов в пламени газовой горелки отличаются от характерных

---

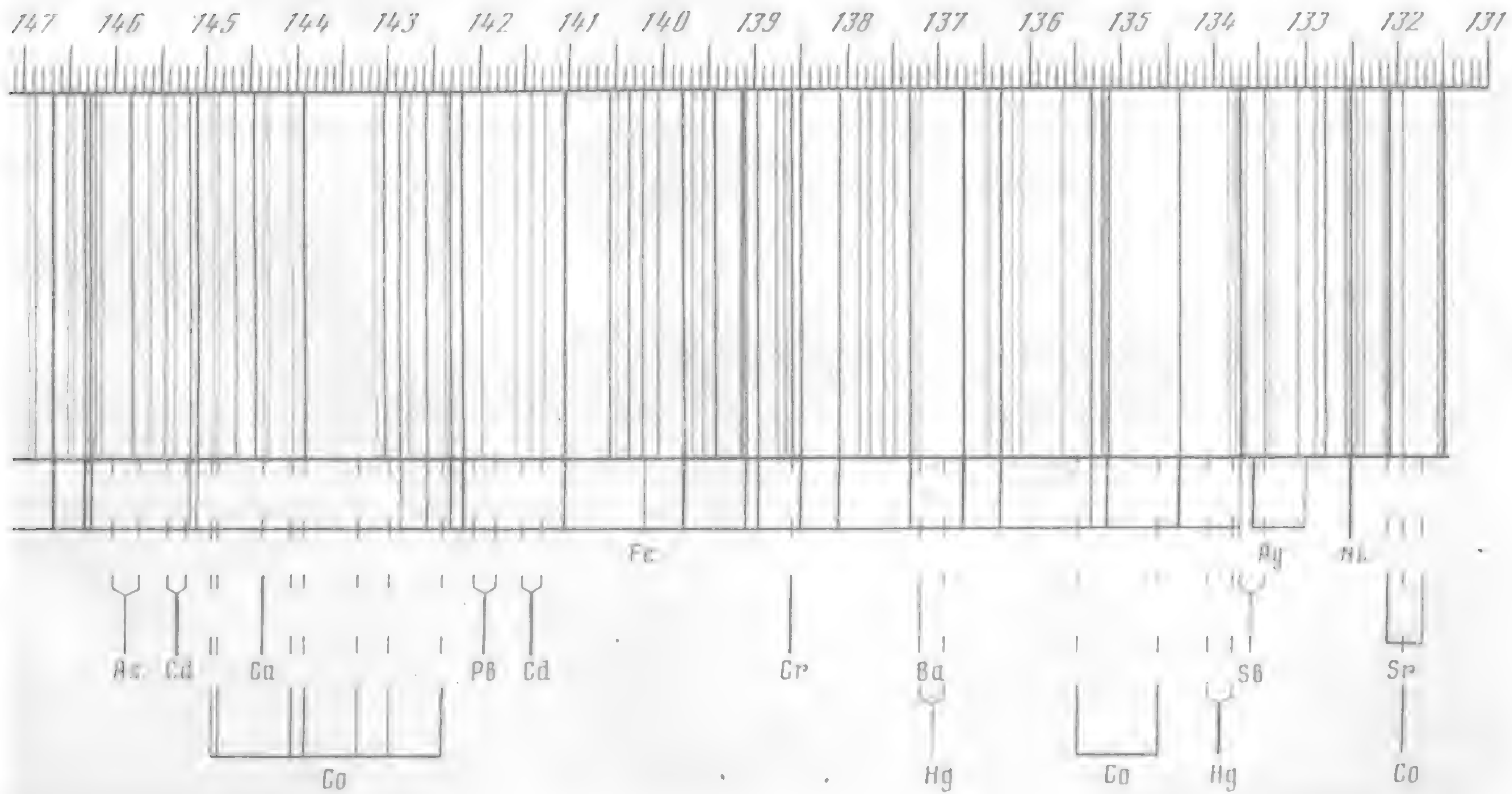
[11] Ср.: *Van der Willigen V. S. M.* // Ann. Phys. 1859. Bd. 106. S. 615.

Таблица I

D

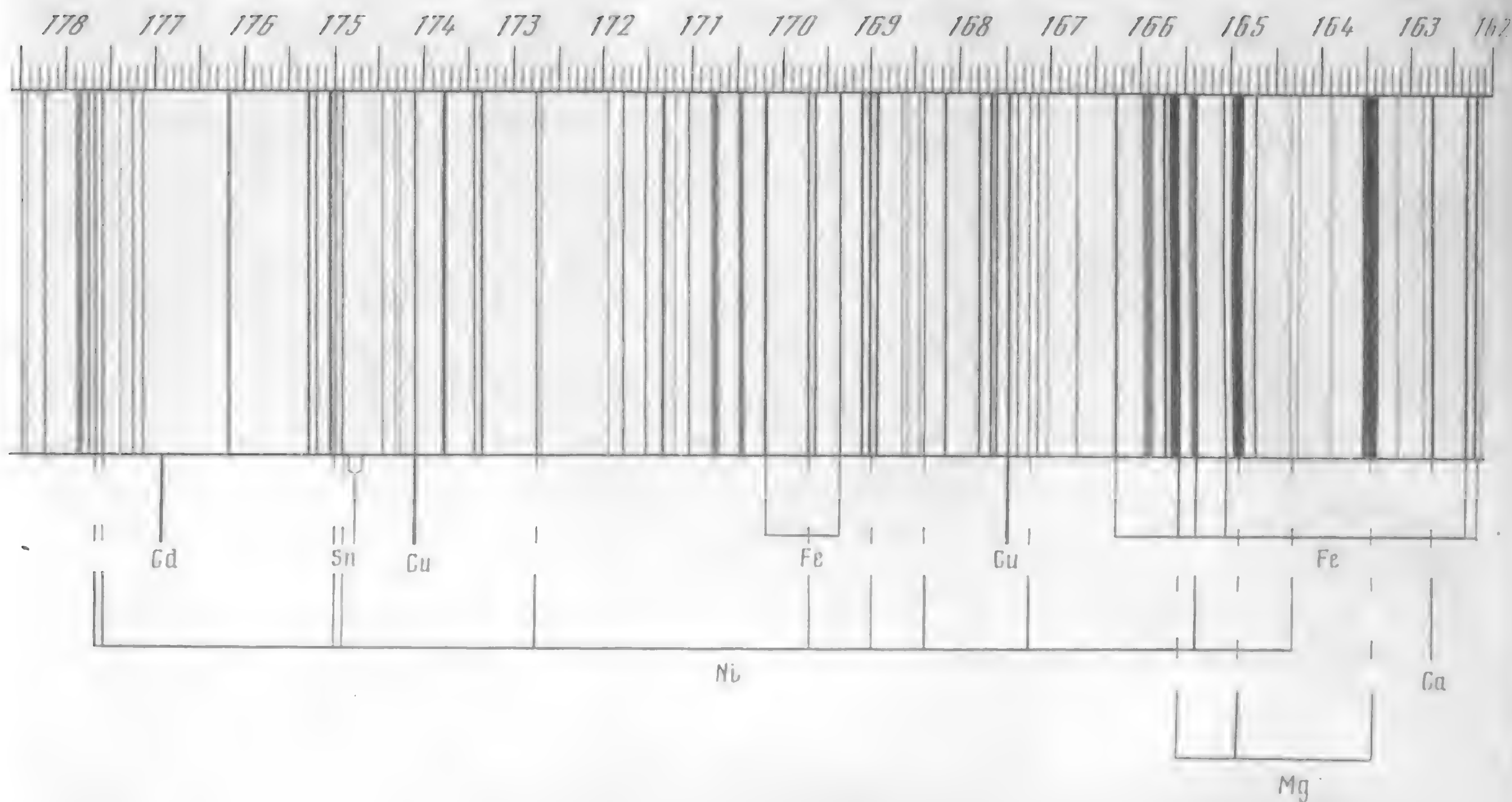


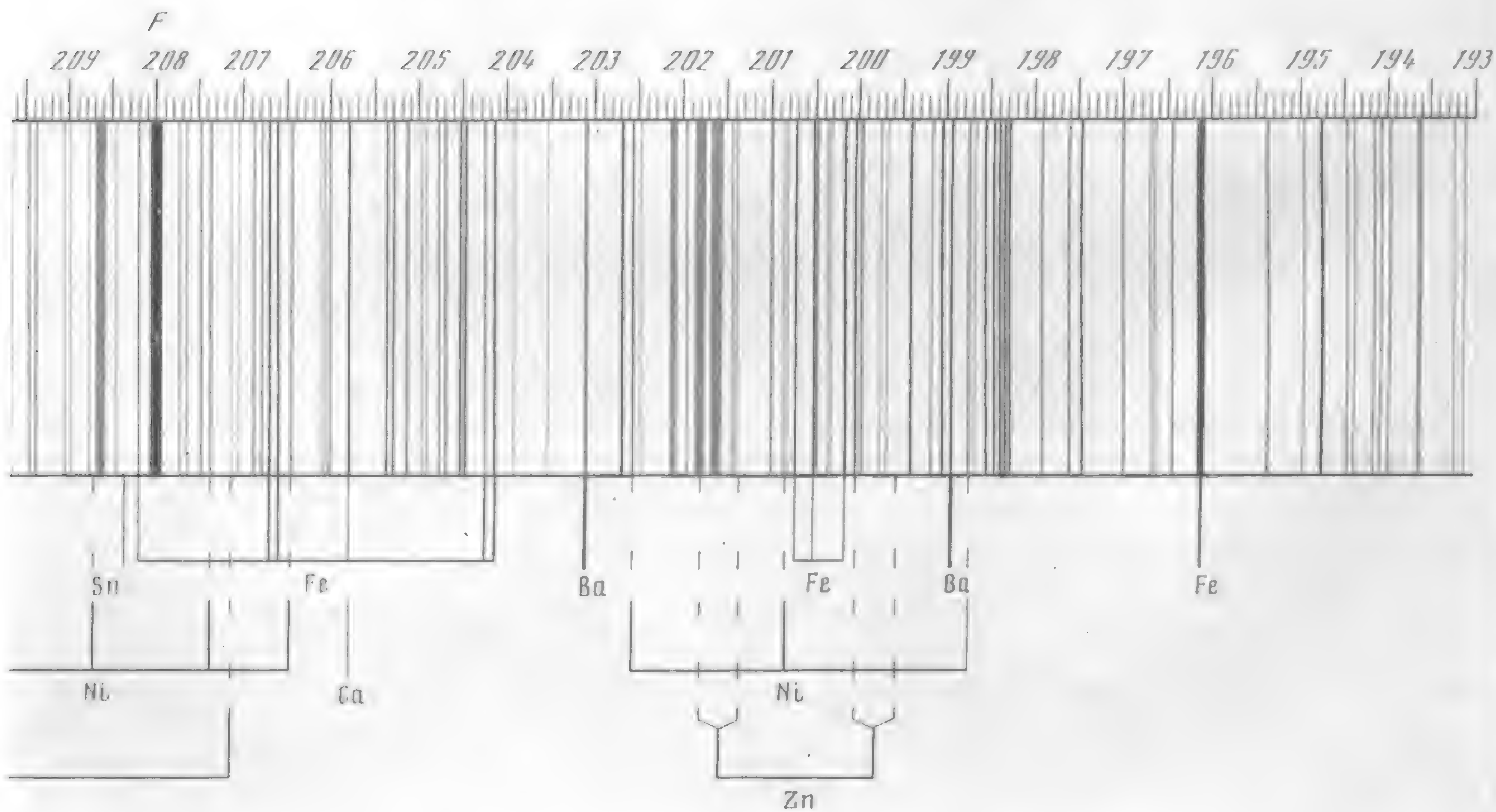
116
115
114
113
112
111
110
109
108
107
106
105
104
103
102
101
100
Aër
Hg
Al
Al
Fe
Hg
Ba
Cu
Hg
Sr
Ba
Au
Ba
Ca
Ni
Na
Zn
Ni



147
146
145
144
143
142
141
140
139
138
137
136
135
134
133
132
131
Fe
As
Cd
Ca
Co
Pb
Cd
Cr
Ba
Hg
Co
Sb
Hg
Ag
Ni
Sr
Co

Таблица II


В
178 177 176 175 174 173 172 171 170 169 168 167 166 165 164 163 162
Cd
Sn
Cu
Fe
Cu
Fe
Ni
Ca
Mg


F
209 208 207 206 205 204 203 202 201 200 199 198 197 196 195 194 193
Sn
Fe
Ba
Fe
Ba
Fe
Ni
Ca
Ni
Zn

линий спектров тех же металлов в электрической искре. Это различие весьма заметно в спектре кальция.

Я обнаружил, что если в замыкающую дугу лейденской банки, служащую источником искр, включить смоченный водой шнур или узкую наполненную водой трубку и нанести на электроды раствор хлористого кальция, то получится спектр, полностью совпадающий со спектром, который хлористый кальций дает в пламени газовой горелки. В нем отсутствуют линии, наиболее интенсивные в спектре, возникающем при чисто металлической замыкающей дуге.

Если тонкий водяной столб заменить слоем воды, имеющим большее поперечное сечение и меньшую длину, то получится спектр, в котором с одинаковой отчетливостью можно наблюдать и линии, встречающиеся в пламени, и линии, встречающиеся в спектре неослабленной искры. На этом спектре видно, каким образом спектр кальция в пламени переходит в спектр, порождаемый ослепительной электрической искрой.

Светлые линии в спектре светящегося газа можно сравнить с тонами звучащего тела: какие бы причины ни вынудили тело совершать колебания, высоты тонов всегда остаются одними и теми же, в то время как в зависимости от способа возбуждения спектра большей интенсивностью обладает то одна, то другая линия.

ОБРАЩЕНИЕ СПЕКТРОВ ПЛАМЕН

Проводя уже упоминавшиеся опыты над спектром электрической дуги между двумя угольными остриями, Фуко [12] заметил, что наблюдавшиеся в спектре светлые линии натрия превращались в темные при разложении света, испускаемого угольными остриями и проходившего через дугу, в спектр. При пропускании сквозь дугу солнечного света Фуко наблюдал темную линию *D* необычайной интенсивности.

Ни Фуко, ни другие физики не смогли ни объяснить, ни подробнее исследовать эти явления, которые остались незамеченными большинством физиков. Не были они известны и мне, когда Бунзен и я в 1859 г. приступили к нашим исследованиям окрашенных пламен. Желая получить непосредственное экспериментальное подтверждение неоднократно упоминавшегося свопадения линий натрия и линий *D* солнечного спектра, я спроецировал яркий солнечный спектр и поместил перед щелью прибора натриевое пламя и увидел, что темные линии *D* превратились в светлые. Бунзеновская горелка позволила получить линии натрия в солнечном спектре с неожиданной яркостью.

Стремясь выяснить, до какой степени можно увеличивать интенсивность солнечного спектра, не теряя из виду линии натрия, я направил сквозь натриевое пламя на щель прибора весь солнечный свет и, к своему удивлению, увидел необычайно интенсивные темные линии *D*.

Затем солнечный свет я заменил друммондовым светом, спектр которого, подобно свету светящегося твердого или жидкого тела, не имеет темных линий. Если друммондов свет пропустить сквозь пламя поваренной соли, то в спектре в тех местах, где находятся линии натрия, появятся темные линии. То же са-

[12] *Foucault L.* L'Institut. 1849. P. 45.

мое я проделал, заменив светящийся цилиндр из известняка платиновой проволокой. Пропуская сквозь проволоку электрический ток, я довел ее почти до точки плавления и заставил светиться сквозь пламя.

Все описанные выше явления легко объясняются, если предположить, что натриевое пламя поглощает лучи той же пробивной способности, как и испускаемые им, а для всех остальных лучей полностью прозрачно. Такое предположение представляется тем более правдоподобным, что при низких температурах аналогичное избирательное поглощение парами некоторых веществ, например азотной кислоты или иода, было замечено давно.

В том, что такое предположение позволяет объяснить перечисленные выше явления, можно убедиться с помощью следующего рассуждения. Если перед светящейся платиновой проволокой, спектр которой мы наблюдаем, поместить натриевое пламя, то, по предположению, о котором идет речь, вблизи линий натрия яркость спектра не изменяется. Там же, где расположены линии натрия, яркость спектра изменяется по двум причинам: интенсивность света, испускаемого платиновой проволокой, из-за поглощения в пламени уменьшается на какую-то долю первоначального значения, и к тому же добавляется свет самого пламени.

Ясно, что если платиновая проволока светится достаточно сильно, то потеря света из-за поглощения в пламени должна превосходить выигрыш, достигаемый за счет большей интенсивности свечения. Следовательно, линии натрия должны казаться темнее прилегающих к ним участков спектра. Если поглощение достаточно сильно, то по контрасту с соседними участками линии натрия могут казаться совершенно черными, хотя они светлее линий, испускаемых самим натриевым пламенем.

Поглощение в парах натрия [13] тем легче наблюдать, чем меньше их яркость, т. е. чем ниже их температура. Получить темные линии натрия на фоне спектра светящейся платиновой проволоки или друммондовской лампы, пропуская свет от этих источников сквозь пламя светильного газа, не удалось, однако удалось достичь желаемого результата с помощью пламени спиртового раствора, содержавшего поваренную соль.

Крукс [14] произвел следующий опыт, весьма наглядно показавший влияние температуры. Если в закрытом помещении сжечь небольшое количество натрия и тем самым наполнить воздух мельчайшими частицами натриевых соединений, то любое пламя будет иметь в таком помещении хорошо известный желтый цвет. Если перед большим пламенем зажечь небольшое, то малое пламя наблюдатель будет видеть на фоне большого как бы окруженное черным дымом. Темный дым обусловлен парами натрия, которые холоднее паров, находящихся в самом пламени.

Бунзену и мне удалось получить темные линии натрия на спектре пламени обычной свечи, пропуская лучи через колбу, на дне которой находилась амальгама натрия, доведенная до кипения. В этом случае мы имеем дело с парами натрия при температуре намного ниже калильного жара, вызывавшего погло-

---

[13] Под этим термином я буду понимать не только пары чистого натрия, но и одного его соединения.

[14] *Crookes W.* // Phil. Mag. 1861. Vol. 21 (4). P. 55—57.

щение. При проведении этого опыта мы столкнулись с досадной помехой: вся колба довольно скоро покрывалась изнутри амальгамой и становилась непрозрачной. Опыт удавался гораздо лучше, если колбу с амальгамой натрия заменяли наполненной водородом запаянной стеклянной трубкой, на дно которой помещали немного натрия, и нагревали нижний конце трубки до слабого свечения.

Это устройство предложил Роско [8] и показал с его помощью, что пары, образующиеся при нагревании натрия, выглядят как черный дым, отбрасывающий плотную тень, если осветить их пламенем поваренной соли, но они совершенно непрозрачны в свете обычного пламени.

К этому же кругу явлений относится и эффект, который я наблюдал с помощью описанного выше спектрального прибора. Спектр очень яркого натриевого пламени, как удалось установить с помощью этого же прибора, состоит из двух светлых линий с резкими границами. Ширина линий несколько превышает ширину щели прибора.

Если пламя сравнимо по яркости с пламенем бунзеновской горелки с внесенным в него шариком поваренной соли, то линии натрия имеют вид двух широких, постепенно сходящих в обе стороны полос, в центре которых находятся две тонкие черные линии. Положения этих линий в точности совпадают с положениями светлых линий в спектре более слабого пламени поваренной соли. Черные линии обусловлены, как показал эксперимент Крукса, поглощением части лучей, испускаемых более горячими парами натрия в пламени, в более холодных парах натрия, окружающих пламя.

Натриевое пламя выделяется из всех других окрашенных пламен большой интенсивностью линий спектра. Следующим по интенсивности линий идет литиевое пламя. С такой же легкостью, с какой обращаются светлые линии натрия (т. е. превращаются в темные), можно обратить и красную линию лития. Если пропустить сквозь литиевое пламя солнечные лучи, то в спектре на месте линии лития появится черная линия, которая по своей резкости может конкурировать с наиболее четкими фраунгоферовыми линиями и исчезает, если удалить пламя.

Светлые линии других металлов обратить не так легко. Самые яркие линии калия, стронция, кальция и бария Бунзену и мне удалось обратить, сжигая перед щелью спектрального аппарата некоторые количества хлоридов этих элементов в смеси с молочным сахаром и пропуская сквозь пламя солнечный свет [15].

Все эти факты наводят на предположение, что любой светящийся газ ослабляет за счет поглощения только лучи, обладающие такой же проникающей способностью, как и испускаемые им, или, иначе говоря, спектр любого светящегося газа должен обратиться, если сквозь этот газ пропускать лучи от достаточно яркого источника света, дающего в отсутствие других источников сплошной спектр.

Надежное объяснение того, в какой степени верно это предположение, дает найденный мной теоретический закон, который я считаю весьма важным

[15] Спектр, испускаемый электрическими искрами, которые я применял в настоящей работе для получения светлых линий многих металлов, не удается обратить с помощью проходящего сквозь искру солнечного света, так как время жизни искры мало по сравнению с промежутком времени между двумя последовательными искрами.

во многих отношениях. Этот закон относится ко всем тепловым лучам, а не только к тем, которые вызывают ощущение в нашем глазу и поэтому называются лучами света. Он утверждает, что для лучей любого рода отношение испускательной способности к поглощательной способности при одной и той же температуре одинаково для всех тел [16]. Закон, о котором идет речь, основан на предположении, что все тела испускают лучи только под воздействием температуры, до которой они нагреты, и что все поглощаемые телами лучи полностью превращаются в тепло. Такие явления, как, например, фосфоресценция, исключаются из рассмотрения.

Из нашего закона непосредственно следует, что светящийся газ, в спектре которого отсутствуют цвета, имеющиеся в спектре другого тела при той же температуре, совершенно прозрачен для лучей этих цветов, а лучи цветов, представленных в его спектре, поглощает тем сильнее, чем ярче эти цвета в его спектре.

Таким образом, предположение, к которому приводят описанные выше явления, верно настолько, насколько верен упомянутый мной теоретический закон, т. е. верно, если газ испускает лучи только вследствие своей температуры и поглощаемые им лучи полностью превращаются в тепло.

Нельзя не упомянуть еще об одном следствии из этого закона, которое понадобится нам в дальнейшем. Если источник света со сплошным спектром, с помощью которого производится обращение спектра светящегося газа, представляет собой светящееся тело, то температура этого тела должна быть выше температуры светящегося газа.

ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ СОЛНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЫ

Как показали наблюдения Фраунгофера, две темные линии солнечного спектра, обозначенные им через D, совпадают с двумя светлыми линиями, ныне известными как линии натрия. Брюстер обнаружил несколько светлых линий, совпадающих с другими темными линиями солнечного спектра, в пламени угля или серы с селитрой. При взгляде на таблицы I и II бросается в глаза множество аналогичных совпадений [17]. Особенно заметно, что там, где находятся все наблюдавшиеся мной линии железа, находятся самые четкие темные линии в солнечном спектре.

Думаю, что при должном усовершенствовании прибора обнаруженные мной совпадения линий железа и линий солнечного спектра удастся подтвердить с достоверностью, не уступающей той, с которой ныне доказано совпадение линий натрия с линиями D. Достоверность, с которой можно судить о совпадении светлых линий с темными линиями солнечного спектра при одних и тех же приборах, зависит от резкости обеих линий. Относительно линий железа в центральной части спектра я буду предполагать, что наблюдал совпадение, если

---

[16] Относительно строгого определения понятий, встречающихся в формулировке этого закона, его доказательства и следствий из него см. Дополнение. [Статья 2 наст. издания. — *Примеч. ред.*]

[17] Чтобы о совпадении линий на таблицах I и II можно было судить без помех, вносимых небольшими искажениями при печати, я привел в приложении перечень наблюдавшихся темных линий солнечного спектра и отметил совпадения.

расстояние между линиями было меньше отрезка, соответствующего на рисунке 1 мм. На моем рисунке солнечного спектра в середине расстояние между двумя соседними линиями составляет около 2 мм. Если бы расстояния между этими линиями были одинаковыми, то вероятность кажущегося совпадения никак не связанных с ними в действительности светлых линий была бы равна 1/2.

То же самое можно было бы сказать и в том случае, если бы линии были распределены неравномерно, но расстояние между соседними линиями было бы не меньше 1 мм. Но поскольку расстояния между линиями весьма часто меньше 1 мм, то вероятность случайного совпадения светлых линий и темных линий солнечного спектра меньше 1/2. Говоря так, я учитываю все наблюдаемые линии, в том числе и самые слабые.

Если же исключить из рассмотрения слабые линии и учесть только линии более интенсивные, чем те, которые совпадают с линиями железа, то вероятность случайного совпадения линии железа с одной из таких линий будет значительно меньше 1/2. В той части солнечного спектра, которая изображена на таблицах I и II, около 60 линий железа совпадают с темными линиями. Вероятность того, что эти совпадения обусловлены игрой случая, в силу сказанного меньше $(1/2)^{60}$, т. е. меньше 1/1 000 000 000 000 000 000.

В действительности эта вероятность еще меньше, так как чем светлее линия железа, тем по известному правилу темнее соответствующая линия солнечного спектра. Следовательно, для наблюдаемых совпадений должна быть какая-то причина, и такую причину, полностью отвечающую всем наблюдениям, действительно удается указать.

Все наблюдаемые факты легко объясняются, если лучи света, порождающие солнечный спектр, проходят сквозь пары железа и претерпевают при этом поглощение, которое должны создавать пары железа. Если учесть, что это — единственная причина указанных совпадений, которую можно привести, то принятие нашей гипотезы становится необходимым. Пары железа могут быть в атмосфере Солнца или в атмсофере Земли.

Трудно предположить, однако, что в атмосфере Земли имеется достаточное количество паров железа, способное приводить к появлению столь хорошо заметных линий поглощения в солнечном спектре, какие соответствуют линиям железа. Еще менее правдоподобно предположение о том, что эти линии не претерпевают заметных изменений, когда Солнце приближается к горизонту. Наоборот, ничто не противоречит предположению о присутствии паров железа в атмосфере Солнца вследствие высокой температуры, которую мы приписываем нашему светилу.

Поэтому я считаю, что наблюдения солнечного спектра подтверждают присутствие паров железа в атмосфере Солнца со всей достоверностью, какая вообще достижима в естественных науках.

Установив таким образом присутствие в атмосфере Солнца *одного* земного вещества и тем самым объяснив огромное число фраунгоферовых линий, естественно предположить, что там должны присутствовать и другие земные вещества и, поглощая солнечные лучи, порождать другие фраунгоферовы линии.

Весьма вероятно, что вещества, встречающиеся в огромных количествах на поверхности Земли и распознаваемые по особенно ярким линиям в их спектрах, подобно железу, могут быть обнаружены и в солнечной атмосфере. И, дей-

ствительно, в случае кальция, магния и натрия все обстоит именно так. Правда, число светлых линий в спектре каждого из названных мной металлов очень мало, но эти линии, так же как и линии солнечного спектра, с которыми они совпадают, настолько резки, что совпадения их удается установить с высокой точностью.

Немалое значение имеет и то обстоятельство, что линии, о которых идет речь, встречаются группами, совпадение которых можно наблюдать с большей точностью, чем совпадения отдельных линий. Весьма заметную группу образуют линии хрома, также совпадающие со столь же отчетливо выраженной группой фраунгоферовых линий. Думаю, что это позволяет с уверенностью судить о присутствии в солнечной атмосфере хрома.

Представляется интересным проверить, имеются ли в солнечной атмосфере никель и кобальт — постоянные спутники железа в метеоритных массах. Спектры этих металлов, так же как и спектр железа, отличаются необычайно большим числом линий. Но линии никеля и тем более кобальта намного уступают по яркости линиям железа, поэтому мне не удалось наблюдать их положение с такой точностью, какую допускали линии железа.

Все более яркие линии никеля совпадают с соответствующими линиями солнечного спектра. То же происходит и с некоторыми линиями кобальта, но часть его линий, не менее ярких, не совпадает с линиями солнечного спектра. Я считаю поэтому, что мои наблюдения позволяют сделать вывод о присутствии никеля в солнечной атмосфере. Что же касается кобальта, то я воздержусь от каких-либо утверждений.

Барий, медь и цинк, насколько можно судить, присутствуют в солнечной атмосфере, но в небольших количествах. Их наиболее яркие линии соответствуют резким линиям солнечного спектра, но более слабые линии не имеют аналогов в солнечном спектре.

Остальные металлы, которые я исследовал, а именно золото, серебро, ртуть, алюминий, кадмий, цинк, свинец, сурьма, мышьяк, стронций и литий, по моим данным, не наблюдаются в солнечной атмосфере.

Благодаря любезности Грандо из Парижа я получил несколько кусочков плавленого кремния. Используя их в качестве электродов, я сумел исследовать спектр этого элемента. За исключением двух широких зеленых полос 1810 и 1830, линии спектра кремния оказались столь слабыми, что я не смог определить их положение с точностью, которая бы позволила нанести их на рисунок спектра. Упомянутым светлым полосам в солнечном спектре не соответствуют темные полосы. Таким образом, применяемые мной методы не позволяют наблюдать кремний в солнечной атмосфере.

Согласно развитой здесь теории, часть темных линий солнечного спектра обусловлена поглощением в солнечной атмосфере. Это мнение давно высказывалось и обсуждалось. Возражение, которое я не считаю возможным обойти молчанием, было впервые выдвинуто в 1847 г. А. Маттиссеном [18, 19] [[9]], а позднее Брюстером и Гладстоном [20]. Если бы указанное мнение было верным, рас-

[18] *Mathiessen A.* // C. r. Acad. sci. 1847. T. 25. P. 548.
[19] *Mathiessen A.* // Ann. Phys. 1847. Bd. 73. S. 448.
[20] *Brewster D., Gladstone J. H.* // Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1860. P. 149—160.

суждали эти ученые, то темные линии, обусловленные солнечной атмосферой, должны были бы быть более интенсивными, когда лучи, разлагаемые в спектр, исходят от края солнечного диска, чем когда они исходят из его центра, так как в первом случае их путь в солнечной атмосфере длиннее, чем во втором. Между тем, по собственным данным указанных авторов и по данным проф. Форбса [10], такого различия не наблюдалось.

Разумеется, все эти наблюдения не были связаны с фотометрическими измерениями и поэтому не позволяют сделать вывода, что указанного различия не существует. Опираясь на них, можно лишь утверждать, что оно незаметно и гораздо меньше различия между некоторыми линиями спектра, когда Солнце приближается к горизонту и когда слой нашей атмосферы, просвечиваемый солнечными лучами, становится толще.

Не следует также ожидать, что линии, обусловленные солнечной атмосферой, при перемещении начала лучей из центра солнечного диска к краю усиливаются в такой же мере, в какой усиливаются линии, связанные с земной атмосферой, при движении Солнца от зенита к горизонту. Толщина земной атмосферы составляет весьма малую долю радиуса Земли, и поэтому путь, проходимый лучом света в земной атмосфере, если этот луч исходит из точки горизонта, несравнимо длиннее пути, проходимого лучом света, исходящим из зенита.

Толщина солнечной атмосферы, судя по явлениям, наблюдаемым при полных солнечных затмениях, не меньше радиуса светила, поэтому различие в длинах путей, проходимых в солнечной атмосфере двумя лучами, из которых один идет к нам от центра, а другой — от края Солнца, не очень велико.

Необходимо также иметь в виду, что самые нижние слои земной атмосферы как наиболее плотные сильнее всего сказываются на поглощении (именно в этих слоях быстрее всего возрастает длина пути, проходимого лучом света, по мере того как его направление приближается к горизонтальному).

Наоборот, в солнечной атмосфере наибольший вклад в образование темных линий спектра вносят слои, находящиеся на определенной высоте над поверхностью ядра. Нижние же слои, обладающие температурой, близкой к температуре ядра, слабо влияют на свет, так как для каждого луча света убыль интенсивности за счет поглощения в этих слоях почти полностью компенсируется их собственным свечением. Положение слоя, оказывающего наибольшее влияние на образование темных линий спектра, зависит от законов, по которым спадает с увеличением высоты температура и плотность солнечной атмосферы. Нет никаких оснований предполагать, что этот слой находится в непосредственной близи к поверхности тела Солнца.

Приведенные соображения отнюдь не означают, что ожидаемое Маттиссеном, Брюстером и Гладстоном усиление линий солнечного спектра, обусловленных солнечной атмосферой, не может происходить. То, что такое усиление не наблюдается ни для одной линии, как показывают наши соображения, не противоречит предположению о связи большинства линий подобного типа с солнечной атмосферой, предположению, к которому с настоятельной необходимостью приводят другие соображения.

ФИЗИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ СОЛНЦА

Для объяснения темных линий солнечного спектра необходимо предположить, что солнечная атмосфера окружает светящееся тело, излучающее само по себе спектр без темных линий, яркость которого превосходит определенный предел. Наиболее правдоподобное предположение, которое можно высказать, состоит в том, что Солнце состоит из твердого или капельно-жидкого сильно раскаленного ядра, окруженного атмосферой с несколько более низкой температурой.

Это представление о строении Солнца согласуется с выдвинутой Лапласом гипотезой об образовании нашей планетной системы. Если масса, сосредоточенная ныне в отдельных телах планетной системы, некогда образовывала единую туманность, простиравшуюся на гигантские расстояния, из которой под действием сил притяжения возникли Солнце, планеты и Луна, то все эти тела в силу своего происхождения должны обладать, по существу, аналогичными свойствами.

Геология учит нас, что Земля некогда находилась в раскаленном жидком состоянии. Следовательно, мы в праве предположить, что и другие тела нашей системы находились в таком же состоянии. Все эти тела испытали охлаждение за счет излучения тепла, но из-за больших различий в массе охладились в весьма различной степени, и в то время как Луна стала холоднее Земли, температура поверхности тела Солнца еще не опустилась ниже температуры белого каления.

Земная атмосфера, содержащая ныне лишь немногие элементы, в те времена, когда Земля еще была раскалена, имела несравненно более богатый состав, в ней должны были встречаться все вещества, улетучивающиеся при высокой температуре. Аналогичными свойствами должна обладать сейчас атмосфера Солнца.

Представление о том, что Солнце — это раскаленное тело, столь давнее, что неоднократно высказывалось многими греческими философами. После открытия пятен на Солнце Галилей объявил, что это облака, которые плавают в газообразной атмосфере Солнца и кажутся нам темными на фоне сверкающего тела Солнца.

Если бы Земля была самосветящимся телом, утверждал Галилей, то, рассматривая ее с большого расстояния, мы наблюдали бы те же явления, какие видим на Солнце. По мере того как за облаком скрывалась бы то одна, то другая местность, мы наблюдали бы пятна то в одном, то в другом месте на поверхности диска Земли, причем большей или меньшей непрозрачности облака соответствовало бы большее или меньшее ослабление света Земли. Мы наблюдали бы то мало, то много пятен. К тому же облака, если предположить, что наша Земля не покоится неподвижно, принимали бы участие во вращении вокруг земной оси, а поскольку облака в сравнении с их шириной обладают лишь ничтожно малой толщиной, то по мере приближения к краю диска их поперечник должен был бы заметно уменьшаться [21].

[21] *Arago D. F.* Werke (deutsche Ausgabe). Bd. 1—17. Leipzig, 1854—1860. Bd. 12. S. 128. В рус. пер. см.: *Ф. Араго.* Общепонятная астрономия. Т. 1—4. СПб., 1861. Т. 2. С. 110—111. — [*Примеч. ред.*]

Эти представления о природе солнечных пятен и самого Солнца из-за некоторых особенностей пятен, обнаруженных более поздними наблюдениями, были отвергнуты многими астрономами. Излагая теорию физических свойств Солнца, пользовавшуюся некогда почти всеобщим признанием, Араго пишет следующее: «Не оставалось ничего другого, как принять основополагающее предположение о том, что Солнце состоит из темного тела, окруженного сначала до некоторой степени непрозрачной, отражающей свет атмосферой, затем светящейся атмосферой, в свою очередь, окруженную отстоящей от нее на определенное расстояние прозрачной атмосферой».

Температуру поверхности темного солнечного тела Араго считает примерно равной температуре поверхности Земли, так как он утверждает следующее: «Если кто-нибудь спросит, могут ли обитать на Сонце живые существа, сходные по своей организации с теми, которые населяют Землю, то я не утерплю ответить утвердительно. Наличие у Солнца темного центрального ядра, окруженного непрозрачной атмосферой, на некотором расстоянии от которой находится светящаяся атмосфера, отнюдь не противоречит подобным представлениям» [22].

Возникновению столь фантастических представлений о строении Солнца способствовали наблюдения Вильсона, согласно которым при движении пятна от центра Солнца к западному краю его полутень со стороны, обращенной к центру солнечного диска, стягивается быстрее, чем с противоположной стороны. Ядро пятна, по мнению Вильсона, должно быть частью темного солнечного тела, видимой сквозь два соответствующих друг другу отверстия, которые образовались в фотосфере и в отражающей атмосфере, полутень — частью отражающей атмосферы, отверстие в которой меньше отверстия в фотосфере.

Эта гипотеза относительно строения Солнца, выдвинутая для объяснения солнечных пятен, представляется мне до такой степени противоречащей твердо установленным физическим знаниям, что ее следовало бы отбросить даже в том случае, если бы связанные с пятнами на Солнце явления нельзя было хотя бы частично объяснить как-то иначе.

Действительно, пресловутая фотосфера, если она возникает, должна испускать тепловые лучи как внутрь, так и наружу. Каждая частица наружного слоя атмосферы, заключенной внутри фотосферы, должна при этом нагреваться так же, как она нагревалась бы на Земле, находясь в фокусе вогнутого зеркала, направленного на Солнце, если поверхность этого зеркала при взгляде из фокуса охватывает больше полусферы. Чем непрозрачнее внутренняя атмосфера, тем быстрее происходит нагревание и, следовательно, тем медленнее проникает вглубь прямое излучение фотосферы.

Но сколь ни мала была бы степень непрозрачности атмосферы, тепло частично за счет излучения, частично за счет теплопроводности и течений со временем распространится по всей атмосфере, и последняя, даже если она когда-то была холодной, за тысячи лет достигнет температуры свечения.

Следовательно, атмосфера должна действовать на ядро так же, как действует на нее фотосфера, и ядро также должно рано или поздно достичь температуры свечения. Ядро действительно должно светиться, так как все тела на-

[22] Ibid. S. 161. [Рус. пер. С. 139.]

чинают светиться при одной и той же температуре. Это утверждение Дрепер установил экспериментально для твердых тел, а я с помощью теоретических рассуждений доказал для всех не полностью прозрачных тел. Оно следует из приведенного выше закона, которому подчиняются отношения испускательной и поглощательной способностей всех тел.

Но сами солнечные пятна как явления, для объяснения которых была выдвинута гипотеза о темном теле Солнца, по моему глубокому убеждению, могут быть более полно и естественно объяснены на основе *предположений* о строении Солнца, к которым приводит солнечный спектр.

В атмосфере Солнца должны происходить процессы, аналогичные тем, которые происходят в нашей атмосфере. И там, и тут локальные понижения температуры должны приводить к образованию облаков, только солнечные облака по своему химическому составу должны отличаться от наших облаков.

Если на Солнце образовалось облако, то все лежащие над ним части атмосферы охлаждаются, так как часть тепловых лучей, испускаемых светящимся телом Солнца, поглощается облаком. Это охлаждение тем заметнее, чем плотнее и крупнее облака. Для точек, расположенных вблизи над облаком, оно сильнее, чем для точек, расположенных выше. Следовательно, облака сверху со все возрастающей скоростью должны увеличиваться в размерах и становиться все холоднее. Их температура ниже температуры свечения, поэтому они непрозрачны и образуют ядра солнечных пятен.

Но понижение температуры происходит и на значительной высоте над такими облаками, причем не только по вертикали над ними, но и в стороны. Если где-то пары из-за царящей вокруг низкой температуры или за счет столкновения двух потоков воздуха окажутся вблизи точки конденсации, то за счет понижения температуры образуется второе облако, менее плотное, чем первое, поскольку на большой высоте из-за низкой температуры плотность паров меньше чем в глубине. Новое облако отчасти прозрачно, так как, достигнув достаточно большой протяженности, образует полутень. На Земле нам неоднократно приходится наблюдать облака, возникающие одновременно на различных высотах; более плотные пониже, менее плотные повыше.

Одновременное образование нескольких ярусов облаков вполне может происходить и там, где оно недоступно наблюдению. Хотя на Земле этого, как правило, не происходит, такая ситуация является типичной на Солнце, поскольку солнечная атмосфера получает тепло только снизу, в то время как сверху тепло от нее отводится за счет потерь на солнечное излучение.

Два слоя облаков играют в теории солнечных пятен, которую я отстаиваю, такую же роль, как два отверстия — в облачной атмосфере и в фотосфере — в теории, которую я не принимаю. Если предположить, что облака имеют те же размеры и расположены там же, где отверстия, то замеченное Вильсоном явление находит одинаковое объяснение в каждой из двух теорий [рис. 1, 2] [23].

---

[23] Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, достаточно взглянуть на рис. 1. *AB* и *CD* означают два облака (по одной теории) и два отверстия (по другой); *S* — поверхность солнечного тела, светящегося (по первой теории) и темного (по второй). Если Земля находится в направлении *T*, то пятно мы наблюдаем в центре солнечного диска и полутень

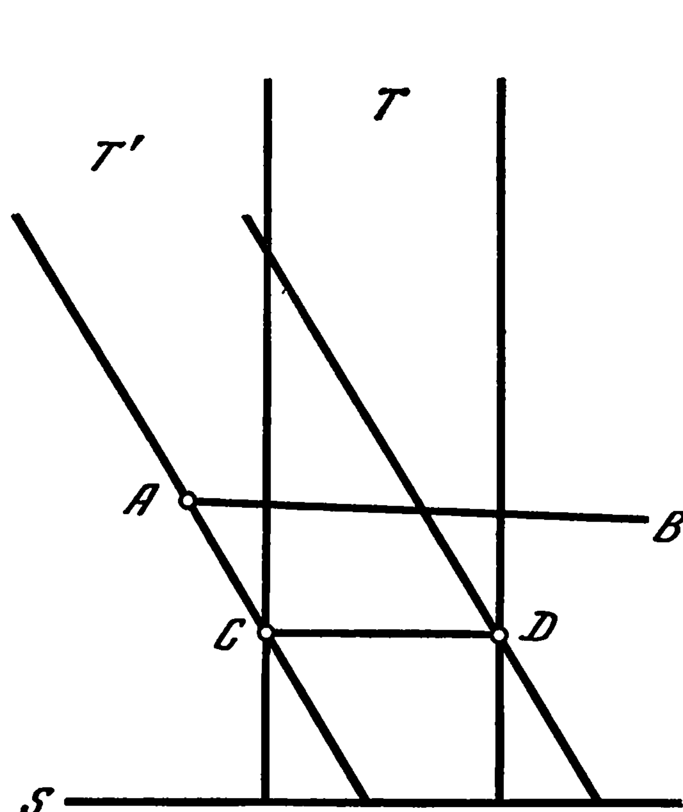


Рис. 1

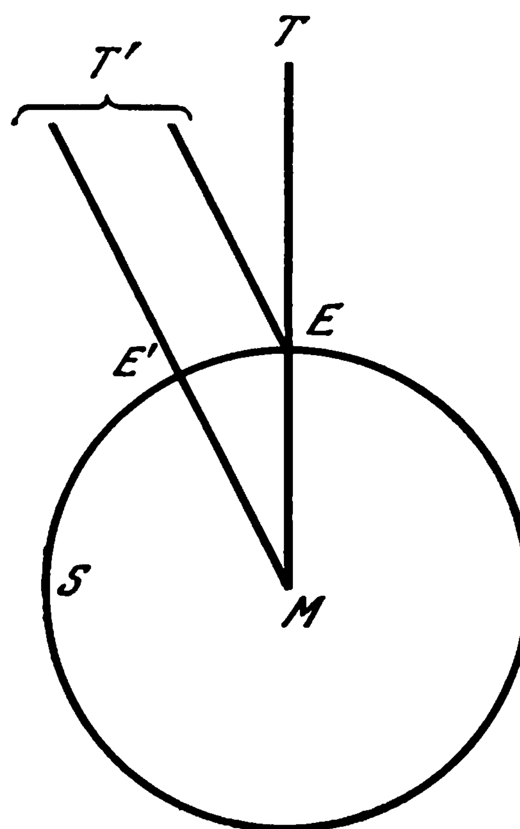


Рис. 2

По свидетельству различных наблюдателей, феномен Вильсона не является чем-то общим. Согласно принятой теории, исключения объясняются только изменениями пятен, согласно моей теории — еще и незначительным различием в высоте двух облаков.

В описаниях солнечных пятен особо подчеркивается, что ядро имеет резкую границу и что полутень там, где она касается ядра, ярче, чем вблизи внешней границы. По-моему, это связано с тем, что верхнее облако очень разрежено в центре и его масса сосредоточена главным образом у краев. Охлаждение, происходящее над облаком из-за того, что оно частично задерживает лучи, идущие от тела Солнца, порождает нисходящий ток воздуха. Воздух, увлекаемый из более высоких слоев атмосферы, необходимо компенсировать. Так возникает восходящий ток воздуха, образующийся вокруг облака.

В самом облаке оба тока переходят друг в друга, вследствие чего облако становится колыбелью горизонтальных течений, идущих изнутри наружу. Эти течения (поскольку создаваемые ими разности температур могут достигать тысячи градусов) неизмеримо превосходящие самые сильные ураганы на Земле, увлекают за собой массу облака, создавая разрежение в центре и уплотнение по краям.

имеет одинаковую ширину в обе стороны. Если Земля находится в направлении T', то пятно кажется расположенным вблизи края Солнца и полутень в окрестности точки C исчезает. Как видно из рис. 2, выполненного в меньшем масштабе, сторона пятна вблизи C есть середина стороны пятна, обращенной к Солнцу. На рис. 2S означает поверхность, M — центр тела Солнца, E — место, где наблюдается пятно. Если Земля находится на прямой MT, то центр солнечного диска кажется расположенным в точке E. Если же Земля находится на прямой MT', то центр солнечного диска кажется расположенным в точке E'.

Различие в выводах из двух теорий сводится к следующему: если Земля движется от T и T', то часть солнечных пятен должна выйти из одной полутени и скрыться за другой. Из-за изменений пятен и трудности наблюдения их вблизи края солнечного диска трудно решить, какое из двух следствий соответствует опыту.

На выполненных мной тщательных зарисовках пятен на Солнце, опубликованных в шестом томе Astronomischen Nachrichten [24], в полутени большинства пятен видны более темные полосы, расширяющиеся по направлению изнутри наружу. Они, как мне кажется, подтверждают существование течений, о которых только что говорилось, столь же убедительно, как параллельные полосы облаков, часто образующиеся на большой высоте в нашей атмосфере, — существование господствующих там ветров.

Сильные бури, которые должны происходить вблизи облаков, объясняют сильную изменчивость пятен.

Одна из замечательнейших особенностей солнечных пятен заключается в том, что они наблюдаются только в пределах определенной полосы, не далее определенного расстояния от экватора Солнца. Хотя это явление не находит объяснения в рамках той теории, которую я отстаиваю, тем не менее она позволяет лучше понять явления, чем другие теории.

Секки [11] на основе произведенных им наблюдений пришел к выводу, что полярные области Солнца обладают более низкой температурой, чем экваториальная зона. Если это так, то в атмосфере Солнца должны существовать течения, идущие на поверхности его тела от полюсов к экватору, где они поднимаются и в верхних слоях атмосферы возвращаются к полюсам.

Таким образом, в атмосфере Солнца должно существовать такое же движение, какое возникает в атмосфере Земли из-за теплых тропических областей. Это движение в атмосфере Солнца должно быть более регулярно, чем в атмосфере Земли, так как на Солнце отсутствуют возмущения, вносимые сменой дня и ночи и времен года. И там, и здесь экваториальное течение на определенном расстоянии от экватора опускается и встречается с встречным полярным течением.

Этими течениями в солнечной атмосфере, возможно, объясняется образование облаков. Если рассматривать их как наиболее эффективную причину образования облаков, то ясно, что лишь внутри определенной полосы вокруг экватора могут возникать облака такой плотности и таких размеров, при которых наблюдатель на Земле видит их в виде пятен.

Солнечные факелы или протуберанцы должны возникать в тех случаях, когда становится видимой поверхность солнечного тела, обладающая большей испускательной способностью или более высокой температурой, чем ее окружение. В том, что факелы и пятна часто наблюдаются поблизости друг от друга, нет ничего удивительного.

Факелы могут способствовать возникновению облаков поблизости от себя, возбуждая перепады температур и вследствие них — течения в атмосфере, приводящие к соприкосновению слоев, различных по составу и температуре. С другой стороны, не исключено, что облака создают благоприятные условия для возникновения факелов, ослабляя, как защитные крышки, излучение расположенных ниже частей поверхности солнечного тела и тем самым способствуя повышению температуры за счет идущего изнутри потока тепла.

---

[24] См. также: *Arago D. F.* Werke. Bd. 1—17. Leipzig, 1854—1860. Bd. 12. S. 80. [В рус. пер. см.: *Ф. Араго.* Общепонятная астрономия. Т. 1—4. СПб., 1864. Т. 2. С. 70—71. — *Примеч. ред.*

Араго произвел одно наблюдение, которое рассматривал как существенное подтверждение отстаиваемой им гипотезы о строении Солнца. Именно поэтому я не могу не упомянуть об этом наблюдении.

«Дабы окончательно убедиться в правильности изложенной мной теории, — писал он [25], — было бы желательно иметь какой-нибудь способ, позволяющий определять состав светящегося вещества Солнца путем прямого наблюдения. Мне кажется, что я достиг желаемой цели, применив явления поляризации». «Я заметил, — продолжает Араго [26], — что когда поверхность твердого или жидкого тела в раскаленном состоянии излучает свет под достаточно малым углом, особенно когда поверхность не идеально гладкая, удается наблюдать отчетливые следы поляризации».

По Араго, только свет, излучаемый раскаленным газом, является полностью неполяризованным. По наблюдениям Араго, свет, приходящий к нам из точек вблизи края солнечного диска, не обнаруживает следов поляризации, из чего Араго заключает, что «светящееся вещество, образующее видимый край солнечного диска, газообразно».

Но следы поляризации отсутствуют *не только* в свете, излучаемом раскаленным газом. Араго сам упоминает о том, что пламя светильного газа, используемого для освещения, испускает полностью неполяризованный свет, причем этот свет почти целиком исходит не от раскаленного газа, а от раскаленных частичек угля, выделяющихся в пламени. Так же, как и пламя, должна вести себя и любая светящаяся туманность, состоящая из твердых или жидких частиц.

Таким образом, *самое большее*, что следует из наблюдений Араго: источник света, делающий Солнце видимым для нас, не является сплошным твердым или жидким ядром Солнца. Те же наблюдения позволяют прийти и к заключению, что между сплошным ядром и газообразной атмосферой Солнца находится туманный слой, столь плотный, что лучи раскаленного добела сплошного ядра не проникают сквозь него. Этот слой также раскален добела.

Однако я не считаю предположение о существовании такого туманного слоя необходимым для объяснения наблюдения Араго. Действительно, Араго установил, что свет, испускаемый под малыми углами раскаленным твердым или жидким телом, обнаруживает отчетливые следы поляризации, *даже если его поверхность не идеально гладкая.*

Если основная масса Солнца находится в жидком состоянии и все это море движется, как земные моря, когда их водные массы, приведенные в движение штормами, покрываются волнами с пеной, то стоит ли ожидать, что свет этого моря будет плоскополяризованным скорее, чем в том случае, когда светящаяся жидкость обладает поверхностью, соответствующей состоянию ее равновесия? Думаю, что нет. В нашем глазу сливаются лучи, приходящие от элементов поверхности, имеющих самые различные направления, слишком близкие к состоянию полностью неполяризованного света. Предположение же о движении солнечного моря представляется вполне обоснованным, если принять во внимание колоссальные перепады температур в солнечной атмосфере и хаос течений, которые могут возникать вследствие таких перепадов.

---

[25] Ibid. P. 87. [Рус. пер. С. 74.]
[26] Ibid. P. 93. [Рус. пер. С. 79.]

8.
ИССЛЕДОВАНИЯ СОЛНЕЧНОГО СПЕКТРА И СПЕКТРОВ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ *

Не существует лучшего метода точно определить положение светлых линий светящегося газа, чем сравнить спектр этого газа с солнечным спектром. Если солнечные лучи пропускать через одну половину спектрального прибора, а лучи, испускаемые светящимся газом, — через другую половину, то солнечный спектр с его характерными темными линиями образует шкалу, отличающуюся от любой другой неизменностью и точностью.

Для того чтобы большинство этих линий не сливалось и не исчезало вследствие своей малой ширины и узости зазоров между ними, необходимо, используя узкую щель, несколько призм и зрительную трубу с сильным увеличением, добиться большой чистоты и длины спектра.

При соблюдении этого условия отдельные темные линии различимы так же легко, как деления обычной шкалы с цифровыми отметками, — настолько характерны и разнообразны группы, образуемые темными линиями, которые отличаются по ширине, интенсивности и относительному расположению. Следовательно, обычную шкалу вполне можно заменить солнечным спектром, пометив каким-нибудь образом его отдельные линии. Достаточно взять изображение солнечного спектра, снабженное любой оцифрованной шкалой, необходимой лишь для того, чтобы при сравнении ее с солнечным спектром можно было находить отдельные линии.

Сравнение спектров светящихся газов с солнечным спектром полезно не только для точного определения положений светлых линий — оно позволяет устанавливать химический состав атмосферы Солнца. Светлые линии некоторых химических элементов совпадают с темными линиями солнечного спектра, из чего, как показано в развитой мной теории, следует, что эти элементы находятся в атмосфере Солнца в газообразном состоянии.

В первой части настоящего сообщения [1] мной приведено изображение отрезка солнечного спектра от линии D до линии F, годный, по моему мнению, для поставленной выше цели и содержащий к тому же светлые линии многих химических элементов. Эта часть спектра наиболее интересна еще и тем, что наблюдения в ней допускают наибольшую точность, поскольку она является наиболее яркой в свете, испускаемом как Солнцем, так и большинством светящихся газов. Но при используемом мной приборе яркость во всей голубой, желтой и красной части спектра достаточно велика, чтобы обеспечить высокую степень точности.

В мои первоначальные намерения входило поэтому и аналогичное рассмотрение части спектра от линии A до линии G, но впоследствии мне пришлось

---

* Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente // Abhandl. Akad. Wiss. Berlin, 1862. Zweiter Theil. Berlin: Drückerei Akad. Wiss., 1863. S. 227—240.

Доложено на заседании Берлинской академии наук 20 ноября 1862 г. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] *Kirchhoff G.* // Abhandl. Akad. Wiss. Berlin, 1861. S. 63—95. [См. статью 7 наст. издания. — *Примеч. ред.*]

ограничиться рассмотрением меньшей части, границы которой указаны выше, предоставив моему ученику г-ну Хофману продолжить начатую мной работу.

Г-н Хофман пользовался в точности таким же прибором и такими же методами, которые я уже описал в своей предыдущем сообщении. Единственное отличие состояло лишь в том, что при исследовании спектра электрической искры Хофману пришлось из-за меньшей яркости применять зрительную трубу с 20-кратным увеличением вместо 40-кратного. Результаты его наблюдения показаны на таблицах Iа и III [2], подобно тому как результаты моих наблюдений в предыдущем сообщении показаны на таблицах I и II. Таблица Iа содержит данные о солнечном спектре от *A* до *D*, таблица III начинается с того места, где завершается таблица II, и доходит до *G*.

Помимо тех элементов, спектры которых наблюдал я, г-н Хофман исследовал следующие металлы: калий, рубидий, литий, церий, лантан, дидим, платину, палладий и примесь иридия и рутения. Линии этих металлов, попавшие в таблицы I и II, перечислены в приложении, причем, как и на изображениях спектра, мы различаем три степени яркости: цифра 3 соответствует наибольшей яркости, цифра 1 — наименьшей.

Спектр калия оказалось невозможно представить таким же образом, как спектры других щелочных металлов. Если хлористое соединение, борнокислую или сернокислую соль калия нанести на электроды, то новые линии не возникают. Если же электроды изготовлены из металлического калия, то возникают линии калия, показанные на таблице Iа, но столь бледные, что для определения их положения в солнечном спектре необходимо взять не менее двух призм, а солнечный спектр ослабить блендой из темного стекла.

Линия Каα лучше наблюдается, если воспользоваться газовым пламенем, а не электрической искрой. Эту линию Бунзен и я в нашем исследовании спектра изобразили простой линией, совпадающей с линией *A* Фраунгофера. Именно так она выглядит при малом увеличении, соответствовавшем тем задачам, которые мы ставили перед собой.

При увеличении, использованном в настоящей работе, эта линия оказалась двойной, компоненты которой преломляются слабее, чем линия *A*. То, что это двойная линия, наблюдали еще Дебрэ, Грандо и Роско. На то, что она преломляется слабее, чем линия *A*, указывал еще Моррен [3]. Вблизи линии *B* в спектре калия находится еще одна двойная линия, ни одна из компонент которой не совпадает с *B*.

Относительно спектров лантана и дидима следует заметить, что использованная нами соль лантана содержала примесь дидима, а соль дидима — примесь лантана. Именно поэтому спектры элементов лантана и дидима выглядели почти одинаковыми. Обе соли наносились на две пары электродов, и между парами одновременно проскакивали искры. Свет от одной из искр проходил через одну половину щели, свет от другой искры — через другую.

При непосредственном сравнении двух спектров, которое позволяла эта методика, оказалось, что одни линии светлее в одном, а другие — в другом

[2] Таблицы Iа, III (спектры К. Хофмана) и приложения к ним в настоящем издании не приводятся. — *Примеч. ред.*

[3] *Morren* // Chemical News. 1861. Dec. 7. P. 303.

спектре. Многие линии столь сильно отличались по яркости, что можно было с уверенностью высказывать утверждения относительно их происхождения. Установить происхождение других линий столь же определенно не представлялось возможным. В последнем случае соответствующие линии помечались обозначением (Di, La).

Новые наблюдения не привели к каким-либо новым выводам относительно составных частей атмосферы Солнца, но подтвердили ранее сделанные выводы. Как в желтой, так и в голубой частях спектра находится большое число линий железа, которые все совпадают с четкими линиями Фраунгофера. То же можно сказать и о линиях кальция.

Вероятность того, что в атмосфере Солнца имеется никель, значительно возросла после того, как г-н Хофман установил многочисленные совпадения между линиями никеля и темными линиями солнечного спектра. Вопрос о том, наблюдается ли кобальт, пока не допускает однозначного ответа, так как одним линиям кобальта в интервалах между *C* и *D* и между *F* и *G* соответствуют линии Фраунгофера, а другим столь же ярким не соответствуют.

Для спектров бария, меди и цинка найдены новые совпадения с темными линиями, подтверждающие наличие этих элементов в атмосфере Солнца. Г-н Хофман наблюдал также совпадения некоторых линий в спектрах стронция и кадмия, однако число их слишком мало для того, чтобы можно было прийти к определенным заключениям. Другие исследованные элементы обнаружить в атмосфере Солнца не удалось. Это относится и к калию. Правда, вблизи красных линий калия имеются линии Фраунгофера, но их яркость слишком слаба для того, чтобы можно было установить, совпадают они с соответствующими светлыми линиями или не совпадают.

Г-н Хофман уделил также внимание открытым Брюстером «атмосферным» линиям солнечного спектра. Для наблюдения последних помещение, которое я мог предоставить, было весьма неподходящим, так как из него не было видно Солнца вблизи горизонта. Тем не менее г-ну Хофману удалось наблюдать между 4 и 5 часами в сентябре месяце в солнечном спектре большое число темных линий, гораздо более заметных чем в полдень. Имеются основания полагать, что эти линии (по крайней мере, отчасти) обязаны своим происхождением земной атмосфере. Интересно отметить, что среди них встречаются линии 972,1; 977,4; 977,7 и 982,0, совпадающие с четко выраженными светлыми линиями, которые возникают в спектре при пропускании электрической искры через атмосферный воздух.

9.
К ИСТОРИИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И АНАЛИЗА СОЛНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЫ *

В статье «Исследования солнечного спектра и спектров химических элементов» [1] я сделал краткие исторические замечания по ранее выполненным работам, относящимся к обсуждаемому предмету. При этом некоторые публикации я обошел молчанием: одни — потому что я о них не знал, другие —потому что они мне представлялись не имеющими существенного значения для истории рассматриваемых открытий. После того как я с этими работами ознакомился или убедился, что в другом отношении работы имеют большее значение, чем я им приписывал, я постараюсь названные исторические замечания здесь дополнить.

1. Прежде всего среди тех, кто занимался изучением спектров цветных пламен, я должен упомянуть Гершеля и Тальбота, о которых здесь умолчать просто невозможно, так как уже вполне определенно можно указать на ту пользу, которую их наблюдения могут оказать химикам. Знакомством с их работами я в значительной мере обязан А. Миллеру [[1]], указавшему на них в выпуске «Chemical News» от 19 апреля 1862 г. В томе эдинбургских «Phil. Trans.» 1822 г., значилось здесь, Дж. Гершель кратко описывает спектры хлоридов стронция, калия, меди, азотнокислой меди и борной кислоты. Тот же наблюдатель [Дж. Гершель] в статье «Свет» в «Encycl. Metropolitana» 1827 г. на с. 438 пишет: «Соль натрия дает обильный и однородный желтый цвет, соль калия — прекрасный бледно-фиолетовый». Затем он называет цвета, которые дают соли кальция стронция, лития, бария, меди и железа, и продолжает: «Из всех солей наиболее подходят соли соляной кислоты благодаря их летучести. Те же цвета наблюдаются, если любую из рассматриваемых солей в виде порошка нанести на фитиль спиртовой лампы. . .». «Цвета, сообщаемые таким способом пламени различными веществами, во многих случаях являются подходящим и удобным средством для обнаружения исключительно малых их количеств. . .».

«Чистые земли, если их сильно нагревать, как это недавно практиковал лейтенант Друммонд, помещая изготовленные из них маленькие сферы в пламя, нескольких спиртовок, через которое подавался кислород, дают на своей поверхности цвета необычайной красоты. Если испускаемый ими свет пропустить через призму, то обнаруживаются в избытке специфические лучи, которые характеризуют цвет пламени, окрашивая его; поэтому не может быть сомнения, что эти оттенки обязаны молекулам, превращенного в пар красящего вещества, поддерживаемого в состоянии сильного накаливания».

Тальбот пишет [2]: «Пламя серы и селитры содержит красный луч, природа которого представляется мне замечательной. . .». «По-видимому, этот красный

---

* Zur Geschichte der Spectral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre // Aknn. Phys. 1863. Bd. 118. S. 94—111. Перевод Р. Б. Сегаля.

[1] *Kirchhoff G.* // Abhandl. Akad. Wiss. Berlin, 1861. S. 63—95. [См. статью 7 наст. издания. — *Примеч. ред.*]

[2] *Talbot W. G.* // Brewster's Journ. 1826. Vol. 5. P. 77—82; Chemical News. 1861. April 27

луч обладает определенной преломляемостью и является характерным для углекислого калия, так же как желтый луч для углекислого натрия, хотя вследствие слабой светимости его можно обнаружить только с помощью призмы. Если это допустить, то я бы далее предположил, что всегда, когда призма показывает однородный луч любого цвета, существующий в пламени, этот луч указывает на образование или присутствие определенного химического соединения».

Несколько далее при обсуждении спектра красного огня (Rotfeuer) после упоминания о часто появляющейся желтой линии он говорит: «Другие линии можно приписать ртути, стронцию и т. п., входящим в это соединение. Например, оранжевый луч может быть обязан стронцию, так как Гершаль обнаружил в пламени солянокислого стронция луч такого цвета. Если это мнение правильно и применимо к другим определенным лучам, то, взглянув на призматический спектр пламени, можно указать на содержание в нем вещества, для обнаружения которого иначе потребовался бы тщательный химический анализ».

В более позднем сообщении [3] тот же физик после точного описания спектров лития и стронция пишет: «Итак, я не колеблясь скажу, что оптический анализ может отличить друг от друга мельчайшие количества этих двух веществ с такой же, если не с большей надежностью, как и любой другой известный метод».

Эти высказывания ясно выражают мысль о «химическом анализе посредством наблюдений спектров». Однако другие (не упомянутые А. Миллером в его сообщении) высказывания этих же наблюдателей в тех же самых сочинениях, из которых взяты упомянутые ранее цитаты, полностью противоречат приведенным выводами и ставят под вопрос основу этого анализа.

В статье «Свет» непосредственно вслед за приведенными выше словами Гершель пишет: «В некоторых случаях, когда горение очень сильное, например, если через припаянную трубку вдувать воздух в пламя масляной горелки, или в верхнем конце пламени спиртовой горелки, или если бросать серу в раскаленный добела плавильный тигель, то появляется много чистого и однородного желтого света, а в последнем случае это приводит к тушению почти всего остального света. Доктор Брюстер обнаруживал такой же желтый свет, если поджечь нагретый смешанный с водой винный спирт».

Тальбот разъясняет: «Следовательно, желтые лучи указывают на присутствие натрия, но тем не менее они часто появляются, когда можно полагать, что никакого натрия нет». Затем он указывает, что желтый свет горящей серы, открытый Гершелем, идентичен желтому свету пламени спирта, содержащему поваренную соль. [Тальбот] пишет, что пришел к предположению, что желтый свет, возникающий, если внести в пламя соль, насыпанную на платиновую полоску, «обязан кристаллизационной воде скорее, чем натрию; но тогда, — продолжает он, — нелегко объяснить, почему соли калия и т. п. не создают его подобным же образом. Дерево, слоновая кость, бумага и т. д., помещенные в газовое пламя, выделяют, помимо яркого пламени, больше или меньше этого желтого света, как я всегда находил, одинакового по своей природе. Единственное существенное, что у этих различных тел есть общего с солями, это вода; все же я думаю, что образование или присутствие воды не может служить при-

[3] *Talbot W. G.* // Phil. Mag. 1834. Vol. 4 (3). P. 112—114; Chemical News. 1861. April 27.

чиной появления этого желтого света, потому что сера — вещество, как предполагается, не имеющее с водой никакой аналогии, — дает тот же самый свет».

«Стоит отметить, — добавляет он в примечании, — хотя, вероятно, это случайно, что удельный вес серы 1,99, т. е. он почти точно вдвое больше, чем у воды». «Также замечательно, — продолжает он далее, — что спирт, сжигаемый в открытом сосуде или в лампе с металлическим фитилем, дает мало желтого света; но фитиль из хлопка дает значительное количество его и неограниченно долгое время (я нашел другие примеры изменения цвета пламени, обязанные только присутствию вещества, количество которого в результате не уменьшается. Так, частица кислой извести на фитиле спиртовой лампы образует большое количество красных и зеленых лучей в течение целого вечера без заметного уменьшения)». В последующих местах сочинения он приписывает желтую линию то солям натрия, то сере. Так, при уже упомянутом обсуждении спектра «красного огня» Тальбот пишет: «Яркая линия в желтой области вызвана, несомненно, горением серы».

Поэтому следует признать, что после работ Гершеля и Тальбота вообще нельзя считать доказанным утверждение, что так часто упоминаемая желтая линия с уверенностью указывает на присутствие в пламени соединений натрия. Наоборот, столь разнообразные приводимые методы возникновения линии скорее ведут к заключению, что она обязана не определенной химической составной части пламени, но процессу неизвестной природы, который вследствие присутствия различных химических элементов осуществляется то легче, то труднее.

Если принять такое мнение о происхождении этой желтой линии, то следовало бы прийти к подобному же взгляду на происхождение других наблюдаемых в спектрах пламен линий, исследованных значительно меньше. В этом еще больше убеждаешься благодаря указанию Тальбота, что кусочек хлористого кальция только самим своим присутствием на фитиле пламени приводит к появлению в спектре красной и зеленой линий, совершенно при этом не уменьшаясь.

Опыты Уитстона [4], Массона [2], Ангстрема, Ван дер Виллигена и Плюккера со спектрами электрической искры или света (приводимые мною уже в «Исследованиях солнечного спектра и спектров химических элементов». (Труды Академии наук. Берлин, 1861. С. 70)), так же как и опыты Депре [5] [3], из которых этот физик заключил, что положение светлых линий спектра света, полученного от гальванического столба, не зависит от силы тока, могли бы подтвердить вывод, что светлые линии спектра светящегося газа вызваны исключительно химическим составом газа; однако они не могли привести к доказательству этого вывода. Ибо условия опытов были слишком сложными, процессы, имеющие место в электрической искре, слишком малоизвестными. К тому же есть еще обстоятельства, способные поколебать доказательность этих опытов в рассматриваемом вопросе: различие в цвете электрического света,

---

[4] Уитстон экспериментировал не только с искрами от электростатической машины, но и с искрами от вольтового [столба] и с индукционными искрами. Rep. Brit. Ass. Advancement Sci. 1835; Chemical News. 1861. March 23; Chemical News. 1861. March 30.

[5] *Despretz C.* // C. r. Acad. sci. 1850. T. 31. P. 419.

испускаемого в разных местах трубки Гейслера; и то обстоятельство, что Ван дер Виллиген при тех же электродах и при неизменном химическом составе газа, сквозь который проходило электричество, получал различные спектры, изменяя плотность газа в достаточно широких пределах; и, наконец, наблюдение Ангстрема, попутно им упоминаемое. Ангстрем пишет: «Уже Уитстон заметил, что, когда полюса изготовлены из двух различных металлов, то спектр содержит линии обоих металлов. Поэтому было интересно выяснить, даст ли соединение тех же металлов, особенно химическое, снова линии обоих металлов, или же его спектр будет отличаться появлением новых линий. Оказалось, что имеет место первое. Единственное различие заключалось в том, что некоторые линии отсутствовали, либо выявлялись с большой трудностью; но когда они выявлялись, то всегда на тех же местах, как и у отдельных металлов» [6]. Однако в следующем абзаце: «у ZnS линии в голубой области спектра сместились несколько к фиолетовой части спектра, но очень незначительно». Если бы подобное смещение, пусть даже очень малое, действительно имело место, то отсюда следовало бы заключить: либо светлые линии спектра электрической искры подчиняются другому закону, чем спектры светящегося газа, либо последние не обусловлены исключительно отдельными химическими компонентами.

Поставленный вопрос о линиях светящегося газа можно было бы решить только путем опытов при самых простых условиях, путем наблюдения спектров пламени. Подобные опыты были проделаны снова в 1845 г. А. Миллером, но они ничего не решили в этой проблеме. Заслуга Миллера в том, что он впервые опубликовал фотографии спектров пламени, но эти фотографии мало удачны. Правда, в отношении их при переиздании его (Миллера) сочинения Крукс пишет: «Конечно, мы не можем привести цветные диаграммы, иллюстрировавшие оригинал, но можем заверить наших читателей, что, сделав скидку на несовершенство хромолитографии шестнадцать лет тому назад, диаграммы спектров, приведенные Миллером, более точны в некоторых отношениях, чем цветные спектры, публикуемые в последних номерах научной периодики» [7]. Вопреки этому заверению г-на Крукса, я могу сказать, что в порядке опыта показывал фотографии многим лицам, хорошо знакомым с подобными спектрами, и просил их отыскать среди них изображения спектров стронция, кальция и бария, но ни одному из них не удалось это сделать правильно.

Впервые вопрос о том, обязана ли почти всегда появляющаяся желтая линия исключительно соединениям натрия, удалось решить опытным путем Свану в связи с его классической работой «О призматических спектрах углеводородных соединений» (приведенной в «Трудах Академии наук» (Берлин, 1861. С. 68) и в совместном сочинении моем и Бунзена (Ann. der Phys. Bd. 110. S. 168)). Он доказывает, что уже малое количество поваренной соли отчетливо проявляет эту линию, и находит, что это количество может быть ничтожно малым, а затем заключает: «Если мы учтем почти повсеместное распространение солей натрия и их замечательную способность вызывать желтый свет, то очень вероятно, что желтая линия R, появляющаяся в спектре почти всех пламен, вызывается всякий раз присутствием малых количеств натрия». Непосредственной целью

---

[6] *Ångström A.* // Ann. Phys. 1853. Bd. 94. S. 150.
[7] *Crookes W.* // Chemical News. 1861. Mai 18.

обсуждаемой работы было сравнение спектров различных углеводородных пламен. «Результат этого сравнения следующий: во всех спектрах, вызванных веществами типа C_rH_s или типа $C_rH_sO_t$, светлые линии идентичны. Правда, в отдельных случаях некоторые очень слабые линии, появляющиеся в спектре бунзеновской горелки, не видны. Яркость линий изменяется в соответствии с соотношением между углеродом и водородом в сжигаемом веществе, и она наибольшая при наибольшем количестве углерода . . . Абсолютная идентичность, существующая благодаря этому между спектрами различных не схожих соединений углеводородов, не менее замечательна; ибо она указывает на то, что: 1) положение линии в спектре не изменяется с отношением количества углерода и водорода в сжигаемом теле, что вытекает из сравнения спектров углеродистого водорода CH_2, маслородного газа C_2H_2 и терпентинного масла $C_{10}H_8$; 2) наличие кислорода не изменяет характера спектра, так как эфир C_4H_5O и древесный спирт $C_2H_4O_2$ дают спектры, идентичные со спектрами парафина $C_{20}H_{20}$ и терпентинного масла $C_{10}H_8$».

«По меньшей мере в некоторых случаях при добавлении к соединениям углеводородов других веществ линии спектра не возбуждаются. Так я нашел, что смесь спирта и хлороформа горит пламенем, имеющим очень яркую светящуюся зеленую оболочку — характерный признак присутствия хлора, хотя в его спектре не видно никаких линий. Если же пламя раздуть паяльной лампой, то свет оболочки исчезает и появляются обычные линии спектра углеводородов».

Благодаря этой работе Сван внес весьма ценный вклад в решение многократно выдвигаемого здесь вопроса, зависят ли светлые линии светящегося газа только от его химического состава; но он не ответил на вопрос во всей его общности и со всей определенностью; он его даже не поставил; он хотел ограничить свое исследование спектрами углеводородов; при этом он был вынужден исследовать желтую линию вследствие очень частого ее появления также и в этих спектрах.

По-видимому, до Бунзена и меня никто этот вопрос ясно себе не представлял; ответить на него было важнейшей целью нашей совместной работы; благодаря опытам, видоизменявшимся самым разнообразным образом и в большей части новым, мы пришли к выводу, явившемуся основным условием для создания «химического анализа посредством наблюдений спектров».

2. Добавлю здесь несколько слов относительно истории анализа солнечной атмосферы.

Сущность развитой мною теории химии солнца составляет утверждение, которое, выраженное кратко, гласит: для всякого рода лучей (тепловых или световых) отношение излучательной способности к поглощательной способности для всех тел при одинаковой температуре одинаково. Из этого утверждения легко следует, что раскаленное тело, испускающее только световые лучи некоторой длины волны, также и поглощает только световые лучи той же длины волны; отсюда получается, каким образом по темным линиям солнечного спектра можно определить состав солнечной атмосферы.

В своих «Оптических исследованиях»[8] Ангстрем на с. 144 утверждает,

[8] *Ångström A.* // Ann. Phys. 1853. Bd. 94. S. 144.

что тело «в накаленном состоянии должно излучать именно все те виды лучей, которое оно при обычной температуре поглощает». За этим следует: «Доказательство справедливости этого утверждения представляет большие трудности, потому что накаленное тело находится в совсем ином упругом состоянии, чем то, в котором определяется его поглощательная способность». В той связи, в которой они стоят, эти слова неясны; их можно понять, если бы Ангстрем утверждал, что тело в накаленном состоянии должно испускать именно все те виды лучей, которые оно при той же температуре поглощает. Но такой интерпретации никак не способствует непосредственно за тем следующее пояснение Ангстрема: «Косвенным доказательством правильности этого утверждения является обнаруженная г-ном Ньепсом де Сен Виктором взаимосвязь между окраской, сообщаемой телом спиртовому пламени, и той, которой обладает свет, испускаемый серебряным диском, хлорированным совместно с этим телом. А именно, серебряный диск, обработанный одним только хлором, принимает все оттенки солнечного спектра, но обработанный одновременно с окрашенным телом показывает почти исключительно цвета тела. Это может быть не иначе, как потому, что приготовленный так серебряный диск поглощает именно те цвета, которые принадлежат окрашенному телу». Не пытаясь в дальнейшем следовать этому «доказательству», признаем, что согласно ему излучение пламени, например, поваренной соли должно быть поставлено в соотношение с поглощением холодной серебряной пластины, обработанной поваренной солью.

Но смысл, который можно было бы приписать этому утверждению, всецело ставится под вопрос замечанием, которое Ангстрем делает на с. 143. Здесь сказано: «При этом все же стоит отметить, что среда поглощает не только колебательные движения, которые она легче всего воспринимает, но и те, которые находятся с ними в простом соотношении, как октава, терция и т. п.». Чтобы выявить противоречие, в котором оказались эти утверждения, представим себе тело, которое некоторые колебательные движения может воспринимать с большой легкостью, а другие вовсе не воспринимает; по утверждению Ангстрема на с. 144, это тело поглощает только первые движения, по его же замечанию на с. 143, оно должно поглощать, помимо первых, еще и некоторые другие.

Видно, что утверждение, являющееся основой химического анализа солнечной атмосферы, Ангстрем предчувствовал, но, конечно, только неопределенно. Теоретическое рассмотрение, посредством которого Ангстрем пытался его вывести, лежит в основе той мысли, которой позднее при обсуждении моей первой публикации об обращении спектров пламен Стокс придал правильное направление. Стокс [9] здесь сравнивает поглощение пламенем тех лучей, которые оно само испускает, с резонансом, возбуждаемом в способном звучать теле звуковыми волнами той высоты, которая свойственна самому телу. Это сравнение, если его удастся провести дальше, позволит прийти к чрезвычайно важным результатам. Как показал Стокс, оно интересно, поскольку дает наглядное представление о поглощении; но оно не содержит доказательства утверждения, что накаленное тело, испускающее только световые лучи некоторой длины волны, также и поглощает световые лучи той же длины волны. Теория резонанса и теория возникновения и поглощения световых и тепловых лучей до сих пор

[9] *Stokes G. G.* // Phil. Mag. 1860. March. Vol. 20.

слишком мало разработаны, чтобы с их помощью в настоящее время можно было доказать вышеназванное утверждение.

3. В «Trans. on the Roy. Soc. of Edinburgh» за 1858 г. находится сочинение Бальфура Стюарта [4], в котором описаны очень интересные опыты по тепловому излучению и поглощению частично теплопрозрачных пластинок. Стюарт находит, что пластинка каменной соли менее теплопрозрачна для лучей, испускаемых другой пластинкой каменной соли, нагретой до 100 °С, чем для лучей, исходящих от покрытой сажей поверхности при той же температуре. Отсюда и из подобных явлений, обнаруживаемых для стекла и слюды, он заключает: «. . .всякое тело, отсеивающее тепло при его прохождении сквозь вещество тела, более непрозрачно для тепла, излучаемого тонким слоем такого же вещества, чем для обычного тепла». Затем он напоминает принцип, обнаруженный впервые Прево, согласно которому тело, находящееся в среде с той же температурой, должно поглощать столько же тепла, сколько оно само излучает, и далее пишет: «Полагая, следовательно, что тепло при любой температуре состоит из разнородных лучей, можно закон сформулировать так: поглощение пластины равно ее излучению, и это справедливо для тепла всякого рода».

Это заключение более строгим быть и не может уже хотя бы потому, что из опытов, определяющих только, где больше, а где меньше, никакое равенство строго вывести нельзя. Утверждение, к которому такой опыт приводит, надо рассматривать не как доказанное им, но только как гипотезу, нуждающуюся в более глубокой проверке и потому в более тщательном уточнении содержащегося в ней выражения. Сам Стюарт также не считал свое утверждение строго доказанным, так как непосредственно за ним он пишет: «Более строгое доказательство может быть дано следующим образом», — и затем рассматривает более глубокие соображения, способные дать такое более строгое доказательство, из которых можно лучше узнать, какой смысл придается выражениям поглощение и излучение. Но эти соображения не обладают необходимой для достижения поставленной цели общностью и необходимой глубиной, так что вопреки им утверждение Стюарта остается гипотезой, обладающей некоторой вероятностью.

Из своих опытов Стюарт находит, что частично теплопрозрачная пластинка излучает тепла тем больше, чем она толще, и отсюда совершенно справедливо заключает, что излучение идет как изнутри тела, так и с его поверхности. После этого он ставит вопрос: «Надо ли предполагать, что каждая частица любого вещества обладает при данной температуре независимым собственным излучением, одинаковым, конечно, во всех направлениях? Apriori», далее он говорит: «это наиболее вероятное предположение, и, по-видимому, оно согласуется с экспериментом». В этих словах выражен принцип, являющийся пробным камнем для справедливости того утверждения, доказательство которого пытается дать Стюарт. Он пишет: «Возникает вопрос, совместим ли теоретически закон одинакового и независимого излучения каждой частицы тела с температурным равновесием? То есть, предположим, что мы имеем какую-либо полость неправильной формы со множеством веществ, и каждая частица каждого вещества излучает в эту полость, от сторон которой излучение многократно отражается в ту и другую сторону, пока не поглотится полностью. В этом случае будут ли закон одинакового и независимого излучения и законы отражения и

преломления так согласовываться друг с другом, что каждая частица стенки полости будет поглощать в точности столько тепла, сколько она излучает? Попытаемся показать, что эти законы соответствуют друг другу». Используя закон «одинакового и независимого излучения» и законы отражения и преломления, Стюарт получает равенство, которое соответствует доказываемому утверждению о равенстве поглощения и излучения для каждого рода теплового излучения. Оказывается, что это равенство не содержит никакого противоречия, а выражает возможное свойство внутреннего излучения тела. Отсюда он заключает, что должно иметь место утверждение о равенстве всякого рода поглощения и излучения. Очевидно, что это ошибочный вывод. Приведенное исследование доказывает это утверждение лишь как возможное, но не как обязательное.

Далее, обсуждаемое исследование проведено Стюартом не в общем виде, как об этом говорилось в выше цитированных словах, но для одного очень специального случая. Вслед за этим он пишет: «Для доказательства я выберу полость определенной формы и определенного рода; полученные выводы делают в высшей степени вероятным (если и не строго доказанным), что подобная адаптация вполне пригодна для любой полости, как бы ее ни видоизменять». Он рассматривает случай, когда тело ограничено с одной стороны плоскостью, а с других сторон неограничено, противолежит черной поверхности, параллельной этой плоскости. Кроме того, в доказательстве, приводимом Стюартом для этого случая, есть еще ошибка, изменяющая результат, полученный автором. Он делает вывод: «Следовательно, мы имеем два закона, необходимых для равновесия температуры: первый — что поглощение частицы равно ее излучению, и это [верно] для тепла каждого рода; второй — что поток тепла изнутри вещества любой толщины к его поверхности пропорционален caeteris paribus его показателю преломления, и это [верно] для тепла каждого рода». Этот второй закон (выражающий вышеупомянутое равенство, которое, как говорилось, указывает на возможное свойство излучения внутри тела) неверен; определяемая им величина пропорциональна не показателю преломления, а квадрату его [10]. В более поздней публикации [11] сам Стюарт (однако не упоминая свое предыдущее утверждение, находящееся в противоречии с последним) пишет: «Если через R обозначим излучение ламповой копоти, а через p — показатель преломления некристаллической среды, то можно показать, что внутреннее излучение, как здесь оно определено, равно Rp^2».

4. В заключение своего уже названного выше сочинения об окрашенных пламенах А. Миллер пишет: «Интересно отметить, в связи с рассуждениями о поглощающем действии солнечной атмосферы, что если солнечный свет, проходя сквозь пламя, обнаруживает хорошо заметные темные линии, эти линии появляются снова в спектре, полученного при наложении двух спектров: дневного света и цветного пламени, причем интенсивность первого не слишком велика по сравнению с интенсивностью второго. Это можно увидеть в красном свете нитрата стронция и менее отчетливо в зеленом свете хлорида меди. Следовательно, можно предположить, что существуют светящиеся атмосферы,

[10] См. § 14 статьи 2 наст. издания — *Примеч. ред.*

[11] *Stewart B.* // Rep. Brit. Ass. Advancement Sci. 1861. P. 107.

в которых не только недостает некоторых лучей, но которые еще и оказывают положительное поглощающее влияние на другой свет». Миллер приводит эти строки в сообщении «к анализу спектров» в выпуске «Chemical News» от 19 апреля 1862 г., не говоря о том, как связаны его наблюдения и вытекающий из них вывод с тем, что было обнаружено мною. В выпуске от 18 мая 1862 г. того же журнала Крукс, касаясь этих же слов, пишет: «Этот параграф показывает, что Миллер предвидел приблизительно за шестнадцать лет замечательное открытие, приписываемое Кирхгофу, о непрозрачности некоторых окрашенных пламен для света того же цвета».

Надо только с некоторой внимательностью прочесть слова Миллера, чтобы понять, что вывод, к которому он пришел, прямо противоположен моему выводу, да при этом можно еще и увидеть, что его вывод неверен. Если пропустить слабый дневной свет сквозь окрашенное пламя, то его поглощение не будет заметно; светлые линии спектра кажутся светлее окружения, так как к дневному свету прибавляется еще свет пламени.

5. После моей первой краткой публикации [12] о химическом анализе солнечной атмосферы я получил следующее письменное сообщение от проф. Томсона: «Примерно десять лет тому назад в Кембридже проф. Стокс сказал мне, что проф. Миллер экспериментально с очень большой степенью точности проверил согласие между двойной темной линией *D* солнечного спектра и двойной светлой линией спектра спиртовой лампы, в которой сжигается поваренная соль. Я заметил, что должна существовать какая-то физическая связь между двумя действующими факторами, очень показательная для характеристики явления в целом. Он согласился со мной и сказал, что механическое объяснение этого должно опираться на такие принципы, как, например, следующий: пары натрия вследствие его молекулярной структуры должны обладать склонностью к колебаниям с периодом, соответствующим показателю преломления двойной линии *D*. Отсюда присутствие натрия в источнике света должно способствовать образованию света этого качества. С другой стороны, пары натрия в атмосфере источника должны иметь большую способность задерживать, т. е. поглощать, свет от источника, точно такого же качества, при этом растет температура паров. В окружающей Солнце атмосфере, следовательно, должны присутствовать пары натрия, которые в согласии с предполагаемым здесь механическим объяснением, будучи частично непрозрачными для света этого качества, предохраняют соответствующую часть света, испускаемого Солнцем, от распространения на сколь-либо значительное расстояние через окружающую атмосферу. Проверка этой теории должна заключаться в том, чтобы выяснить, обладают ли пары натрия именно такой предсказываемой поглощательной способностью. У меня сложилось впечатление, что кто-то во Франции уже сделал это экспериментально, но я не могу найти ссылок, касающихся этого вопроса.

Я не уверен, появлялось ли когда-либо в печати это механическое объяснение проф. Стокса. Я же говорил о нем в моих лекциях регулярно в течение многих лет, всегда одновременно указывая, что химию Солнца и звезд можно

---

[12] *Kirchhoff G.* // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1859. Oct. [См. статью 4 наст. издания. — *Примеч. ред.*]

постичь путем исследования земных веществ, дающих светлые линии в спектрах искусственных пламен, соответствующие темным линиям солнечного и звездных спектров».

В выпуске «Phil. Mag.» за февраль 1862 г. на с. 158 проф. Томсон пишет: «Принципы солнечной и звездной химии Стокса излагались последние восемь или девять лет на публичной лекции по натуральной философии в университете в Глазго; в качестве первого результата было показано, что уверенно можно говорить о присутствии натрия в солнечной атмосфере. Недавнее применение этих принципов в блестящих исследованиях Бунзена и Кирхгофа (открывших независимо от Стокса эту теорию) с такой же надежностью показало, что на Солнце имеются железо, магний и некоторые другие известные металлы».

Из того письма, опубликованного по моей инициативе в «Phil. Mag.» (Ser. 4. Vol. XX. P. 20) и в переводе в «Ann. Chem. et Phys.» (Ser. 8. T. 62. P. 190), видно, что уже много лет назад Стокс в разговоре высказал идею, что, по-видимому, по темным линиям солнечного спектра можно было бы заключить о химических свойствах солнечной атмосферы. То, что эта идея верна, а именно, что пламя, обладающее гипотетически приписанным ему Стоксом поглощающим действием, и такие же светлые линии спектра раскаленного газа позволяют с уверенностью заключить о химическом составе (пламени), — это впервые было доказано моими теоретическими исследованиями и опытами, поставленными частично мною совместно с Бунзеном, частично одним мною; и именно поэтому ранее (на протяжении промежутка времени примерно в 10 лет) никем ничего касающегося высказанной Стоксом идеи опубликовано не было. Теперь же в разительном противоречии со сказанным проф. Томсон пишет: «Благодаря принципам химии Солнца и неподвижных звезд Стоксом показано, что в солнечной атмосфере находится натрий». И далее: «Применение этих принципов Бунзеном и Кирхгофом (открывших теорию Стокса независимо от него) с такой же надежностью установило присутствие на Солнце других металлов».

III

РАБОТЫ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ

10.
О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА ДВУХ ПРОВОДЯЩИХ ШАРАХ *

Задачей распределения электричества на двух проводящих шарах занимался Пуассон в двух своих знаменитых работах [1], а дальнейшее развитие формул, установленных в них Пуассоном, произвел Плана [2].

Эту задачу можно подразделить на две части: в первой требуется найти функцию, обозначенную Пуассоном через $f(x)$, дающую потенциал электричества, распределенного на одном шаре во всех точках линии центров; в другой части из этой функции $f(x)$ требуется образовать функцию, обозначенную Пуассоном через $\varphi(\mu(x))$, представляющую потенциал того же электричества в точках вне линии центров, и из которой легко может быть найдена плотность электричества во всех точках этого шара.

Но для нахождения величин, которые прежде всего интересуют физиков, достаточно знать функцию $f(x)$, именно, если радиус шара взять равным 1, то $f(0)$ будет выражать общее количество электричества, находящееся на данном шаре, а выражение $(1/4\pi)(f(x)+2x\, df(x)/dx)$, в котором надо положить $x=1$ или -1, даст плотность электричества в одной или другой точке шара, лежащей на линии центров, а также позволяет выразить через $f(x)$ силу, с которой эти шары притягиваются или отталкиваются.

Рассмотрения, которые мы далее проведем, относятся только к функции $f(x)$. Пуассон нашел для нее ряд, который всегда сходится и тем быстрее, чем больше расстояние между шарами.

Этот ряд я получил другим способом, который мне кажется более предпочтительным, чем у Пуассона. Этот ряд аналогичен известным рядам, встречающимся в теории эллиптических функций; я заметил, что некоторые величины, зависящие от $f(x)$, допускают представление в замкнутом виде через эллиптические функции. К ним относится плотность электричества в точке шара, лежащей между двумя центрами на линии центров, в случае, когда общий потенциал имеет одинаковое значение на обоих шарах.

В сочинениях Пуассона и Плана имеются два различных выражения для значения, принимаемого этой плотностью, если расстояние между шарами бесконечно мало, а их радиусы одинаковы. Пуассон указывает для нее порядок δ^4, Плана — δ^6, где δ означает некоторую отрицательную величину, квадрат

* Ueber die Vertheilung der Electricität auf zwei leitenden Kugeln // Ges. Abhandl. Leipzig, 1882. S. 78—100. Перевод М. Г. Шраера.

[1] *Poisson S. D.* // Mém. l'Institut France. 1811. T. 12, pt I, II.

[2] *Plana G.* // Mem. reale Accad. sci. Torino, 1845. T. VII.

которой имеет порядок расстояния между шарами. Выражение через эллиптические функции показывает, что упомянутая плотность имеет порядок $\frac{1}{\delta^3} e^{\pi^2/\delta}$.

Названный результат и другие, относящиеся к случаю очень близкого расстояния между шарами, были выведены Пуассоном и Плана из некоторого ряда для $f(x)$, расположенного по возрастающим степеням δ. Этот ряд был получен из первоначального всюду сходящегося ряда для $f(x)$ так, что последний был преобразован в определенный интеграл, который затем разлагался по возрастающим степеням δ. Однако вычислены были только первые члены этого ряда, не был найден общий член и поэтому невозможно было исследовать этот ряд на сходимость и найти его значение, если ряд расходится. При выводе в интеграл вида

$$\int_0^\infty \frac{\sin \delta t dt}{(e^{nt}-1)(1+\alpha \sin^2 \delta t)}$$

подставлялось разложение функции

$$\frac{1}{1+\alpha \sin^2 \delta t}$$

по возрастающим степеням t, разложение, сходящееся не при всех значениях t, по которым ведется интегрирование; нужно было провести специальное исследование относительно возможности использования этого разложения, но оно проведено не было.

Поэтому я и искал путь, отличный от предложенного Пуассоном, для вывода ряда, который давал бы значение $f(x)$ при малых расстояниях между шарами. Таким путем я пришел к ряду, который тоже расположен по возрастающим степеням δ, но у которого коэффициенты тоже зависят от δ; легко указать общий член этого ряда; он оказался только условно сходящимся, но позволяет вычислить $f(x)$ с любой степенью точности, если использовать некоторое преобразование, пригодное для $f(x)$; без этого использования он дает значение $f(x)$ с точностью до бесконечно малых величин, если расстояние между шарами бесконечно мало.

1. Пусть a и b — радиусы шаров, c — расстояние между их центрами, h и g — потенциалы свободного электричества соответственно на первом и втором шаре.

Пусть $f(x)$ потенциал электричества, расположенного на первом шаре, относительно точки, лежащей внутри этого шара на линии центров этих шаров, между обоими центрами на расстоянии x от центра первого шара. Тогда

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{e d\vartheta}{\sqrt{a^2+x^2-2ax\cos\vartheta}},$$

где e — некоторая функция от ϑ. При этом потенциал того же электричества относительно точки, лежащей вне первого шара, на линии центров, на расстоянии x' от центра первого шара на стороне центра второго шара, будет равен

$$\int_0^\pi \frac{e d\vartheta}{\sqrt{a^2 + x'^2 - 2ax' \cos\vartheta}},$$

или

$$\frac{a}{x'} \int_0^\pi \frac{e d\vartheta}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{x'}\right)^2 - 2a \frac{a^2}{x'} \cos\vartheta}},$$

или

$$\frac{a}{x'} f\left(\frac{a^2}{x'}\right).$$

Если $F(x)$ — потенциал электричества, находящегося на втором шаре, в точке внутри него, на линии центров, между двумя центрами, на расстоянии x от центра второго шара, то таким же образом найдем потенциал электричества второго шара в точке вне его, на линии центров, на расстоянии x' от центра второго шара со стороны центра первого:

$$\frac{b}{x'} F\left(\frac{b^2}{x'}\right).$$

Поэтому для всех точек x между $-a$ и a будем иметь

$$f(x) + \frac{b}{c-x} F\left(\frac{b^2}{c-x}\right) = h\ [^1],$$

а для всех x между $-b$ и b

$$F(x) + \frac{a}{c-x} f\left(\frac{a^2}{c-x}\right) = g.$$

Отсюда следует, что для всех x между $-a$ и a $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(x) - \frac{ab}{c^2 - b^2 - cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2 - b^2 - cx}\right) = h - g\frac{b}{c-x}.$$

Положив

$$f(x) = hf_1(x) - gf_2(x) \tag{1}$$

и считая, ради удобства, $a=1$, для определения $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получим уравнения

$$f_1(x) - \frac{b}{c^2 - b^2 - cx} f_1\left(\frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx}\right) = 1 \tag{2}$$

и

$$f_2(x) - \frac{b}{c^2 - b^2 - cx} f_2\left(\frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx}\right) = \frac{b}{c-x}. \tag{3}$$

Уравнение

$$\frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx} = x,$$

или

$$x^2-\left(c+\frac{1-b^2}{c}\right)x+1=0, \tag{4}$$

имеет два положительных действительных корня, среди которых один лежит между 0 и 1, другой — между 1 и c; пусть меньший корень есть ξ; тогда больший будет $1/\xi$; уравнение (2) годится и для $x=\xi$ и принимает вид

$$f_1(\xi)=\frac{1}{1-\dfrac{b}{c^2-b^2-c\xi}}.$$

Положим

$$x_1=\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}, \quad x_2=\frac{c-x_1}{c^2-b^2-cx_1}, \quad \ldots, \quad x_n=\frac{c-x_{n-1}}{c^2-b^2-cx_{n-1}};$$

тогда повторным применением (2) можно выразить $f_1(x)$ через $f_1(x_n)$; но следует указать, что, когда n становится все большим и большим, x_n приближается к ξ и, следовательно, $f_1(x_n)$ — к $f_1(\xi)$; отсюда следует, что $f_1(x)$ может быть прямо получено посредством повторного применения уравнения (2).

Для доказательства высказанного утверждения положим

$$z=\frac{1+Ax}{1+Bx}, \quad z_n=\frac{1+Ax_n}{1+Bx_n}$$

и распорядимся постоянными A и B так, чтобы $z_n=q^4z_{n-1}$, где q означает третью искомую постоянную.

Если написать соотношение между x_n и x_{n-1}

$$x_n=\frac{\alpha+\beta x_{n-1}}{\gamma+\delta x_{n-1}},$$

то для каждого значения x_{n-1} должно быть

$$\frac{\gamma+\delta x_{n-1}+A(\alpha+\beta x_{n-1})}{\gamma+\delta x_{n-1}+B(\alpha+\beta x_{n-1})}=q^4\frac{1+Ax_{n-1}}{1+Bx_{n-1}},$$

или

$$\frac{\gamma+A\alpha+(\delta+A\beta)x_{n-1}}{\gamma+B\alpha+(\delta+B\beta)x_{n-1}}=q^4\frac{1+Ax_{n-1}}{1+Bx_{n-1}}.$$

Это условие будет выполнено, если A и B — корни квадратного уравнения

$$\alpha\lambda^2+(\gamma-\beta)\lambda-\delta=0$$

и если положить $q^4=(\gamma+A\alpha)/(\gamma+B\beta)$. Этим квадратным уравнением является $\lambda^2+[c+(1-b^2)/c]\lambda+1=0$; сравнивая его с (4), замечаем, что его корни $(-\xi)$ и $(-1/\xi)$. Поэтому можно положить

$$z=\frac{1-\dfrac{x}{\xi}}{1-x\xi}, \tag{5}$$

откуда с учетом (4) получаем

$$q^4 = \xi^2 \frac{c - \frac{1}{\xi}}{c - \xi}. \tag{6}$$

Учитывая, что $\xi < 1$, $(1/\xi) < c$, получим отсюда $0 < q^4 < 1$, и поэтому z_n стремится к нулю при возрастании n; далее находим

$$\xi - x_n = \frac{\xi(1 - \xi^2) z_n}{1 + \xi^2 z_n},$$

откуда получим, что с ростом n x_n стремится к ξ.

Подставим теперь в уравнение (2) переменную z, которую мы ввели для доказательства нашего утверждения. Положим

$$f_1(x) = (1 - \xi^2 z)\,\varphi_1(z),$$

где множитель $1 - \xi^2 z$ введен с той целью, чтобы в возникающем при этом соотношении между $\varphi_1(z)$ и $\varphi_1(q^4 z)$ отношение коэффициентов этих двух величин не зависило бы от z. Учитывая, что, согласно (6) и (4),

$$q^2 = \frac{b}{c^2 - b^2 - c\xi} = \frac{b\xi}{c - \xi},$$

находим из (2) это соотношение:

$$\varphi_1(z) - q^2\varphi_1(q^4 z) = \frac{1}{1 - \xi^2 z}. \tag{7}$$

Полагая соответственно

$$f_2(x) = (1 - \xi^2 z)\,\varphi_2(z),$$

аналогичным путем получим из (3)

$$\varphi_2(z) - q^2\varphi_2(q^4 z) = \frac{q^2}{\xi}\,\frac{1}{1 - q^4 z}. \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) повторным применением дают непосредственно для $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ сходящиеся ряды

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1 - \xi^2 z} + \frac{q^3}{1 - q^4\xi^2 z} + \frac{q^4}{1 - q^8\xi^2 z} + \ldots$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1 - q^4 z} + \frac{q^4}{1 - q^8 z} + \frac{q^6}{1 - q^{12} z} + \ldots\right).$$

Разложив отдельные члены этих рядов по степеням z, получим ряды

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{1 - q^2} + \frac{\xi^2 z}{1 - q^6} + \frac{\xi^4 z^2}{1 - q^{10}} + \ldots \tag{9}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi}\left(\frac{q^2}{1 - q^2} + \frac{q^6 z}{1 - q^6} + \frac{q^{10} z^2}{1 - q^{10}} + \ldots\right), \tag{10}$$

которые сходятся только тогда, когда z лежит внутри определенных границ.

Эти разложения очень удобны для вычисления $f(x)$ для заданного значения x, если q не близко к 1, т. е. когда расстояние между шарами не мало. При этом с помощью (7) и (8), $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ сводят к $\varphi_1(q^{4^n}z)$ и $\varphi_2(q^{4^n}z)$, где n — число, выбираемое тем большим, чем большей точности хотят достигнуть и чем ближе q к 1; тогда $\varphi_1(q^{4^n}z)$ и $\varphi_2(q^{4^n}z)$ вычисляются с помощью рядов (9) и (10). Особенно интересно знать $f(0)$, так как оно выражает количество электричества, находящегося на шаре. При этом вычислении надо использовать то, что для $x=0$ будет $z=1$, как это следует из (5).

Можно было бы отметить еще одно свойство $f_2(0)$; $f_1(0)$ и $f_2(0)$ — функции двух переменных от b и c или от ξ и q; однако в выражении для $f_2(0)$ имеется только одна трансцендентная функция одной переменной, так как $\xi\varphi_2(1)$ зависит только от q. Функция $f_2(0)$ имеет простой физический смысл; это количество связанного на шаре электричества, если этот шар заземлен, а потенциал второго шара равен (-1), как это следует из (1).

2. Найденные равенства мы теперь применим в некоторой другой форме, имеющей определенные преимущества по сравнению с предыдущими.

Положим

$$q = e^{-\pi K'/K},$$

где K и K' имеют смысл, который придавал этим знакам Якоби в своей теории эллиптических функций [2], и пусть

$$F(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}e^{-2\pi u/K}}{1-q^{2m}e^{-2\pi u/K}}. \qquad (11)$$

Этот ряд для всех значений u, при которых ряд сходится, дает

$$\begin{aligned} F(u-K') &= F(u) + \frac{2\pi}{K}\frac{e^{-2\pi u/K}}{1-e^{-2\pi u/K}},\\ F(u-iK) &= F(u), \end{aligned} \qquad (12)$$

где $i=\sqrt{-1}$, и следующий ряд, сходящийся при условии, что действительная часть u больше, чем $(-K')$:

$$F(u) = \frac{2\pi}{K}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}e^{-2\pi u m/K}\ [3]. \qquad (13)$$

Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$, найденные в предыдущем разделе, выражаются через $F(u)$ следующим образом:

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}}\frac{K}{4\pi}\left(F(u) - F\left(u + K\frac{i}{2}\right)\right),$$

где

$$u = -\frac{K}{2\pi}\ln\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2},$$

и

$$\varphi_2(z) = \frac{1}{\xi\sqrt{z}} \frac{K}{4\pi}\left(F(u) - F\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right),$$

где

$$u = -\frac{K}{2\pi}\ln\sqrt{z}.$$

Выражения, которые получаются отсюда для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, допускают одно представление

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right)\frac{K}{4\pi}\left(F(u) - F\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right), \tag{14}$$

которое имеет место, если значкам f и u придать индексы 1 или 2 и положить

$$u_1 = -\frac{K}{2\pi}\ln\frac{\xi\sqrt{z}}{q^2}, \qquad u_2 = -\frac{K}{2\pi}\ln\sqrt{z}. \tag{15}$$

Если положить $-\ln t = u\pi/K$, обозначить через t_1 и t_2 значения t, которые соответствуют u_1 и u_2, и положить в том же смысле, в котором справедливо (14),

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right)G(t),$$

то из (12), (13), (14) и (15) найдем:

$$G(t) = G(qt) + \frac{q^2t^2}{1 - q^4t^4}, \qquad G(t) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{4m-2}}{1 - q^{4m-2}}t^{4m-2},$$
$$t_1 = \frac{\sqrt{\xi}\sqrt[4]{z}}{q}, \qquad t_2 = \sqrt[4]{z}, \qquad z = \frac{1 - \dfrac{x}{\xi}}{1 - x\xi}. \tag{16}$$

Эти равенства совпадают с теми, которые были рассмотрены в предыдущем разделе, и могут быть использованы для числовых расчетов $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Я хочу сопоставить соответствующие формулы для вычисления плотности электричества в точке шара, лежащей на линии центров между обоими центрами. Положим

$$y_1 = f_1(x) + 2x\frac{df_1(x)}{dx}, \qquad y_2 = f_2(x) + 2x\frac{df_2(x)}{dx} \quad \text{при } x = 1;$$

тогда упомянутая плотность будет равна

$$\frac{1}{4\pi}(hy_1 - gy_2).$$

Если с помощью (14) образовать выражения для y_1 и y_2 и заметить, что в силу (15) разность $u_1 - u_2$ не зависит от z, то увидим, что и эти два выражения допускают представление с помощью о д н о г о равенства, а именно

$$y = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\, i\,\frac{K^2}{8\pi^2}\left(F'(u) - F'\left(u + i\frac{K}{2}\right)\right), \tag{17}$$

в котором $F'(u)$ означает производную от $F(u)$ по u и которое имеет место, если значкам y и u придать индексы 1 или 2. Положим

$$u_1 = -\frac{K}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{\xi}}{q^2} - i\frac{K}{4}; \qquad u_2 = \frac{K}{2\pi}\ln\sqrt{\xi} - i\frac{K}{4}.^{3} \tag{18}$$

Если $-\ln t = (u\pi/K) + (i\pi/4)$ и

$$y = \frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}H(t), \text{ то } H(t) = H(qt) + \frac{q^2t^2(1-q^4t^4)}{(1+q^4t^4)^2},$$
$$H(t) = \sum_1^\infty(-1)^{m+1}(2m-1)\frac{q^{4m-2}}{1-q^{4m-2}}t^{4m-2}, \quad t_1 = \frac{\sqrt[4]{\xi}}{q}, \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}}, \tag{19}$$

где в равенстве для y вновь нужно значкам y и t придать индексы 1 или 2.

3. Функция F, определенная с помощью ряда (11), находится в определенной связи с эллиптической функцией, обозначаемой Якоби через Z [4]. Сравнив ее разложение с рядом (11), найдем

$$F(u) - F(-u-K') = 2iZ(2iu+iK'); \tag{20}$$

если обозначить через E [5] полный эллиптический интеграл второго рода, то, дифференцируя (20), получим

$$F'(u) + F'(-u-K') = \frac{4E}{K} - 4\Delta^2\,\mathrm{am}(2iu+iK')\ [6]. \tag{21}$$

С помощью этих двух равенств можно получить замкнутые выражения для $f_1(1)+f_2(1)$ и y_1-y_2. Согласно (18), для $x=1$ будем иметь

$$u_1 = -u_2 - K' - i\frac{K}{2}$$

и поэтому в силу (14) и (17) получим

$$f_1(1) + f_2(1) = -i\frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\cdot\frac{K}{4\pi}\left\{F(u_2) - F\left(u_2 + i\frac{K}{4}\right) + \right.$$
$$\left. + F\left(-u_2 - K' - i\frac{K}{2}\right) - F(-u_2-K')\right\},$$

$$y_1 - y_2 = -i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\cdot\frac{K^2}{8\pi^2}\left\{F'(u_2) - F'\left(u_2 + i\frac{K}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - F'\left(-u_2 - K' - i\frac{K}{2}\right) + F'(-u_2-K')\right\};$$

таким образом, из (20) и (21) получим

---

[3] Аналогичное равенство может быть установлено для плотности электричества в точке, где шар пересекается линией центров во второй раз.

$$f_1(1)+f_2(1)=\frac{1+\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{K}{2\pi}\{Z(2iu_2+iK')-Z(2iu_2+iK'-K)\};$$

$$y_1-y_2=\frac{1}{2}i\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\cdot\frac{K^2}{\pi^2}\{\Delta^2\operatorname{am}(2iu_2+iK')-\Delta^2\operatorname{am}(2iu_2+iK'-K)\};\quad(22)$$

при этом

$$u_2=\frac{K}{2\pi}\ln\sqrt{\xi}-i\frac{K}{4}.$$

Отсюда можно получить ряды для $f_1(1)+f_2(1)$ и y_1-y_2, которые сходятся тем быстрее, чем ближе q к 1. Я ограничусь рядом для y_1-y_2. Используя то, что

$$\Delta^2\operatorname{am}(iu+K,\ k)=1-\Delta^2\operatorname{am}(u+K',\ k'),$$

и полагая

$$q_1=e^{-\pi K/K'},\quad \text{т. е.}\quad \ln q_1=\frac{\pi^2}{\ln q},$$

и

$$\alpha=\frac{1}{2}\pi\frac{\ln\xi}{\ln q},$$

найдем y_1-y_2:

$$y_1-y_2=\frac{\pi^2}{\ln^2 q}\frac{(1+\xi)^2}{(1-\xi)\sqrt{\xi}}\left\{\frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1}\sin\alpha+\right.$$
$$\left.+2\frac{\sqrt{q_1^2}}{1+q_1^2}\sin 2\alpha+3\frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^3}\sin 3\alpha+\ \dots\right\}.$$

Если радиусы обоих шаров одинаковы, т. е. $b=1$, то, согласно (4), будем иметь

$$\xi+1/\xi=c,$$

а значит, в силу (6)

$$\xi=q,$$

поэтому

$$\alpha=\pi/2,$$

таким образом, будем иметь

$$y_1-y_2=\frac{\pi^2}{\ln^2 q}\frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}}\left\{\frac{\sqrt{q_1}}{1+q_1}-3\frac{\sqrt{q_1^3}}{1+q_1^3}+\ \dots\right\}.\quad(23)$$

Если к этому случаю применить непосредственно (22) и заметить, что в нем

$$u_2=-\frac{1}{4}(K'+iK),$$

то получится

$$y_1-y_2=\frac{(1+q)^2}{(1-q)\sqrt{q}}kk'\frac{K^2}{\pi^2}.$$

Если еще предположить, что расстояние между шарами бесконечно мало, т. е. что бесконечно мало $1-q$, то из (23), опуская члены высшего порядка, получим

$$y_1-y_2=-\frac{4\pi^2}{\ln^3 q}e^{\pi^2/2\ln q},$$

или, если ввести употребляемый Пуассоном символ δ, полагая

$$2\ln q=\delta,$$

то $y_1-y_2=-32\pi^2\frac{1}{\delta^3}e^{\pi^2/\delta}$.

Как это было уже отмечено во Введении, Пуассон нашел, что эта величина имеет порядок δ^4; Плана, указав на ошибку, которую допустил Пуассон при выводе этого результата, сам пришел к неправильному заключению, что эта величина имеет порядок δ^6.

4. Ряды (16) и (19) для $G(t)$ и $H(t)$ сходятся очень медленно, если расстояние между шарами очень мало и вследствие этого ξ и q близки к 1. Для этого случая представим эти функции новыми рядами. Для того чтобы найти разложение функции $F(u)$, ведущее к искомым разложениям, будем исходить из двойного произведения

$$\prod_1^m\prod_1^N\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right),$$

в котором μ и ν — целые числа, пробегающие все значения соответственно от 1 до m и от 1 до N; при этом пусть m и N — бесконечно велики, причем N пусть будет более высокого порядка, чем m.

Будем искать отношение этого двойного произведения и такого, которое получается из него, если верхние пределы m и N заменить на M и n, считая, что M того же порядка, что и N, а n — того же порядка, что и m.

Логарифм этого отношения равен

$$\sum_1^m\sum_{n+1}^N\ln\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)-\sum_1^n\sum_{m+1}^M\ln\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)[7].$$

Так как под знаком логарифма стоят величины, бесконечно близкие к 1, то для $\ln\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)$ имеем сходящийся ряд

$$u\frac{1}{K'\mu-iK\nu}-\frac{1}{2}u^2\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^2}+\frac{1}{3}u^3\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3}-\;\ldots.$$

Поставим этот ряд под знаки сумм и исследуем отдельные члены, которые содержат различные степени u. При этом используем некоторую формулу из теории Г-функций, которой ради ясности предпошлем [нижеследующее].

Если a — конечная величина, а h — бесконечно большое число, то[4]

[4] *Gauss C. F.* Circa seriem infinitam etc. // Comment. soc. reg. sci. Göttingensis recentiores. 1811—1813. Vol. II.

$$\frac{a+1}{1}\cdot\frac{a+2}{2}\cdot\ldots\ldots\frac{a+h}{h}=\frac{h^a}{\Gamma(1+a)}\quad [^8],$$

и это равенство справедливо, когда a бесконечно велико, но h имеет более высокий порядок, чем a. Отсюда следует

$$\sum_1^h \ln(a+h)-\sum_1^h \ln h - a\ln h = -\ln\Gamma(1+a)\quad [^9]. \tag{24}$$

Применим это равенство только к случаю, когда действительная часть a неотрицательна, и выберем логарифмы в левой части так, чтобы их мнимые части лежали между $-i\pi/2$ и $i\pi/2$; тогда, согласно Липшицу [5], будем иметь

$$\ln\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}\ln 2\pi + a\ln a - a + \frac{1}{2}\ln a + \frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{a} - \\ -\frac{B_2}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{a^3}+\ \ldots\ +(-1)^{\lambda-1}\frac{B_\lambda}{(2\lambda-1)\,2\lambda}\cdot\frac{1}{a^{2\lambda-1}}+V_\lambda. \tag{25}$$

Здесь логарифмы в правой части снова надо так выбирать, чтобы их мнимые части лежали между $-i\pi/2$ и $i\pi/2$, λ — произвольное число, а B_1, B_2, ... — числа Бернулли, т. е.

$$\frac{1}{2}x\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x = 1 - B_1\frac{x^2}{1\cdot 2} - B_2\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - B_3\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \ldots,$$

или

$$B_1=\frac{1}{6},\qquad B_2=\frac{1}{30},\qquad B_3=\frac{1}{42}\ldots;$$

далее

$$V_\lambda=\frac{2}{(2\pi)^{2\lambda+2}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{2\lambda}}\int_0^\infty\frac{y^{2\lambda}e^{-ay}}{s^2+\frac{y^2}{4\pi^2}}\,dy, \tag{26}$$

или

$$V_\lambda=\frac{B_{\lambda+1}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)}\cdot\frac{1}{\alpha^{2\lambda+1}}(\varepsilon+i\varepsilon'), \tag{27}$$

где α — действительная часть a, а ε и ε' лежат между -1 и 1.

Равенство (25) применим прежде всего к случаю, когда действительная или мнимая часть a являются бесконечно большими. Если действительная часть a бесконечно велика, то значение V_λ, заданное с помощью (27), указывает на то, что равенство (25), если в нем пренебречь V_λ, представляет значение $\ln\Gamma(1+a)$ с точностью до величины порядка $\alpha^{-(2\lambda+1)}$; если мнимая часть a бесконечно велика, то неисчезающие члены ряда (25) после отбрасывания V_λ дают значение $\ln\Gamma(1+a)$ с точностью до бесконечно малых величин. В справедливости этого утверждения убеждаются с помощью равенства (26), учитывая, что интегралы

[5] *Lipschitz R.* // J. reine und angew. Math. 1859. Bd. 56.

$$\int \psi(y)\sin(\beta y)\,dy \quad \text{и} \quad \int \psi(y)\cos(\beta y)\,dy,$$

взятые между какими-нибудь двумя не зависящими от β пределами, между которыми $\psi(y)$ не становится бесконечно большой, стремятся к нулю по мере увеличения β. Для того чтобы доказательство распространить и на случай, когда исчезает действительная часть a, используем равенство

$$\ln\Gamma(1+a) = \ln\Gamma(2+a) - \ln(1+a) \quad [10].$$

Для производных от V_λ по a имеют место выражения, аналогичные выражениям для V_λ, указанным в (26) и (27); отсюда следует, что ряды, полученные дифференцированием ряда (25), имеют свойства, аналогичные высказанным выше.

Если a и h конечны или бесконечно большие любого порядка, то будем иметь

$$\frac{a+1}{1}\cdot\frac{a+2}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a+h}{h} = \frac{\Gamma(1+h+a)}{\Gamma(1+h)\,\Gamma(1+a)} \quad [11]$$

и

$$\sum_1^h \ln(a+h) - \sum_1^h \ln h = \ln\Gamma(1+h+a) - \ln\Gamma(1+h) - \ln\Gamma(1+a), \tag{28}$$

для которого справедливо (25) при тех же условиях, что и в (24).

Предпослав это, имеем

$$\sum_{n+1}^{N} \frac{1}{K'\mu + iK\nu} = -\frac{i}{K}\sum_{1}^{N-n} \frac{1}{\nu + n - i\frac{K'}{K}\mu},$$

или, согласно (24), если вместе с Гауссом положить

$$\frac{d\ln\Gamma(1+a)}{da} = \psi(a),$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{K'\mu + iK\nu} = -\frac{\nu}{K}\ln(N-n) + \frac{i}{K}\psi\left(n - i\frac{K'}{K}\mu\right).$$

Если использовать (25) и опустить члены, бесконечно малые относительно $1/n$, что можно себе позволить, ибо их вклад в двойную сумму может быть лишь бесконечно малым, то последняя величина станет равной

$$-\frac{i}{K}\ln N + \frac{i}{K}\ln\left(n - i\frac{K'}{K}\mu\right) + \frac{i}{2K}\,\frac{1}{n - i\frac{K'}{K}\mu}.$$

Учитывая, что

$$\ln\left(n - i\frac{K'}{K}\mu\right) = \ln\left(-i\frac{K'}{K}\right) + \ln\left(\mu + i\frac{K}{K'}n\right)$$

и

$$\frac{1}{n - i\frac{K'}{K}\mu} = i\frac{K}{K'} \cdot \frac{1}{\mu + i\frac{K}{K'}n},$$

с помощью (28) и (25) найдем

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{K'\mu + iK\nu} = \frac{1}{K}\left\{-m\ln N - \left(m+\frac{1}{2}\right)\ln m + m\ln\left(-i\frac{K'}{K}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1}^{m}\ln\mu - \frac{1}{2}\ln 2\pi\right\} + \frac{i}{2KK'}\left\{(2m+1)K' + (2n+1)iK\ln\frac{mK' + niK}{K'} - \right.$$

$$\left. - (K' + (2n+1)iK)\ln\frac{niK}{K'}\right\},$$

где все встречающиеся логарифмы надо выбирать так, чтобы их мнимые части лежали между $-i\pi/2$ и $i\pi/2$. Переставляя в этом равенстве K с K', μ и ν, m и n, заменяя M на N и i на $(-i)$ и деля результат на i, получим

$$\sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{K'\mu + iK\nu} =$$

$$= \frac{1}{K'}\left\{n\ln M + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n\ln\left(i\frac{K}{K'}\right) - \sum_{1}^{n}\ln\nu + \frac{1}{2}\ln 2\pi\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2KK'}\left\{((2m+1)K' + (2n+1)Ki)\ln\frac{nK - miK'}{K} - \right.$$

$$\left. - ((2m+1)K' + iK)\ln\left(-\frac{miK'}{K}\right)\right\}.$$

Отсюда получается

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{K'\mu + iK\nu} - \sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{K'\mu + iK\nu} = -\frac{i}{K}m\ln N +$$

$$+ \frac{i}{K}\sum_{1}^{m}\ln\mu - \frac{i}{K}\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln i\frac{K}{K'} - \frac{1}{2K'}\ln 2\pi m -$$

$$- \frac{1}{K'}n\ln M + \frac{1}{K'}\sum_{1}^{m}\ln\nu + \frac{1}{K'}\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln i\frac{K}{K'} - \frac{i}{2K}\ln 2\pi n.$$

Аналогичным путем находим, что

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{(K'\mu + iK\nu)^2} - \sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{(K'\mu + iK\nu)^2} = \frac{i}{KK'}\ln\frac{inK}{mK'},$$

и выражения

$$\sum_{1}^{m}\sum_{n+1}^{N}\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3}, \qquad \sum_{1}^{n}\sum_{m+1}^{M}\frac{1}{(K'\mu+iK\nu)^3},$$

как и те, которые получаются из них, если вместо показателя степени 3 подставить больший, все обращаются в нуль.

Отсюда следует

$$\frac{iu}{K}\left\{m\ln N-\sum_{1}^{m}\ln\mu+\left(m+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{iK}{K'}-\frac{iK}{2K'}\ln 2\pi m\right\}-\frac{iu^2}{2KK'}\ln mK'+$$
$$+\ln\prod_{1}^{m}\prod_{1}^{N}\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)=\frac{u}{K'}\left\{-n\ln M+\sum_{1}^{n}\ln\nu+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{iK}{K'}-\right.$$
$$\left.-\frac{iK'}{2K}\ln 2\pi n\right\}-\frac{iu^2}{2KK'}\ln niK+\ln\prod_{1}^{n}\prod_{1}^{M}\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right).$$

Прибавляя к этому равенству то, которое получается из данного заменой i на $-i$, и сохраняя u неизменным, получим

$$u\left(\frac{1}{K'}\ln 2\pi m-\frac{\pi}{K}\left(m+\frac{1}{2}\right)\right)-\frac{\pi u^2}{2KK'}+\ln\prod_{1}^{m}\prod_{1}^{N}\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\right)=\frac{2u}{K'}\left(-n\ln M+\sum_{1}^{n}\ln\nu+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{K}{K'}\right)+$$
$$+\ln\prod_{1}^{n}\prod_{1}^{M}\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)\left(1+\frac{u}{K'\mu-iK\nu}\right). \tag{29}$$

Но здесь

$$\prod_{1}^{N}\left(1+\frac{u}{K'\mu+iK\nu}\right)=\prod_{1}^{N}\frac{\nu-\dfrac{u+K'\mu}{K}i}{\nu-\dfrac{K'\mu}{K}i},$$

или, согласно (24), это равно

$$N\cdot e^{-iu/K}\frac{\Gamma\left(1-\dfrac{K'\mu}{K}i\right)}{\Gamma\left(1-\dfrac{u+K'\mu}{K}i\right)}\ [12].$$

Так как далее

$$\Gamma(1-a)\,\Gamma(1+a)=\frac{\pi a}{\sin\pi a}, \tag{30}$$

$$\sin ix=\frac{i}{2}e^{x}(1-e^{-2x})$$

и

$$q = e^{-\pi K'/K},$$

то отсюда следует при вторичном учете (24), что

$$\prod_1^m \prod_1^N \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)\left(1 + \frac{u}{K'\mu - iK\nu}\right) =$$
$$= e^{-\frac{u}{K'}\ln m \frac{u}{K} m\pi}\,\Gamma\left(1 + \frac{u}{K'}\right)\prod_1^m \frac{1 - q^{2\mu}e^{-2\pi u/K}}{1 - q^{2\mu}}.$$

Далее, из (24) получаем

$$\prod_1^n \prod_1^M \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)\left(1 + \frac{u}{K'\mu - iK\nu}\right) =$$
$$= e^{\frac{2u}{K'} n \ln M} \prod_1^n \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu i K}{K'}\right)\Gamma\left(1 - \frac{\nu i K}{K'}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{u + \nu i K}{K'}\right)\Gamma\left(1 + \frac{u - \nu i K}{K'}\right)}.$$

Подставляя эти значения двойных произведений в (29) и дифференцируя полученный результат по u с учетом (11), найдем

$$F(u) = \frac{2}{K'}\left(\sum_1^n \ln\nu + n\ln\frac{K}{K'}\right) + \frac{1}{K'}\ln\frac{K}{2\pi K'} + \frac{\pi}{2K} + \frac{u\pi}{KK'} -$$
$$- \frac{d}{du}\ln\Gamma\left(1 + \frac{u}{K'}\right)\prod_1^n \Gamma\left(1 + \frac{u + \nu i K}{K'}\right)\Gamma\left(1 + \frac{u - \nu i K}{K'}\right). \qquad (31)$$

Это равенство можно использовать для того, чтобы с помощью (25) новым способом разложить $F(u)$; именно, можно найти два разложения $F(u)$: одно — с сохранением $\ln\Gamma(1 + u/K')$, другое — в котором это выражение разложено в ряд.

Равенство (25) предполагает, что действительная часть a неотрицательна; в соответствии с этим примем теперь, что действительная часть u неотрицательна.

Опуская в (25) сперва остаток V_λ, обозначая через U некоторую функцию переменной ζ, а через Ω — ряд

$$U - \frac{1}{2}\ln q\frac{dU}{d\zeta} + \frac{B_1}{1\cdot 2}\ln^2 q\frac{d^2U}{d\zeta^2} - \frac{B_2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ln^4 q\frac{d^4U}{d\zeta^4} +$$
$$+ \frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\ln^6 q\frac{d^6U}{d\zeta^6} - \ldots, \qquad (32)$$

с учетом (24) и равенств, полученных из (24) повторным дифференцированием, найдем

$$K'F(u) = -\ln(-2\ln q) - \frac{1}{2}\ln q + \zeta - \psi\left(\frac{u}{K'}\right) + \Omega, \qquad (33)$$

где

$$U = \ln\Gamma\left(1 + \frac{i\zeta}{\pi}\right)\Gamma\left(1 - \frac{i\zeta}{\pi}\right), \qquad \zeta = \frac{u\pi}{K}.$$

При этом надлежит еще определить, какое нужно взять значение логарифма, через который выражается U. Будем считать, что мнимая часть a лежит между $-iK$ и iK. При этом условии при выводе равенств (33) будем применять (24) только для случая, когда действительная часть a больше -1; в таких случаях для встречающегося там $\ln \Gamma(1+a)$ справедливо равенство, получающееся выражением $\ln \Gamma(a)$ из (25) и равенства

$$\ln \Gamma(a) = \ln \Gamma(1+a) - \ln a$$

и последующей заменой a на $1+a$. Отсюда следует, что $\ln \Gamma(1+a)$ изменяется непрерывно с изменением a и что он действителен при действительных значениях a; и далее, что в (33) надо брать то значение логарифма, выражающего U, которое изменяется непрерывно с изменением ζ и является действительным, если действительная часть ζ равна нулю. Это с учетом (30) позволяет переписать U в виде

$$U = \ln \frac{i\zeta}{\sin i\zeta}$$

или

$$U = \ln \frac{2\zeta}{e^{\zeta} - e^{-\zeta}},$$

где нужно брать то значение логарифма, мнимая часть которого лежит между $-i\pi$ и $i\pi$.

Разложив в (31) $\Gamma\left(1 + \frac{u}{K'}\right)$ посредством (25), найдем

$$K'F(u) = \Omega,$$

где Ω снова определяется рядом (32) и

$$U = -\ln(1 - e^{-2\zeta}), \qquad (34)$$

$$\zeta = \frac{u\pi}{K};$$

и здесь при образовании U берут то значение логарифма, мнимая часть которого лежит между $-i\pi$ и $i\pi$.

Учитывая остаток V_λ ряда (25) при образовании рядов (33) и (34) для $F(u)$, получим с помощью ряда (26) выражение для его остатка. Используя равенство

$$\int_0^\infty f(y)\{\cos 2y + \cos 4y + \ \dots \ + \cos 2ny\}\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^\infty f(y)\, dy + \frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2} f(0) + f(\pi) + f(2\pi) + f(3\pi) + \ \dots\right\},$$

в котором n означает бесконечно большое число, представим это выражение в форме, аналогичной той, в которой V_λ дано в (27), в форме, которая показывает, что его значение может быть сделано бесконечно малым, если с помощью (12) постоянно увеличивать действительную часть u.

Если рассматриваемые выражения остатков не подвергать указанным преобразованиям и принять во внимание соображения, высказанные выше в отношении выражения V_λ в (26), то увидим, что ряды для $F(u)$ в (33) и (34) имеют еще и другое значение. Именно, если K бесконечно велико, то неисчезающие члены ряда (33) дают значение $F(u)$ с точностью до бесконечно малых величин; если сверх того мнимая часть u порядка iK, то это имеет место и для ряда (34). Поэтому, если K бесконечно велико, то

$$K'F(u) = -\ln(-2\ln q) - \psi\left(\frac{u}{K'}\right) + \ln\frac{2\zeta}{1-e^{-2\zeta}}, \tag{35}$$

и если сверх того мнимая часть u порядка iK, то

$$K'F(u) = -\ln(1-e^{-2\zeta}), \tag{36}$$

где

$$\zeta = u\pi/K.$$

С помощью (33) и (34) легко образовать равенства, которые можно использовать вместо равенств (16) и (19) для вычисления $f(x)$ и y.

Положив

$$f(x) = \left(\frac{1}{\xi\sqrt{z}} - \xi\sqrt{z}\right)\frac{1}{4\ln q}\left\{\ln(-\ln q) + \psi\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right) - J(t)\right\},$$

найдем

$$J(t) = J(qt) - \ln q\left(\frac{4q^2t^2}{1-q^4t^4} + \frac{1}{\ln qt}\right)$$

и $J(t) = \Omega$, где $U = \ln\frac{\zeta(1+e^{-2\zeta})}{1-e^{-2\zeta}}$. Для величины $H(t)$, заданной с помощью (19), получим

$$H(t) = -\frac{1}{2\ln q}\,\Omega, \qquad \text{где } U = \frac{e^{-2\zeta}}{1+e^{-4\zeta}}.$$

Здесь через Ω обозначен ряд (32) и $\zeta = -\ln t$; значение t указано в (16) и (19).

Для U, встречающегося в ряде для $H(t)$, имеем

$$U = t^2\frac{1}{1+t^4}, \qquad \frac{dU}{d\zeta} = -2t^2\frac{1-t^4}{(1+t^4)^2}, \qquad \frac{d^2U}{d\zeta^2} = 3t^2\frac{1-6t^4+t^8}{(1+t^4)^3},$$

и вообще

$$\frac{d^nU}{d\zeta^n} = (-2)^n t^2\,\frac{1+A_nt^4+B_nt^8+C_nt^{12}+\ldots}{(1+t^4)^{n+1}},$$

где

$$A_n = (n+1) - 3^n,$$

$$B_n = \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} - (n+1)3^n + 5^n,$$

$$C_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{(n+1)n}{1\cdot 2}3^n + (n+1)5^n - 7^n,$$

. . . .

В заключение рассмотрим еще случай, когда оба шара касаются друг друга и их общий потенциал имеет на них одинаковые значения.

Предполагая расстояние между шарами бесконечно малым и обозначая его через ε, т. е. полагая

$$c = 1 + b + \varepsilon,$$

найдем из (4) и (6)

$$\xi = 1 - \sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon}, \qquad q = 1 - \sqrt{\frac{1+b}{2b}\varepsilon},$$

а из (5) и (15) в предположении, что $1-x$ бесконечно велика по сравнению с $\sqrt{\varepsilon}$, найдем

$$z = 1 - \frac{2x}{1-x}\sqrt{\frac{2b}{1+b}\varepsilon}, \qquad \frac{u_1}{K'} = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{1}{1-x} - 1, \qquad \frac{u_2}{K'} = \frac{b}{1+b}\cdot\frac{x}{1-x}.$$

Согласно (1), имеем

$$f(x) = h\,(f_1(x) - f_2(x)),$$

и поэтому в силу (14), (35) и (36)

$$f(x) = h\,\frac{1}{1+b}\cdot\frac{1}{1-x}\left\{\psi\left(\frac{b}{1+b}\cdot\frac{x}{1-x}\right) - \psi\left(\frac{b}{1+b}\cdot\frac{1}{1-x} - 1\right)\right\}. \qquad (37)$$

Это равенство справедливо и для таких значений x, для которых $u_1 < 0$, несмотря на то, что при выводе (35) и (36) предполагалось, что действительная часть u положительна. В справедливости этого утверждения легко убедиться с помощью равенства (12) и равенства

$$\psi(a-1) = \psi(a) - 1/a.$$

Равенство (37) совпадает с равенством (15) в сочинении Плана.

11.
К ТЕОРИИ РАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА ДВУХ ПРОВОДЯЩИХ ШАРАХ *

Задача о равновесном распределении электричества на двух проводящих шарах была поставлена Пуассоном[1] и решалась им самим и другими в различных направлениях. Особый интерес в ней вызывает определение зарядов шаров, силы взаимодействия между ними, значения потенциалов на каждом из них.

Пусть a и b — радиусы данных шаров, c — расстояние между их центрами, h и g — значения потенциалов внутри них, E_1 и E_2 — их заряды, F — сила, с которой шары отталкиваются друг от друга; тогда

$$E_1 = a_{11}g + a_{12}h, \qquad E_2 = a_{21}g + a_{22}h,$$

* Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln // Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1885. S. 1007—1013. Перевод М. Г. Шраера.

[1] *Poisson S. D.* // Mém. l'Institut France. 1811. T. 12 (1). P. 1; (2). P. 163.

$$2F = g^2 \frac{\partial a_{11}}{\partial c} + 2hg \frac{\partial a_{12}}{\partial c} + h^2 \frac{\partial a_{22}}{\partial c},$$

где $a_{21}=a_{12}$ и a_{11}, a_{12}, a_{22} — искомые функции от a, b, c.

Из уравнений, полученных мною в работе «О распределении электричества на двух проводящих шарах» [2], найдем следующие выражения для a_{11}, a_{12}, a_{22}. Пусть $q\,(0 < q < 1)$—корень уравнения $q^2 + \frac{1}{q^2} = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{ab}$, или, что то же, уравнения $q + \frac{1}{q} = \sqrt{\frac{c^2-(a-b)^2}{ab}}$. Если положить $\xi = \frac{a+bq^2}{c}$, $\eta = \frac{b+aq^2}{c}$, то $\xi\eta = q^2$, и тогда $a_{11} = a(1-\xi^2)\left\{\frac{1}{1-\xi^2} + \frac{q^2}{1-\xi^2 q^4} + \frac{q^4}{1-\xi^2 q^8} + \ldots\right\}$,

$$-a_{12} = \frac{ab}{c}(1-q^4)\left\{\frac{1}{1-q^4} + \frac{q^2}{1-q^8} + \frac{q^4}{1-q^{12}} + \ldots\right\},$$

$$a_{22} = b(1-\eta^2)\left\{\frac{1}{1-\eta^2} + \frac{q^2}{1-\eta^2 q^4} + \frac{q^4}{1-\eta^2 q^8} + \ldots\right\}.$$

В. Томсон [3] указал для a_{11}, a_{12}, a_{22} формулы, очень удобные для вычислений, если расстояние между шарами достаточно велико по сравнению с их радиусами, и с их помощью для сконструированного им элетрометра составил таблицу значений a_{11}, a_{12}, a_{22}, $\partial a_{11}/\partial c$, $\partial a_{12}/\partial c$, $\partial a_{22}/\partial c$ для случая $a=b=1$ и c, принимающего одно из значений 2, 1; 2,2; . . .; 4,0. Вот эти формулы:

$$a_{11} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} + \ldots; \qquad -a_{12} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3} + \ldots;$$

$$a_{22} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} + \frac{1}{Q_3} + \ldots;$$

$$P_{n+1} = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab} P_n - P_{n-1}; \qquad Q_{n+1} = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab} Q_n - Q_{n-1};$$

$$S_{n+1} = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab} S_n - S_{n-1};$$

и

$$P_1 = \frac{1}{a}; \qquad P_2 = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab} P_1 + \frac{1}{b};$$

$$Q_1 = \frac{1}{b}; \qquad Q_2 = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab} Q_1 + \frac{1}{a};$$

$$S_1 = \frac{c}{ab}; \qquad S_2 = \frac{c^2-a^2-b^2}{ab} S_1.$$

Вместо формул для P_2, Q_2, S_2 можно записать более простые:

$$P_0 = -1/b, \qquad Q_0 = -1/a, \qquad S_0 = 0,$$

---

[2] См. статью 10 наст. издания. — *Примеч. ред.*

[3] *Thomson W.* // Phil. Mag. 1853. Vol. 5 (4). P. 287.

если формулы для P_{n+1}, Q_{n+1}, S_{n+1}, считать пригодными и для $n=1$. После этого легко вычислить последовательно члены разложений, найденных В. Томсоном для a_{11}, a_{12}, a_{22}.

По отдельности эти члены совпадают с рядами, которые были указаны выше. Для обоснования этого утверждения для ряда, с помощью которого определяется a_{11}, заметим, что с введением величины q рекуррентное соотношение для P_n можно переписать в виде

$$P_{n+1}=\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)P_n-P_{n-1},$$

откуда следует, что

$$P_n=Aq^{2n}+B\frac{1}{q^{2n}},$$

где A и B — постоянные, т. е. величины, не зависящие от n. Их можно найти, если в последней формуле положить $n=0$, а затем $n=1$. Это дает

$$A+B=-\frac{1}{b},\qquad Aq^2+B\frac{1}{q^2}=\frac{1}{a},$$

откуда

$$A\left(q^2-\frac{1}{q^2}\right)=\frac{1}{a}+\frac{1}{bq^2};\qquad B\left(\frac{1}{q^2}-q^2\right)=\frac{1}{a}+\frac{q^2}{b}.$$

Из соотношений

$$\xi=\frac{a+bq^2}{c},\qquad \frac{1}{\xi}=\frac{a+b/q^2}{c}$$

следует, что

$$\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\,\frac{\xi^2/q^2-q^2}{1-\xi^2},$$

поэтому

$$A=-\frac{1}{a}\,\frac{\xi^2}{(1-\xi^2)\,q^2},\qquad B=\frac{1}{a}\,\frac{q^2}{1-\xi^2}$$

и

$$P_n=\frac{1}{a\,(1-\xi^2)}\left(\frac{1}{q^{2(n-1)}}-\xi^2q^{2(n-1)}\right)$$

или

$$\frac{1}{P_n}=a\,(1-\xi^2)\,\frac{q^{2(n-1)}}{1-\xi^2q^{4(n-1)}}.$$

Но это и есть n член указанного выше разложения для a_{11}. Аналогичные вычисления можно провести и для a_{12}, a_{22}.

Эти ряды сходятся тем быстрее, чем меньше q, т. е. чем больше расстояние между шарами по отношению к их радиусам [1].

Чтобы можно было судить об этой сходимости в отдельных случаях, рас-

смотрим несколько первых членов разложения для a_{11} в случае шаров одинакового радиуса при нескольких значениях расстояния между их центрами, встречающихся в таблице В. Томсона (при $a=b=1$)

	$c=2,1$	$c=2,3$	$c=4,0$
$1/P_1$	1	1	1
$1/P_2$	0,2932	0,1904	0,0067
$1/P_3$	0,1386	0,0469	0,0048
$1/P_4$	0,0715	0,0117	0,0004
$1/P_5$	0,0377	0,0029	

Отсюда видно, что при малых расстояниях между шарами, взятых из таблицы В. Томсона, для достижения надлежащей точности нужно учитывать значительное число членов разложения.

Рассматриваемые ряды могут быть преобразованы в другие, значительно быстрее сходящиеся. Все эти ряды с точностью до определенных множителей имеют вид

$$\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta^2}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\beta^3}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots,$$

где α, β, γ — правильные дроби. Обозначая этот ряд через R, получим еще

$$R=\frac{1}{1-\alpha}+\beta+\beta^2+\beta^3+\ldots+\frac{\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\gamma}+\frac{\alpha\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\alpha\beta^3\gamma^3}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots,$$

или, если мы первые члены объединим в один,

$$R=\frac{1-\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\alpha\beta\gamma R_1, \quad \text{где} \quad R_1=\frac{1}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta\gamma}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots[^2].$$

Отсюда видно, что R_1 получается из R заменой α на $\alpha\gamma$ и β на $\beta\gamma$. Если обозначить через R_2 ряд, в который преобразуется R_1 той же подстановкой, через R_3 — ряд, который может быть получен из R_2 той же подстановкой и т. д., то мы получим

$$R_1=\frac{1-\alpha\beta\gamma^2}{(1-\alpha\gamma)(1-\beta\gamma)}+\alpha\beta\gamma^3R_2, \qquad R_2=\frac{1-\alpha\beta\gamma^4}{(1-\alpha\gamma^2)(1-\beta\gamma^2)}+\alpha\beta\gamma^5R_3.$$

. . . .

Умножив равенства, выражающие R, R_1, R_2, . . . через R_1, R_2, R_3, . . . соответственно на 1, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha^2\beta^2\gamma^4$, $\alpha^3\beta^3\gamma^9$, . . . и сложив полученные результаты, найдем [4]

[4] Особенно простой случай равенства первоначального и последнего разложений для R получается, если положить $\alpha=\beta=\gamma=x$. После умножения на x оно примет вид

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots+\frac{x^n}{1-x^n}=$$
$$=x\frac{1+x}{1-x}+x^4\frac{1+x^2}{1-x^2}+\ldots+x^{n^2}\frac{1+x^n}{1-x^n}+\ldots,$$

указанный еще Клаузеном в «Crelle's Journ.» (Bd. 3. S. 97).

$$R=\frac{1-\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\alpha\beta\gamma\frac{1-\alpha\beta\gamma^2}{(1-\alpha\gamma)(1-\beta\gamma)}+\alpha^2\beta^2\gamma^4\frac{1-\alpha\beta\gamma^4}{(1-\alpha\gamma^2)(1-\beta\gamma^2)}+\ \ldots$$

Тогда $(n+1)$-член этого бесконечного ряда имеет вид

$$\alpha^n\beta^n\gamma^{n^2}\frac{1-\alpha\beta\gamma^{2n}}{(1-\alpha\gamma^n)(1-\beta\gamma^n)}.$$

Коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, могут быть теперь представлены следующим образом:

$$a_{11}=a(1-\xi^2)R \qquad (\alpha=\xi^2,\ \beta=q^2,\ \gamma=q^4);$$

$$-a_{12}=\frac{ab}{c}(1-q^4)R \qquad (\alpha=q^4,\ \beta=q^2,\ \gamma=q^4);$$

$$a_{22}=b(1-\eta^2)R \qquad (\alpha=\eta^2,\ \beta=q^2,\ \gamma=q^4).$$

Если шары имеют одинаковые радиусы $(a=b)$, так что

$$\xi=\eta=q, \qquad q+\frac{1}{q}=\frac{c}{a}$$

и если положить $a=1$, то будем иметь

$$2q=c-\sqrt{c^2-4},$$

$$a_{11}=a_{22}=1+q^2+q^8(1-q^2)\frac{1+q^6}{1-q^6}+q^{24}(1-q^2)\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}}+\ \ldots$$

с n-членом

$$q^{4n(n-1)}(1-q^2)\frac{1+q^{4n-2}}{1-q^{4n-2}}$$

и

$$-a_{12}=\frac{1}{c}+q^3+q^{11}\frac{(1-q^2)(1-q^{14})}{(1-q^6)(1-q^8)}+q^{29}\frac{(1-q^2)(1-q^{22})}{(1-q^{10})(1-q^{22})}+\ \ldots$$

с n-членом

$$q^{4n^2-2n-1}\frac{(1-q^2)(1-q^{8n-2})}{(1-q^{4n-2})(1-q^{4n})}.$$

Используя то, что для случая $a=b=1$ $\partial q/\partial c=-q^2/(1-q^2)$, найдем, что

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c}=\frac{q^3}{1-q^2}+q^9\frac{1+q^6}{1-q^6}\left(4-\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{6q^6}{1-q^{12}}\right)+q^{25}\frac{1+q^{10}}{1-q^{10}}\times$$

$$\times\left(12-\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{10q^{10}}{1-q^{20}}\right)+q^{49}\frac{1+q^{14}}{1-q^{14}}\left(24-\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{14q^{14}}{1-q^{28}}\right)$$

. . . .

$$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c}=\frac{1}{2c^2}+\frac{3}{2}\frac{q^4}{1-q^2}+$$

$$+ q^{12}\frac{1-q^{14}}{(1-q^{6})(1-q^{8})}\left(\frac{11}{2}-\frac{q^{2}}{1-q^{2}}+\frac{3q^{6}}{1-q^{6}}+\frac{4q^{8}}{1-q^{8}}-\frac{7q^{14}}{1-q^{14}}\right)+$$

$$+ q^{30}\frac{1-q^{22}}{(1-q^{10})(1-q^{12})}\left(\frac{29}{2}-\frac{q^{2}}{1-q^{2}}+\frac{5q^{10}}{1-q^{10}}+\frac{6q^{12}}{1-q^{12}}-\frac{11q^{22}}{1-q^{22}}\right)+$$

$$+ q^{56}\frac{1-q^{30}}{(1-q^{14})(1-q^{16})}\left(\frac{55}{2}-\frac{q^{2}}{1-q^{2}}+\frac{7q^{14}}{1-q^{14}}+\frac{8q^{16}}{1-q^{16}}-\frac{15q^{30}}{1-q^{30}}\right)$$

. . . .

Для того чтобы судить о сходимости этих рядов, я подсчитал сумму их нескольких первых членов при выбранных выше значениях c [5]:

	$c=2{,}1$	$c=2{,}5$	$c=4{,}0$
	1,532672	1,250000	1,071797
	0,051021	0,003024	0,000025
	0,000266		
$a_{11}=$	1,58396	1,25302*	1,07182
	0,864958	0,525000	0,269239
	0,018512	0,000374	
	0,000054		
$-a_{12}=$	0,88352*	0,52537	0,26924
	0,831894	0,166667	0,020726
	0,301853	0,007577	0,000028
	0,004685		
	0,000005		
$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c}=$	1,13844	0,17424*	0,02075
	1,024108	0,205000	0,039580
	0,149131	0,001302	0,000001
	0,001153		
	0,000001		
$\frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c}=$	1,17439	0,20630	0,03958

Отсюда, между прочим, видно, что при достаточно больших расстояниях между шарами рассматриваемые коэффициенты могут быть представлены выражениями

$$a_{11}=1+q^{2},\qquad -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial c}=\frac{q^{3}}{1-q^{2}},$$

$$-a_{12}=\frac{1}{c}+q^{3},\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial a_{12}}{\partial c}=\frac{1}{2c^{2}}+\frac{3}{2}\,\frac{q^{4}}{1-q^{2}}.$$

---

[5] Значения сумм рядов, помеченные звездочкой, не совсем совпадают с вычисленными В. Томсоном в его таблице. Вместо них там стоят соотв. числа 1,25324; 0,88175; 0,17432.

12.
К ТЕОРИИ КОНДЕНСАТОРА *

В самом обычном и простейшем виде предназначенный для измерений конденсатор состоит из двух одинаковых круглых металлических пластин, разделенных небольшим промежутком и расположенных так, что они имеют общую ось.

Задача теории конденсаторов состоит в определении количеств электричества, которые содержат обе пластины при заданных различных значениях потенциалов. Найти эти количества электричества приближенно не составляет особого труда. Действительно, приближенно можно считать, что электричество имеется лишь на сторонах пластин, обращенных друг к другу, и распределено по этим поверхностям с равномерной плотностью (на одной пластине положительное электричество, на другой — отрицательное). Абсолютная величина количества электричества равна разности потенциалов пластин, деленной на расстояние между ними и на 4π. Лишь у самого края пластин плотность электричества значительно отличается от этого приближения.

Более точное решение задачи теории конденсатора впервые было дано Клаузиусом [1], но лишь в предположении, что толщина пластин пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием между ними (в большинстве опытов такое предположение не выполняется). Вычисления, с помощью которых Клаузиус пришел к своему результату, очень сложны.

В своем докладе Академии от 23 апреля 1868 г. о разрывных движениях жидкости Гельмгольц сообщил о методе, приводящем к тому же результату гораздо более простым путем. Метод Гельмгольца основан на теории функции комплексного переменного, или, что то же, на теории конформного отображения одного куска плоской поверхности на другой.

Этот метод позволяет учитывать и толщину пластин конденсатора, если воспользоваться приемом, предложенным Шварцем для конформного отображения одного плоского многоугольника, ограниченного отрезками прямых, на другой такой же многоугольник. Те же средства позволяют развить теорию конденсатора, построенного Вильямом Томсоном. В этом конденсаторе имеется так называемое предохранительное кольцо, и от более простых конденсаторов он отличается тем, что позволяет не опасаться влияния внешних электрических сил на части конденсатора.

Пусть φ — потенциал электрических масс, распределенных симметрично относительно оси, зависящий от положения точки, отстоящей на расстояние ρ от этой оси, с ординатой y, параллельной этой оси. Тогда φ — функция от ρ и y, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}=0,$$

---

* Zur Theorie des Condensators // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882, S. 101—117. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] *Clausius R.* // Ann. Phys. 1852. Bd. 86. S. 161—205.

или, что то же, уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right).$$

Таким образом, существует функция от y и ρ (обозначим ее, например, ψ), такая, что откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho},\tag{1}$$

откуда

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0.$$

Из уравнений (1) следует также, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0.$$

Это означает, что $\psi=\mathrm{const}$ — уравнение силовых линий, т. е. линий, ортогональных поверхностям равного потенциала.

Пусть электричество, потенциал которого обозначен через φ, распределяется по проводящему телу вращения с осью y. Пусть dl — элемент меридиана на поверхности проводника, n — внешняя нормаль к dl. Тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=0,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial n}=0,$$

где

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(n,\ y),\qquad \frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{\partial\psi}{\partial l}\cos(l,\ \rho),$$

причем l означает любое из двух направлений элемента dl. Первое из уравнений (1) преобразуется к виду

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial n}\cos(n,\ y)=\frac{\partial\psi}{\partial l}\cos(l,\ \rho).$$

Заметим, что $\cos(n,\ y)=\pm\cos(l,\ \rho)$. Если направление l выбрать так, что угол $(l,\ \rho)$ будет острым или тупым, то угол $(n,\ y)$ будет соответственно острым или тупым. Тогда в соотношении между косинусами необходимо сохранить лишь верхний знак, и мы получаем

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial l}.$$

Если h — плотность электричества в точке поверхности проводника, то

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=-4\pi h$$

и

$$\frac{\partial\psi}{\partial l}=-4\pi h\rho.$$

Умножив последнее уравнение на dl и проинтегрировав по l от меньшего значения l' до большего значения l'', получим

$$2e = \psi' - \psi'', \tag{2}$$

где e — количество электричества [1] на поверхности кольца, ограниченного окружностями l' и l'', а ψ' и ψ'' — значения ψ, соответствующие граничным значениям l. Итак, чтобы найти распределение электричества на поверхности проводника, достаточно определить функцию ψ для всех точек этой поверхности.

Предположим теперь, что проводники — это две пластины конденсатора. Пусть $y=a$ и $y=a+b$ — плоскости, ограничивающие одну пластину, $y=-a$ и $y=-(a+b)$ — плоскости, ограничивающие другую пластину. Тогда b — толщина пластин, $2a$ — расстояние между ними. Пусть $\rho=R$ — боковая поверхность пластин. Предположим, что радиус R конечен, a и b — бесконечно малы и значение ψ определено с точностью до бесконечно малых величин. Достаточно рассмотреть случай, когда значения потенциала на пластинах равны $+1$ и -1, и случай, когда оба значения равны $+1$. Если определить ψ в этих двух случаях, то мы сможем определить ψ и при любых значениях потенциала.

Итак, пусть сначала $\varphi=1$ на той пластине, на которой y принимает положительные значения, а $\varphi=-1$ на другой пластине. Во всех точках пространства, расположенных от краев пластин на расстояниях, бесконечно больших по сравнению с a, значения φ и ψ можно задать следующим образом. Обозначим через ds элемент поверхности круга $y=0$, $\rho=R$, через r — расстояние от этого элемента до точки, в которой взяты φ и ψ, и положим

$$U = \int \frac{ds}{r}.$$

Для рассматриваемых нами точек, не лежащих между пластинами, справедливы соотношения

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \psi = \frac{1}{2\pi}\rho\frac{\partial U}{\partial \rho} + \text{const}.$$

Потенциал φ имеет простой геометрический смысл. Значение φ в точке (ρ, y) равно величине видимой из этой точки части поверхности, элемент которой мы обозначили ds, деленной на 2π и взятой со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, положительна или отрицательна координата y точки (ρ, y). Если кратчайшее расстояние от точки (ρ, y) до краев пластин бесконечно мало по сравнению с R, то, положив

$$R - \rho = x, \tag{3}$$

получим

$$\varphi = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \tag{4}$$

где многозначность арктангенса снимается условием обращения φ в нуль при $y=0$ и отрицательных x. Чтобы вычислить ψ в точках поверхности пластин, необходимо знать только значение U при $y=0$. Это значение равно

$$U = -4RE,$$

где

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}\, du, \qquad k = \frac{\rho}{R}.$$

Если обозначить

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}},$$

то

$$\frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k},$$

и поэтому

$$\psi = \frac{2}{\pi} R (E - K) + \text{const.} \tag{5}$$

Если задаваемая соотношением (3) величина x бесконечно мала по сравнению с R, то отсюда получаем

$$\psi = \frac{R}{\pi}\left(2 - \ln \frac{8R}{x}\right) + \text{const.} \tag{6}$$

Для точек, отстоящих от краев пластин на расстоянии, бесконечно большом по сравнению с a, и расположенных между пластинами, имеем

$$\varphi = y/a \tag{7}$$

и

$$\psi = \frac{\rho^2}{2a} - \text{const.} \tag{8}$$

Если значение x настолько мала, что величиной x^2/a можно пренебречь, то

$$\psi = \frac{R^2}{2a} - \frac{Rx}{a} - \text{const.} \tag{9}$$

Найдем теперь φ и ψ в пространстве для x и y порядка a. Уравнения (1) преобразуются для таких точек к виду

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -R \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = R \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Из них следует, что если

$$w = \varphi + i \frac{\psi}{R}, \qquad z = x + iy, \tag{10}$$

то w — функция от z. Это условие определяет φ полностью, а ψ — с точностью до аддитивной постоянной, если предположить, что на поверхности одной пластины $\varphi = 1$, на поверхности другой пластины $\varphi = -1$, снаружи пластин, там, где x и y бесконечно велики по сравнению с a, выполняется уравнение (4),

а между пластинами, там, где значения x бесконечно велики по сравнению с a, выполняется уравнение (7).

Если w определена как функция от z, то соотношение между z и w, если φ и ψ/R рассматривать как прямоугольные координаты точки, задает конформное отображение интересующей нас области в плоскости z на бесконечную полосу в плоскости w. Соотношение между w и z, осуществляющее это отображение, требуется найти, что и позволяет сделать привлечение упомянутого выше метода Шварца.

Введем третью комплексную переменную, которую обозначим t.
Пусть

$$\frac{dz}{dt} = C(a_1 - t)^{-\alpha_1}(a_2 - t)^{-\alpha_2} \ldots (a_n - t)^{-\alpha_n}, \tag{11}$$

где C — в общем случае комплексная постоянная; $a_1, a_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — вещественные постоянные, причем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ рациональны. Соотношение (11) между z и t конформно отображает надлежащим образом ограниченную область t-плоскости на некоторую область z-плоскости, если устранить соответствующим способом многозначность dz/dt.

Пусть t—область, ограниченная осью, на которой переменная t вещественна, и описанной вокруг точки $t=0$ полуокружностью, лежащей с той стороны от вещественной оси, где мнимая часть t равна положительной величине, умноженной на i. Из полукруга требуется исключить бесконечно малые куски t-плоскости, ограниченные полуокружностями радиуса ε с центрами в точках $t=a_1$, $t=a_2$, ...

Эта область t односвязна, не содержит разрывов производной dz/dt и точек, в которых совпадали бы два значения dz/dt, вообще говоря, различные. Отсюда следует, что если в *одной* точке t-области произвольно задать какое-нибудь из допустимых значений dz/dt, то производная dz/dt будет однозначно определена во всей области. Поскольку dz/dt не обращается в этой области в нуль, то существует функция z от t, которая конформно отображает t-область на соответствующую z-область. Нетрудно показать, что границы последней, коль скоро они конечны, состоят из прямых, и найти угол, образуемый двумя смежными отрезками границы. Пусть

$$dz/dt = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta), \tag{12}$$

где M — модуль производной dz/dt, равный отношению линейных размеров соответствующих друг другу бесконечно малых элементов z- и t-областей, а ϑ (если вещественные и мнимые оси в z-плоскости и t-плоскости параллельны) — угол, на который повернута в положительном направлении (т. е. в направлении, в котором ось x нужно повернуть на $\pi/2$, чтобы она совпала с осью y) z-область относительно t-области. Можно показать, что при вещественных, отрицательных, бесконечно больших значениях t все сомножители при C в уравнении (11) вещественны и положительны.

Если t на границе области возрастает от $-\infty$ до $a-\varepsilon$, где a означает любую из величин $a_1, a_2, \ldots$, то множитель $(a-t)^{-\alpha}$, где α — та из величин $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, которая соответствует a, веществен и положителен. Пусть для полуокружности, описываемой t при дальнейшем возрастании вдоль границы,

$$a - t = \varepsilon(\cos\omega - i\sin\omega), \tag{13}$$

так, что ω, пока t описывает полуокружность, возрастает от 0 до π. Тогда

$$(a-t)^{-\alpha} = \varepsilon^{-\alpha}(\cos\alpha\omega + i\sin\alpha\omega),$$

и поэтому при $t = a + \varepsilon$

$$(a-t)^{-\alpha} = \varepsilon^{-\alpha}(\cos\alpha\pi + i\sin\alpha\pi).$$

При дальнейшем возрастании t вдоль вещественной оси изменяется лишь модуль этой величины, в то время как степень числа —1, образующая ее второй сомножитель, остается неизменной. Если точка t описывает прямолинейные части границы области, то угол ϑ, задаваемый уравнениями (12) и (13), остается неизменным. Когда t описывает полуокружность с центром в точке a, угол ϑ возрастает на $\alpha\pi$.

Таким образом, $n+1$ прямолинейных отрезков границы t-области соответствуют такому же числу прямолинейных отрезков границы z-области, причем каждый отрезок в z-плоскости повернут относительно соответствующего отрезка в t-плоскости на угол $\alpha\pi$ в положительном направлении. Какая линия в z-плоскости соответствует полуокружности с центром в точке a в t-плоскости, можно понять, если учесть, что при бесконечно малой разности $a-t$

$$dz/dt = -A(a-t)^{-\alpha},$$

откуда

$$z = \frac{A}{1-\alpha}(a-t)^{1-\alpha} + B,$$

или, если воспользоваться выражением (13),

$$z = \frac{A}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}[\cos(1-\alpha)\omega - i\sin(1-\alpha)\omega] + B,$$

где A и B — две конечные комплексные постоянные.

Следовательно, интересующая нас линия представляет собой дугу окружности с центром в конечной части плоскости, а именно в точке $z=B$, и бесконечно малым или бесконечно большим радиусом (в зависимости от того, $\alpha < 1$ или $\alpha > 1$). Если $\alpha = 1$, то

$$dz/dt = -A/(a-t),$$

откуда

$$z = A\ln(a-t) + B,$$

или с учетом (13)

$$z = A(\ln\varepsilon - i\omega) + B.$$

Следовательно, мы имеем прямую, лежащую в бесконечности и обладающую конечной длиной, равной произведению π и модуля числа A. Если точка t описывает полуокружность с постоянной скоростью, то точка z описывает соответствующую линию также с постоянной скоростью. Наконец, если граница t-области имеет вид бесконечной полуокружности, то

$$\frac{dz}{dt}=C(-t)^{-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n},$$

откуда

$$z=\frac{C}{1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n}(-t)^{1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n}+B.$$

Сравнивая это выражение с (13), нетрудно видеть, что это дуга окружности с центром в точке B, лежащей в конечной части плоскости, и бесконечно большим или бесконечно малым радиусом в зависимости от того, какое из неравенств выполняется: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\leqslant 1$ или $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n>1$. Точка z описывает эту полуокружность с постоянной скоростью, если точка t описывает свою полуокружность с постоянной скоростью.

Если z-плоскость задана, то прежде всего известно число $n+1$ прямых, ограничивающих кусок, лежащий в конечной части плоскости: в качестве $\alpha_1\pi$, $\alpha_2\pi$, ..., $\alpha_n\pi$ можно выбрать любые n из $n+1$ углов, образуемых смежными прямолинейными участками границы в указанном выше смысле. Величины a и C можно выбрать отчасти произвольно, отчасти они определяются размерами и положением z-области.

Для области на z-плоскости, к которой приводит развиваемая нами теория конденсатора, можно положить

$$dz=2a\frac{\sqrt{(\mu^2-t^2)(\lambda^2-t^2)}}{t}\,dt, \tag{14}$$

где μ и λ — две вещественные положительные постоянные.

При $\mu>\lambda$ точкам $t=\pm\lambda$ соответствуют точки $z=\pm ia$, точкам $t=\pm\mu$ — точки $z=\pm i(a+b)$; полуокружности с центром в точке $t=0$, образующей часть границы t-области, — отрезок прямой, для которой отношение x/a имеет бесконечно большое положительное постоянное значение, с концами в точках $y=\pm a$, наконец, бесконечной полуокружности, замыкающей границу t-области, — бесконечная по сравнению с a дуга окружности, которой до полной окружности недостает лишь дуги конечных по сравнению с a размеров, а в конечных точках отношение x/a принимает бесконечно большие положительные значения и $y=\pm(a+b)$. Чтобы выразить постоянные λ и μ через a и b, проинтегрируем сначала уравнение (14) по бесконечно малой окружности с центром в точке $t=0$ и получим

$$1=\lambda\mu\pi.$$

Проинтегрируем затем то же самое уравнение по бесконечно большой полуокружности, образующей часть границы t-области. Полагая

$$dz=2a\left(t-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2+\mu^2}{t}\right)dt,$$

находим

$$\frac{a+b}{a}=\frac{\lambda^2+\mu^2}{2}\pi.$$

Отсюда получаем

$$\mu+\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{(2a+b)}{a}}, \quad \mu-\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{b}{a}}. \tag{15}$$

Чтобы найти требуемую зависимость между z и задаваемой (10) величиной w, к только что установленной зависимости между z и t необходимо присоединить зависимость между t и w, задающую конформное отображение t-области на бесконечно длинную полосу в w-плоскости, одному из концов которой соответствуют бесконечно малые, а другому бесконечно большие значения t. Такое отображение осуществляется функцией $w(t)$, удовлетворяющей уравнению

$$dw/dt=A/t,$$

т. е.

$$w=A\ln t+B,$$

где A и B — постоянные, которые необходимо выбрать так, чтобы φ (вещественная часть функции w) принимала значение $+1$ при положительных и -1 при отрицательных вещественных значениях t. Следовательно,

$$w=1+\frac{2i}{\pi}\ln t+iC,$$

где $\ln t$ берется при положительных значениях t; C — вещественная постоянная. Определим теперь ψ для точек поверхности пластин конденсатора, в которых $\varphi=+1$. Для поверхности, на которой $\varphi=+1$, переменная t положительна, поэтому

$$\psi=\frac{2R}{\pi}\ln t+CR. \tag{16}$$

В центре наружней поверхности рассматриваемой пластины конденсатора ψ можно положить равной нулю, что позволяет определить C следующим образом. Рассмотрим точку на наружней поверхности, в которой координата x бесконечно велика по сравнению с a и бесконечно мала по сравнению с R. В этой точке переменная t бесконечно велика, поэтому в силу (14)

$$z=a(t^2+A),$$

где A — некоторая конечная постоянная. Отсюда следует, что с точностью до бесконечно малых

$$\ln(z/a)=2\ln t \quad \text{и} \quad \ln(x/a)=2\ln t,$$

поэтому из (16) получаем

$$\psi=\frac{R}{\pi}\ln\frac{x}{a}+CR.$$

С другой стороны, для той же точки из (6) находим, что

$$\psi=\frac{R}{\pi}\left(2-\ln\frac{8R}{x}\right),$$

откуда

$$C=\frac{1}{\pi}\left(2-\ln\frac{8R}{a}\right). \qquad (17)$$

Рассмотрим теперь точку внутренней поверхности, в которой x имеет бесконечно большое значение по сравнению с a и бесконечно малое по сравнению с R. В этой точке t бесконечно мало, и между x и t, как видно из (15), возникает соотношение

$$x=2a\int\limits_t^\lambda \frac{\sqrt{(\lambda^2-t^2)(\mu^2-t^2)}}{t}\,dt.$$

Но

$$2\int\frac{\sqrt{(\lambda^2-t^2)(\mu^2-t^2)}}{t}\,dt=\sqrt{(\lambda^2-t^2)(\mu^2-t^2)}+$$

$$+\frac{\mu^2+\lambda^2}{2}\,\frac{\sqrt{\mu^2-t^2}+\sqrt{\lambda^2-t^2}}{\sqrt{\mu^2-t^2}-\sqrt{\lambda^2-t^2}}-\lambda\mu\ln\frac{\lambda\sqrt{\mu^2-t^2}+\mu\sqrt{\lambda^2-t^2}}{\lambda\sqrt{\mu^2-t^2}-\mu\sqrt{\lambda^2-t^2}}\,.$$

Следовательно, при бесконечно малом t мы получаем

$$-\frac{x}{a}=\lambda\mu+\frac{(\mu+\lambda)^2}{2}\ln\frac{\mu+\lambda}{2\lambda\mu}-\frac{(\mu-\lambda)^2}{2}\ln\frac{\mu-\lambda}{2\lambda\mu}+2\lambda\mu\ln t,$$

или с учетом (15)

$$-2\ln t=\frac{x}{a}\pi+1+\ln\frac{\pi(2a+b)}{2a}+\frac{b}{2a}\ln\frac{2a+b}{b}\,.$$

Это выражение, так же как и задаваемое (17) значение C, подставим в (16) и сравним результат с соотношением

$$\psi=\frac{R^2}{2a}-\frac{Rx}{a}-\text{const},$$

которое следует из (8) при бесконечно малом отношении x^2/a. Величина, обозначенная через const, равна

$$\frac{R^2}{2a}+\frac{R}{\pi}\left(\ln\frac{4\pi(2a+b)R}{ea^2}+\frac{b}{2a}\ln\frac{2a+b}{b}\right), \qquad (18)$$

где e — основание натуральных логарифмов. Как показывают формулы (8) и (2), это выражение задает удвоенное количество электричества, которое содержит вся пластина конденсатора.

Количество электричества на второй пластине конденсатора имеет такую же величину, но противоположно по знаку.

Положив $b=0$, мы придем к случаю, рассмотренному Клаузиусом. Выражение (18) при этом принимает вид

$$\frac{R^2}{2a}+\frac{R}{\pi}\ln\frac{8\pi R}{ea}\,,$$

или, если вместо π и e подставить их численные значения,

$$\frac{R^2}{2a}+\frac{R}{\pi}\ln 8{,}84\frac{R}{a}.$$

Различие в численных коэффициентах объясняется неопределенностью, неизбежно привносимой столь длинными вычислениями, которые проделал Клаузиус, прежде чем ему удалось получить свой результат.

Гораздо проще оказывается второй из двух рассматриваемых нами случаев, когда на обеих пластинах конденсатора $\varphi=1$. В этом случае во всех точках пространства с точностью до бесконечно малых

$$\varphi=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{R}{u},$$

где u — положительный корень уравнения

$$\frac{\rho^2}{R^2+u^2}+\frac{y^2}{u^2}=1$$

и значение арктангенса заключено между 0 и $\pi/2$, т. е. φ принимает такое же значение, как если бы вместо двух пластин у конденсатора была лишь одна пластина. Количество электричества на каждой пластине равно R/π.

Построим теперь теорию упомянутого в начале работы конденсатора Томсона. Конструкцию этого конденсатора можно описать следующим образом. Нижнее горизонтальное основание металлической цилиндрической банки состоит из двух частей: наружной, называемой предохранительным кольцом, и внутренней, называемой коллекторной пластиной. На небольшом расстоянии под основанием находится металлическая пластина равной ему величины. Пусть потенциал этой пластины равен нулю, а потенциал в банке и на коллекторной пластине пусть равен единице. Требуется найти количество электричества на коллекторной пластине. Пусть $y=0$ — уравнение верхней поверхности пластины с $\varphi=0$; $y=a$ и $y=a+b$ — уравнения горизонтальных поверхностей коллекторной пластины и предохранительного кольца; $\rho=R-c$ и $\rho=R+c$ — уравнения боковых поверхностей коллекторной пластины и предохранительного кольца (a — расстояние от коллекторной пластины до нижней пластины, b — толщина коллекторной пластины, $2c$ — ширина кольцеобразного зазора между коллекторной пластиной и предохранительным кольцом). Предполагается, что a, b, c бесконечно малы по сравнению с R, а ширина предохранительного кольца того же порядка, что и R.

На конечном расстоянии от круга $y=0$, $\rho=R$ над коллекторной пластиной и предохранительным кольцом $\varphi=1$, а под ними $\varphi=y/a$, в первом случае $\psi=\text{const}$, во втором —

$$\psi=(\rho^2/2a)-\text{const}. \qquad (19)$$

Требуется вычислить φ и ψ в точках, расположенных бесконечно близко от кольца. Пусть снова

$$R-\rho=x, \qquad x+iy=z, \qquad \varphi+i\psi/R=w.$$

Тогда w — функция от z. Рассматриваемую область z отобразим на полуплоскость t. Нужное нам отображение задается уравнением

$$Ndz = \lambda^2 \frac{\sqrt{(1-t^2)(t-k^2t^2)}}{1-\lambda^2 t^2}\,dt, \tag{20}$$

где N, k, λ — положительные постоянные, причем $k < 1$ и $\lambda > 1$. Бесконечно малым полуокружностям с центрами в точках $t = \pm 1/\lambda$, принадлежащим границе t-области, в границе z-области соответствуют отрезки прямых, для которых $x/a = \pm\infty$, с концами в точках $y=0$ и $y=a$. Бесконечно большой полуокружности в границе t-области соответствуют бесконечно большая по сравнению с a полуокружность в границе z-области, для концов которой $x/a = \pm\infty$ и $y = a + b$. Точкам

$$t = \pm 1 \quad \text{и} \quad t = \pm 1/k$$

соответствуют точки

$$z = \pm c + ia \quad \text{и} \quad z = \pm c + i(a+b).$$

Необходимую зависимость между z и w мы получим, связав w и t соотношением

$$w = \frac{i}{\pi} \ln \frac{1-\lambda t}{1+\lambda t} + iC,$$

где C — вещественная постоянная. Отсюда для той поверхности коллекторной пластины, для которой $t > 1/\lambda$, следует, что

$$\psi = \frac{R}{\pi} \ln \frac{\lambda t - 1}{\lambda t + 1} + CR. \tag{21}$$

Уравнение (20) можно записать в виде

$$Ndz = \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \left(\lambda^2 - 1 + 1 - k^2t^2 + \frac{(\lambda^2-1)(\lambda^2-k^2t^2)}{1-\lambda^2t^2}\right),$$

или в обозначениях Якоби

$$t = \sin \operatorname{am} u,\ k; \qquad \lambda = k \sin \operatorname{am} \alpha,\ k$$

в виде

$$Ndz = -u\Delta^2 \operatorname{am}\alpha + E(u) + \frac{\cos \operatorname{am}\alpha \Delta \operatorname{am}\alpha}{\sin \operatorname{am}\alpha}\,\Pi(u,\ \alpha),$$

или

$$Nz = u\left(\frac{d \ln \vartheta(\alpha)}{d\alpha}\,\frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\vartheta_1(\alpha)}{\vartheta(\alpha)} - \frac{d^2 \ln \vartheta(\alpha)}{d\alpha^2}\right) + \frac{d \ln \vartheta(u)}{du} + \frac{1}{2} \ln \frac{\vartheta(u-\alpha)}{\vartheta(u+\alpha)}\,\frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\vartheta_1(\alpha)}{\vartheta(\alpha)}.$$

Если положить

$$\alpha = \beta + iK',$$

то, поскольку

$$\sin \operatorname{am}\alpha > 1/k,$$

величину β можно выбрать вещественной между 0 и K. Тогда

$$\vartheta(\alpha)=ie^{-\frac{i\beta\pi}{2K}+\frac{\pi K'}{4K}}\vartheta_1(\beta),$$

$$\vartheta_1(\alpha)=ie^{-\frac{i\beta\pi}{2K}+\frac{\pi K'}{4K}}\vartheta(\beta),$$

и поэтому

$$Nz=u\left(\frac{d\ln\vartheta_1(\beta)}{d\beta}\frac{d}{d\beta}\ln\frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)}-\frac{d^2\ln\vartheta(\beta)}{d\beta^2}\right)+\frac{d\ln\vartheta(u)}{du}+\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta_1(\beta+u)}\frac{d}{d\beta}\ln\frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)},$$

или, если ввести обозначение

$$\vartheta_1'(\beta)=\frac{d\vartheta_1(\beta)}{d\beta},$$

$$Nz=-u\frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)}\frac{d}{d\beta}\frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta(\beta)}+\frac{d\ln\vartheta(u)}{du}-\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta_1(\beta+u)}\frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)}\frac{d}{d\beta}\frac{\vartheta_1(\beta)}{\vartheta(\beta)}.$$

Условия

$$z=\pm c+ia \qquad \text{при } u=\pm K$$

и

$$z=\pm c+i(a+b) \qquad \text{при } u=\pm K\pm iK'$$

дают для определения трех постоянных N, k, β уравнения

$$Nc=-K\frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)}\frac{d}{d\beta}\frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta(\beta)},$$

$$Na=\frac{\pi}{2}\frac{\vartheta(\beta)}{\vartheta_1(\beta)}\frac{d}{d\beta}\frac{\vartheta_1(\beta)}{\vartheta(\beta)},$$

$$N\left(c\frac{K'}{K}-a\frac{\beta}{K}-b\right)=\frac{\pi}{2K}. \tag{22}$$

Первое из них позволяет преобразовать уравнение для Nz к виду

$$Nz=Nc\frac{u}{K}+\frac{d\ln\vartheta(u)}{du}-\frac{Na}{\pi}\ln\frac{\vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta_1(\beta+u)}. \tag{23}$$

Вводя u и β, запишем выражение (21) следующим образом:

$$\psi=\frac{R}{\pi}\ln\frac{\sin\operatorname{am}u-\sin\operatorname{am}\beta}{\sin\operatorname{am}u+\sin\operatorname{am}\beta}+CR.$$

В той точке верхней поверхности коллекторной пластины, в которой отношение x/a бесконечно велико, $\sin\operatorname{am}u$ — также бесконечно большая величина, следовательно,

$$\psi=CR.$$

Если в точках той же поверхности, находящихся от края на расстоянии порядка R (для таких точек, как уже отмечалось, $\psi=\text{const}$), положить $\psi=0$, то тогда $C=0$ и

$$\psi = \frac{R}{\pi} \ln \frac{\sin \operatorname{am} u - \sin \operatorname{am} \beta}{\sin \operatorname{am} u + \sin \operatorname{am} \beta}. \qquad (24)$$

Для тех точек нижней поверхности коллекторной пластины, для которых отношение x/a бесконечно велико, разность $u-\beta$ бесконечно мала и положительна, поэтому из (23) получаем

$$x = c\frac{\beta}{K} + \frac{i}{N}\frac{d \ln \vartheta(\beta)}{d\beta} - \frac{a}{\pi} \ln \frac{(u-\beta)\,\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(2\beta)},$$

а из (24)

$$\psi = \frac{R}{\pi} \ln \frac{(u-\beta)\cos \operatorname{am} \beta \Delta \operatorname{am} \beta}{2 \sin \operatorname{am} \beta}.$$

Если воспользоваться тем, что

$$\sin \operatorname{am} \beta = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_1(0)}\frac{\vartheta_1(\beta)}{\vartheta(\beta)}, \qquad \cos \operatorname{am} \beta = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(\beta)}{\vartheta(\beta)},$$

$$\Delta \operatorname{am} \beta = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(\beta)}{\vartheta(\beta)}$$

и

$$\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(2\beta) = 2\vartheta(\beta)\,\vartheta_1(\beta)\,\vartheta_2(\beta)\,\vartheta_3(\beta),$$

то из двух выписанных нами соотношений следует, что

$$\psi = -\frac{Rx}{a} + \frac{2R}{\pi}\left(\frac{c}{a}\frac{\beta\pi}{2K} + \frac{\pi}{2Na}\frac{d \ln \vartheta(\beta)}{d\beta} + \ln \frac{\vartheta_2(\beta)\,\vartheta_3(\beta)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}\right).$$

Но, сравнив с (19), мы снова получаем при бесконечно малом x^2/a

$$\psi = \frac{R^2}{2a} - \frac{Rx}{a} - \text{const},$$

поэтому для величины, обозначенной здесь через const, т. е. для удвоенного количества электричества на пластинах конденсатора, справедливо следующее выражение:

$$\frac{R^2}{2a} - \frac{2R}{\pi}\left(\frac{c\beta\pi}{a2K} + \frac{\pi}{2Na}\frac{d \ln \vartheta(\beta)}{d\beta} + \ln \frac{\vartheta_2(\beta)\,\vartheta_3(\beta)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}\right). \qquad (25)$$

В общем случае вычисление ее весьма затруднительно, так как уравнения (22) требуется разрешить относительно h, β, N, но задача легко решается, если толщина коллекторной пластины b бесконечно велика по сравнению с шириной $2c$ зазора между коллекторной пластиной и предохранительным кольцом и наряду с конечными членами достаточно учитывать бесконечно малые члены лишь низшего порядка. Если предположить, что отношение b/c бесконечно велико и учесть лишь конечные члены, то уравнениям (22) можно удовлетворить, положив

$$k = 0, \qquad \operatorname{tg} \beta = c/a, \qquad N = \pi/2c,$$

при этом выражение (25) будет иметь вид

$$\frac{R^2}{2a}-\frac{2R}{\pi}(\beta\operatorname{tg}\beta+\ln\cos\beta).$$

Чтобы вычислить его значение более точно, положим

$$c/a=\operatorname{tg}\beta_0.$$

Тогда из третьего уравнения (22) мы получим

$$-\ln q=\pi\frac{K'}{K}=2\left(1+\frac{\beta_0}{\operatorname{tg}\beta_0}+\frac{b}{c}\frac{\pi}{2}\right),$$

а из двух первых —

$$\beta\pi/2K=\beta_0-4q\sin 2\beta_0.$$

В результате выражение (25) преобразуется к виду

$$\frac{R^2}{2a}-\frac{2R}{\pi}(\beta_0\operatorname{tg}\beta_0+\ln\cos\beta_0+4q\sin^2\beta_0).$$

Значение, принимаемое выражением (25), нетрудно вычислить и в том случае, когда $b=0$, что, однако, не представляет практического интереса. В этом случае $k=1$ и количество электричества на коллекторной пластине равно

$$\frac{R^2}{4a}-\frac{R}{\pi}\frac{1}{\lambda^2-1},$$

где λ — корень уравнения

$$\frac{c}{a}\pi=\frac{2\lambda}{\lambda^2-1}+\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

13.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОТЕНЦИАЛА, ПРИНИМАЮЩЕГО НА ГРАНИЦЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ ОБЛАСТИ ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ЭТА ГРАНИЦА ВСЮДУ ВЫПУКЛА * [1]

Доказательство, указанное в заглавии этой работы, сводится к построению для искомого потенциала его выражения как потенциала двойного слоя масс на поверхности рассматриваемой области. Это выражение, однако, содержит бесконечный ряд. Доказать его сходимость при предположении о всюду выпуклой границе области мне не удалось.

Пусть ds — элемент поверхности; U — значение, принимаемое потенциалом на границе; r — расстояние точки P области от ds или от точки, расположенной бесконечно близко от ds; n — бесконечно малый отрезок нормали к ds, направленной внутрь рассматриваемой области; V — функция точки P, определяемая выражением

$$V = \frac{1}{4\pi} \int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} (U + U_1 + U_2 + \ldots),$$

где U_1, U_2, ... — задаваемые этим соотношением функции положения площадки ds, которые следует выбирать так, чтобы их сумма была сходящимся рядом.

Когда точка P проходит через элемент поверхности, V изменяется скачком. Пусть V_i и V_a — значения V на внутренней и внешней сторонах ds. Тогда

$$V_i - V_a = U + U_1 + U_2 + \ldots.$$

Если бы величины U_1, U_2, ... удалось определить так, чтобы выполнялось соотношение

$$-V_a = U_1 + U_2 + \ldots,$$

то

$$V_i = U$$

---

* Beweis der Existenz des Potentials das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werthe hat für den Fall dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist. // Acta math. 1890—1891. T. 14. P. 179—183. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] Лет шесть назад я имела удовольствие встретиться в Берлине с Кирхгофом. Пользуясь случаем, я обратилась к нему с просьбой оказать честь журналу «Acta mathematica» и опубликовать какую-нибудь из своих работ на страницах этого журнала. Кирхгоф, уже страдавший в то время недугом, который привел к его преждевременной кончине, предложил публикуемую нами статью, написанную им гораздо раньше. Однако, поскольку проф. К. Нейман из Лейпцига занимался той же проблемой, Кирхгоф выразил сомнение в целесообразности публикации своей работы. Он передал ее мне с правом распорядиться ею по моему усмотрению.

Ныне я считаю своим долгом предпринять все от меня зависящее, чтобы этот фрагмент научного наследия великого физика не оставался более в забвении. Каждая написанная им строка, несомненно, по-своему ценна.

Софья Ковалевская

и V был бы искомым потенциалом для точек внутри рассматриваемой области. Это требование выполняется, если

$$U_1 = \frac{1}{4\pi} \int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U,$$

$$U_2 = -\frac{1}{4\pi} \int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U_1,$$

. . . .,

и начало отсчета r выбрано вне граничной поверхности, бесконечно близко от точки, к которой относятся величины U_1, U_2, . . ., стоящие слева от знаков равенства.

Требуется доказать, что ряд $U+U_1+U_2+\ldots$ сходится. Для этого, в свою очередь, необходимо доказать, что если h — некоторое целое число, M_h — наибольшее, а N_h — наименьшее из всех значений U_h, то все значения U_{h+1} заключены между

$$(M_h - N_h)/2 \quad \text{и} \quad -(M_h - N_h)/2.$$

Для доказательства последнего утверждения воспользуемся тем, что

$$ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

— величина элемента ds, видимая из начальной точки P на расстоянии $1/r$, которая считается отрицательной или положительной в зависимости от того, входит ли на ds прямая, проведенная из P через ds, в рассматриваемую область или выходит из области. Пусть точка P расположена вне области. Представим себе конус с вершиной в точке P, касающийся границы области. Тогда линия касания делит граничную поверхность на две части, одна из которых содержит элементы с отрицательной производной $\partial (1/r)/\partial n$, а другая — с положительной. Пусть

$$\int ds \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \vartheta$$

— интеграл, взятый во второй части поверхности. Тогда интеграл, взятый по первой части поверхности, равен $-\vartheta$. Если, как мы предположили, поверхность всюду выпукла, то величина ϑ не превосходит 2π и сколь угодно мало отличается от 2π, когда точка P бесконечно близко подходит к границе. При произвольном положении P величина ϑ равна «раскрытию» касательного конуса. Когда P касается поверхности, касательный конус переходит в плоскость.

Если в выражении, задающем U_{h+1} на той части, где $-\partial (1/r)/\partial n$ положительна, верхнюю границу M_h заменить на U_h, а в выражении для той части поверхности, где $-\partial (1/r)/\partial n$ отрицательна заменить нижнюю границу N_h на U,

то значение U_{h+1} от этого возрастет. Но измененное значение, если P — произвольная внешняя точка, равно $\frac{\vartheta}{4\pi}(M_h - N_h)$,

и, если P бесконечно близко подходит к поверхности, переходит в $(M_h - N_h)/2$. Следовательно, $U_{h+1} < (M_h - N_h)/2$.
Как показывают аналогичные рассуждения, $U_{h+1} > -(M_h - N_h)/2$.
Тем самым наше утверждение доказано.

Выведенные неравенства показывают, что M_{h+1} не превосходит $(M_h-N_h)/2$, а N_{h+1} не может быть меньше, чем $-(M_h-N_h)/2$, причем обе границы достижимы. Чтобы верхняя граница M_{h+1} совпала с $(M_h-N_h)/2$, величина U_h должна быть равной M_h на бесконечно малой части поверхности, содержащей точку P, для которой $U_{h+1}=M_{h+1}$, а во всех остальных точках поверхности быть равной N_h. Исключение составляет лишь случай, когда конечная часть поверхности, в которой лежит точка, относящаяся к M_{h+1}, представляет собой поверхность: тогда во всех точках этой части поверхности, находящихся на конечном расстоянии от названной точки, U_h может принимать произвольные значения.

Чтобы нижняя граница N_{h+1} совпала с $-(M_h-N_h)/2$, величина U_h должна быть равна N_h на бесконечно малой части поверхности, содержащей точку, для которой $U_{h+1}=N_{h+1}$, а во всех остальных точках поверхности быть равной M_h. (Исключение аналогично приведенному выше.) Удовлетворить этим двум условиям одновременно не возможно даже с точностью до бесконечно малых отклонений, поэтому одна из двух величин M_{h+1}, N_{h+1} или обе должны отличаться от своих граничных значений на конечную величину.

Следовательно, разность $M_{h+1}-N_{h+1}$ всегда должна быть на некую конечную величину меньше разности M_h-N_h. Поскольку обе разности положительны, должна существовать зависящая от формы поверхности величина ε, представляющая собой правильную положительную дробь, несколько меньшую единицы, и обладающая тем свойством, что разность $M_{h+1}-N_{h+1}$ заключена между 0 и $\varepsilon(M_h-N_h)$ [2].

Если обозначить через M наибольшее и через N наименьшее значение U, то можно утверждать, что разность (M_h-N_h) заключена между 0 и $\varepsilon^h(M-N)$ и, значит, величина U_{h+1} заключена в пределах $\pm\varepsilon^h(M-N)/2$, откуда известным образом следует сходимость ряда

$$U + U_1 + U_2 + \ldots.$$

[2] Может показаться, будто ε, помимо формы поверхности, зависит и от значений M_h и N_h, но, как нетрудно понять, это не так. Действительно, если подставить вместо U_h выражение $\alpha U_h+\beta$, где α и β — постоянные, то U_{h+1} перейдет в $\alpha U_{h+1}+\beta$ и отношение

$$(M_{h+1} - N_{h-1})/(M_h - N_h)$$

останется неизменным. В то же время, выбирая подходящие постоянные α и β, можно придавать M_h и N_h любые значения.

Секретарь редакции Э. Фрагмен

IV

РАБОТЫ ПО ЭЛЕКТРИЧЕСКОМУ ТОКУ В ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ

14.

О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ ПЛАСТИНУ, НАПРИМЕР, КРУГЛОЙ ФОРМЫ *

Если через металлическую пластину пропустить постоянный гальванический ток, то электричество распределится в ней определенным образом. Характер распределения можно установить теоретически на основе принципов, сформулированных Омом [1]. В предположении, что состояние пластины стационарно, я произвел необходимые вычисления для случая, когда пластина имеет круглую форму и электричество подводится к ней по одному проводнику и отводится от нее по другому проводнику. Результат оказался особенно простым для случая, когда точка подвода и точка отвода тока располагаются на границе пластины. Для этого случая полученный результат был проверен мной экспериментально и, как мне кажется, получил достаточное подтверждение. В настоящей работе я изложу сначала теоретические соображения, а затем приведу описание поставленного мной эксперимента.

Если положение точки проводящей пластины задавать прямоугольными координатами x и y, то электрический потенциал [2] пластины u будет функцией от x и y, т. е.

$$u = f(x, y).$$

Уравнение $f(x, y) = u_0$, где u_0 — постоянная, задает кривую, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Рассмотрим две такие бесконечно близкие «кривые равного потенциала»:

$$f(x, y) = u_0, \quad f(x, y) = u_0 + du.$$

В двух бесконечно близких точках A и B первой кривой (рис. 1) проведем нормали. Эти нормали являются также нормалями ко второй кривой в точках A', B', поэтому $ABA'B'$ — бесконечно малый прямоугольник, в каждой точке на стороне AB которого потенциал равен u_0, а в каждой точке на стороне $A'B'$ потенциал равен $u_0 + du$. Согласно установленным Омом принципам, это означает, что через такой прямоугольник в единицу времени в направлении AA' протекает количество электричества, равное

$$-k \cdot \delta \cdot AB \cdot \frac{du}{AA'},$$

* Ueber der Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige // Ann. Phys. 1845. Bd. 64. S. 497—514. Перевод Ю. А. Данилова по изданию: *Kirchhoff G.* Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 1—17.

где k — электропроводность; δ — бесконечно малая толщина пластины. То же количество электричества протекает через любую линию CD, которую мы проведем через прямоугольник $ABA'B'$. Если CD провести параллельно оси x и положить угол, образуемый AA' (т. е. направление тока) с CD, равным φ, то количество электричества, протекающее через CD, окажется равным

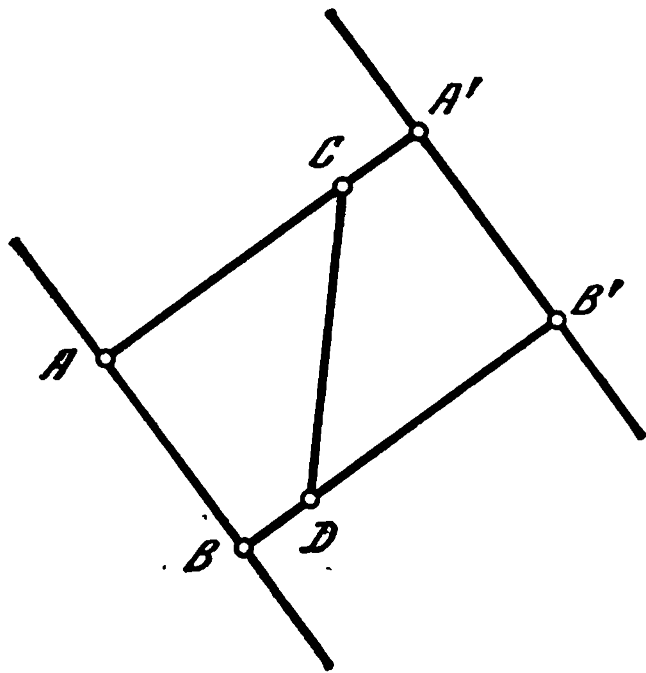


Рис. 1

$$-k \cdot \delta \cdot CD \cdot \sin\varphi \cdot \frac{du}{AA'}.$$

Это выражение можно представить в другом виде, а именно

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

где dx и dy — разности соответствующих координат точек A и A'. Отсюда следует, что

$$\frac{du}{AA'} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin\varphi;$$

так как потенциал в точке A равен потенциалу в точке B, то должно выполняться равенство

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sin\varphi - \frac{\partial u}{\partial y} \cos\varphi = 0.$$

Из двух последних равенств мы получаем

$$\frac{du}{AA'} \cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{du}{AA'} \sin\varphi = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, приведенное выше выражение [для количества электричества] представимо в виде

$$-k \cdot \delta \cdot CD \cdot \partial u/\partial y.$$

Так как положение системы координат было совершенно произвольно, результат приведенных выше рассуждений сводится к следующему. Через любой линейный элемент ds в единицу времени протекает количество электричества, равное

$$-k \cdot \delta \cdot ds \cdot \partial u/\partial N,$$

если через du/dN мы обозначим дифференцирование по направлению нормали к ds.

Это замечание позволяет легко найти условие, которому должен удовлетворять потенциал u, для того чтобы электрическое состояние пластины могло быть стационарным. Действительно, если рассмотреть на пластине замкнутую кривую, внутрь которой электричество не подводится, то сумма всех количеств электричества, протекающих через такую кривую, должна быть равна нулю, т. е. должно выполняться равенство

$$\int ds \cdot \partial u / \partial N = 0$$

при условии, что интеграл берется по всей кривой. Если обозначить через (N, x) и (N, y) углы, образуемые нормалью N с осями координат, то

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(N, y),$$

$$dx = -ds \cos(N, y), \qquad dy = ds \cos(N, x),$$

и предыдущее равенство преобразуется к виду [1]

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = 0.$$

Если мы обратимся теперь к случаю, когда электричество подводится к пластине через одну точку и отводится через другую, и рассмотрим, кроме того, замкнутую кривую, охватывающую одну из точек входа, то относительно такой кривой должно выполняться [второе] условие:

$$-k \cdot \delta \cdot \int ds \cdot \frac{\partial u}{\partial N} = -k \cdot \delta \cdot \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right) = E,$$

где E — количество электричества, подводимое к пластине через эту точку.

Третье условие на u состоит в том, что на границе пластины должно выполняться равенство $\partial u / \partial N = 0$, если ни в одной точке границы электричество не подводится к пластине и не отводится от нее, т. е. кривые равного потенциала должны пересекать границу под прямым углом [2]. Если пластина неограничена, то

---

[1] Так как рассматриваемая кривая совершенно произвольна (за исключением того, что она не должна охватывать определенные точки), это условие может выполняться только в том случае, если $\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$ — полный дифференциал dv, т. е. если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение $dv = 0$, т. е. $v = \text{const}$, задает семейство кривых, пересекающих кривые равного потенциала ортогонально, т. е. семейство линий тока.

[2] Если бы пластина состояла из двух материалов с различной электропроводностью, то на границе их раздела выполнялись бы два следующих условия (k и k' — электропроводности, u и u' — потенциалы):

$$k \frac{\partial u}{\partial N} = k' \frac{\partial u'}{\partial N},$$

разность $u - u'$ равна электродвижущей силе, возникающей при соприкосновении двух веществ.

Из последнего условия следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u'}{\partial s}.$$

последнее условие отпадает. Вместо него появляется условие, согласно которому потенциал в бесконечности должен быть равен постоянной конечной величине.

Рассмотрим сначала случай, когда пластина неограничена. Пусть A_1, A_2, . . ., A_n — точки подвода тока к пластине (для краткости я буду называть так и точки подвода тока в узком смысле и точки отвода тока и считать количества электричества, вытекающие через последние точки, отрицательными); E_1, E_2, . . ., E_n — количества электричества, поступающие через эти точки в единицу времени (должно выполняться равенство $E_1+E_2+\ldots+E_n=0$); r_1, r_2, . . ., r_n — расстояния от произвольной точки до точек A_1, A_2, . . ., A_n. Нетрудно показать, что всем поставленным условиям мы удовлетворим, если положим [3]

$$u = M - \frac{E_1}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \ln r_1 - \frac{E_2}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \ln r_2$$

$$\ldots - \frac{E_n}{2\pi \cdot k \cdot \delta} \ln r_n,$$

где M — постоянная.

Действительно, если мы возьмем неопределенный интеграл

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right),$$

то, как нетрудно видеть, он равен

$$-\frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \delta} (E_1 \cdot (r_1, R) + E_2 \cdot (r_2, R) + \ldots + E_n \cdot (r_n, R)),$$

где через (r_1, R), (r_2, R), . . . обозначены углы, образуемые отрезками r_1, r_2, . . . с заданной прямой R. Если этот интеграл взять по замкнутой кривой, не охватывающей ни одной из точек подвода тока, то он будет равен нулю. Если кривая охватывает одну из точек A_1, A_2, . . ., например A_1, то интеграл по такой кривой равен $-E_1/k \cdot \delta$. Следовательно, количество электричества, втекающее через нее в единицу времени, равно E_1. Третье условие также выполняется, так как для точки в бесконечности $r_1=r_2=\ldots$. Резюмируя, мы заключаем, что

$$u = M + \frac{1}{2\pi \cdot k \cdot \delta} (E_1 + E_2 + \ldots + E_n) \ln r_1 = M.$$

Разделив соответственно левые и правые части первого и последнего равенства, получаем

$$k \frac{\frac{\partial u}{\partial N}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = k' \frac{\frac{\partial u'}{\partial N}}{\frac{\partial u'}{\partial s}}.$$

Но $\frac{\partial u}{\partial N} \Big/ \frac{\partial u}{\partial s}$ — котангенс угла, образуемого направлением тока в первой среде с нормалью N. Если обозначить этот угол через φ, а соответствующий угол для второй среды — через φ', то

$$\operatorname{tg} \varphi : \operatorname{tg} \varphi' = k : k'.$$

Эта пропорция задает закон преломления электрического тока при переходе из одной среды в другую.

Такое же выражение для u получается и в том случае, когда пластина ограничена, при условии, если граница пересекает кривые равного потенциала под прямым углом [4].

Если мы предположим теперь, что имеются только две точки подвода, то

$$u = M + N \ln (r_2/r_1),$$

где $N \cdot 2\pi k\delta = E_1 = -E_2$; кривые равного потенциала определяются при этом соотношением

$$r_2/r_1 = \text{const}.$$

Это окружности, построенные, как на диаметре, на отрезке, соединяющем две точки, расположенные гармонически относительно A_1 и A_2 [5]. Кривые, пересекающие эти окружности ортогонально (т. е. линии тока), представляют собой окружности, проходящие через A_1 и A_2. Следовательно, если пластина ограничена одной или несколькими такими окружностями, то u имеет указанное выше значение [3].

Оба первых условия на u для ограниченной пластины выполняются всегда:

$$u = M - \frac{1}{2\pi k\delta} (E_1 \ln r_1 + E_2 \ln r_2 + \ldots + E_n \ln r_n + \\ + E_1' \ln r_1' + E_2' \ln r_2' + \ldots + E_m' \ln r_m'),$$

где $r_1, r_2, \ldots, E_1, E_2, \ldots$ означают то же, что и выше; $r_1', r_2', \ldots$ — расстояния от рассматриваемой точки пластины до произвольных точек $A'_1, A'_2, \ldots$, лежащих за пределами пластины; $E_1', E_2', \ldots$ — произвольные коэффициенты. В некоторых случаях точки $A'_1, A'_2, \ldots$ и коэффициенты $E_1', E_2', \ldots$ удается определить так, что выполняется и третье условие, т. е. кривые $u = \text{const}$ пересекают границу пластины ортогонально. Если пластина круглая, то такое всегда возможно.

Если мы рассмотрим далее случай, когда имеются только две точки подвода тока, то выражение для u (мы снова положим $2\pi k\delta N = E_1 = -E_2$) примет вид

$$u = M + N\left(\ln \frac{r_2}{r_1} + \ln \frac{r_2'}{r_1'}\right).$$

Точки A_1' и A_2' мы находим с помощью следующего построения. Соединим центр пластины C (рис. 2) с точками A_1 и A_2 и отложим на продолженных отрезках CA_1 и CA_2 такие отрезки CA_1' и CA_2', чтобы радиус пластины был средним пропорциональным между CA_1 и CA_1' и между CA_2 и CA_2' [4].

---

[3] Кривые, содержащие все точки, через которые текут токи одинаковой плотности, в этом случае имеют вид лемнискат, задаваемых уравнением $r_1 r_2 = \text{const}$.

[4] То, что кривые $\ln (r_2/r_1) + \ln (r_2'/r_1') = \text{const}$ пересекают границу пластины ортогонально, доказывается следующим образом. Уравнение кривых, пересекающих границу ортогонально, имеет вид

$$v = (r_2, R) - (r_1, R) + (r_2', R) - (r_1', R) = \text{const}.$$

Если ввести прямоугольные координаты, то это уравнение окажется уравнением четвертой степени. Как кривые $\ln (r_2/r_1) = \text{const}$, так и кривые $\ln (r_2'/r_1') = \text{const}$ пересекают окружность, которую можно провести через четыре точки A_1, A_2, A_1', A_2', ортогонально. Следовательно, и

Если ток подводится в n точках, то выражение для u (для краткости мы обозначим $E_i/2\pi k\delta$ через N_i) примет вид

$$u = M - N_1(\ln r_1 - \ln r_1') - N_2(\ln r_2 - \ln r_2') - \ldots - N_n(\ln r_n - \ln r_n'),$$

где точки A_1', A_2', ... мы найдем с помощью того же построения: соединим C с точками A_1, A_2, ... и на продолженных отрезках CA_1, CA_2, ... отложим такие отрезки CA_1', CA_2', ..., чтобы радиус пластины был средним пропорциональным между CA_1 и CA_1', между CA_2 и CA_2' и т. д.[5]

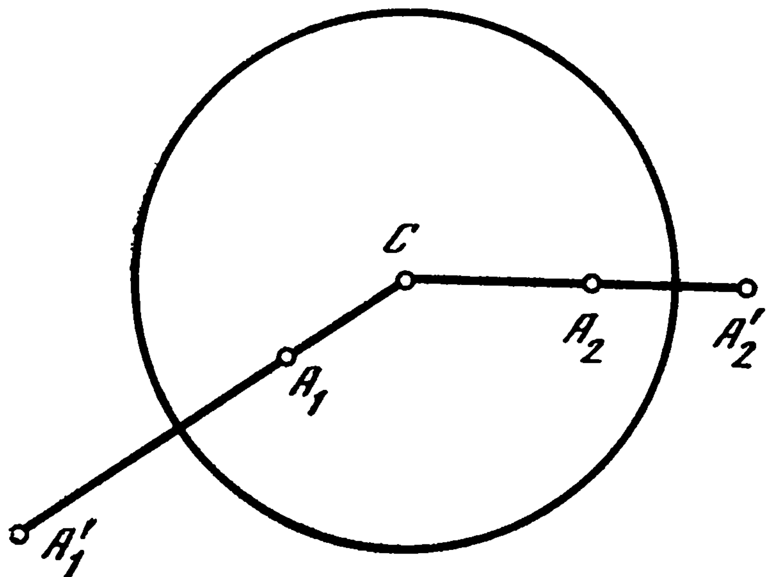


Рис. 2

Если вокруг отдельных точек подвода тока описать замкнутые кривые и считать, что к этим кривым электричество подводится не через точки A_1, A_2, ..., а каким-нибудь другим способом (например, через опирающиеся на них цилиндрические поверхности), но так, чтобы к каждой точке поступало бы столько же электричества, сколько поступало прежде, то электрическое состояние пластины (за исключением участков, ограниченных кривыми) не изменится, и поэтому для u сохранится прежнее выражение.

Выберем в качестве таких кривых бесконечно малые окружности с центрами в точках A_1, A_2, ... К этим окружностям от точек A_1, A_2, ... поступают количества электричества E_1, E_2, ..., причем каждое распределяется равномерно

кривые $\ln(r_2/r_1)+\ln(r_2'/r_1')=\text{const}$ пересекают ту же окружность ортогонально. Уравнение этих кривых должно поэтому также содержаться в уравнении $v=\text{const}$. Отсюда мы заключаем, что левая часть уравнения $v=\text{const}$, если в нее предварительно перенести постоянную из правой части, разлагается при подходящих значениях постоянных на два множителя, один из которых совпадает с левой частью (в которую перенесены все члены из правой части) уравнения окружности, проведенной через точки A_1, A_2, A_1', A_2'. Можно показать, что другой множитель, если положить его равным нулю, задает уравнение границы пластин. Если выбрать C за начало координат, положить $CA_1=\rho_1$, $CA_2=\rho_2$, $CA_1'=\rho_1'$, $CA_2'=\rho_2'$, обозначить через φ_1 угол, образуемый с осью x отрезком ρ_1, через φ_2 — угол, образуемый с осью x отрезком ρ_2, то уравнения двух окружностей, о которых идет речь, запишутся следующим образом:

$$x^2 + y^2 - \rho_1 \cdot \rho_1' = 0 \quad (\text{или } x^2 + y^2 - \rho_2 \cdot \rho_2' = 0)$$

и

$$x^2 + y^2 + \frac{(\rho_1+\rho_1')\sin\varphi_2 - (\rho_2+\rho_2')\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\,x - \frac{(\rho_1+\rho_1')\cos\varphi_2 - (\rho_2+\rho_2')\cos\varphi_1}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}\,y + \rho_1\rho_1' = 0.$$

Уравнение $v=C$ [6], если принять за R ось y, запишется в виде

$$\operatorname{arctg}\frac{x-\rho_2\cos\varphi_2}{y-\rho_2\sin\varphi_2} - \operatorname{arctg}\frac{x-\rho_1\cos\varphi_1}{y-\rho_1\sin\varphi_1} + \operatorname{arctg}\frac{x-\rho_2'\cos\varphi_2}{y-\rho_2'\sin\varphi_2} - \operatorname{arctg}\frac{x-\rho_1'\cos\varphi_1}{y-\rho_1'\sin\varphi_1} = C.$$

Если привести это уравнение к алгебраической форме и положить $C=\varphi_1-\varphi_2$, то мы получим уравнение, совпадающее с произведением двух первых уравнений.

[5] Так как $N_1+N_2+\ldots+N_n=0$, потенциал u можно представить в виде

$$u = M - \sum[(N_k - N_\lambda)/n]\,[\ln r_k + \ln r_k' - \ln r_\lambda - \ln r_\lambda'],$$

где сумма берется по k и λ, причем λ всегда больше k (так как если в обоих выражениях для u мы найдем коэффициенты при $\ln r_i + \ln r_i'$, то они окажутся равными). Отдельный член

по всем частям соответствующей окружности [6]. Следовательно, если рассматривать эти окружности как границы поверхностей, по которым соприкасаются с пластиной проводники, по которым к ней поступают количества электричества E_1, E_2, . . ., то полученное выше выражение для u остается в силе (в предположении, что ток в каждом проводнике равномерно распределен относительно оси). На некотором расстоянии от пластины ток в проводнике распределен именно так, поэтому вполне возможно, что такое же распределение сохраняется и до конца проводника, и наше предположение соответствует действительности.

До сих пор мы рассматривали E_1, E_2, . . . как непосредственно заданные величины. Но коль скоро мы проводим эксперимент, то их необходимо найти с помощью вычислений. Я приведу простой пример таких вычислений, и заодно мы найдем сопротивление пластины.

Пусть окружности, описанные вокруг точек A_1 и A_2, соответствуют двум концам проводника радиуса ρ с электропроводностью k'. Электродвижущая сила K сосредоточена в сечении проводника D. Требуется определить электрическое состояние замкнутого контура.

Если длину проводника от сечения D до какого-то другого сечения обозначить l, то потенциал [на расстоянии l от сечения D определяется выражением]

$$u' = \begin{cases} m - nl & \text{для одной половины проводника,} \\ m - K + nl & \text{для другой его половины.} \end{cases}$$

Потенциал в точке пластины равен

$$u = M - \frac{E}{2\pi k\delta} \ln \frac{r_1 r'_1}{r_2 r'_2},$$

здесь E — сила тока, текущего по проводнику. Она равна

$$E = nk'\pi\rho^2, \qquad n = E/k'\pi\rho^2.$$

Если l_1 и l_2 — значения l, соответствующие сечениям проводника, проведенным через точки A_1 и A_2, то потенциалы на расстояниях l_1 и l_2 от сечений соответственно равны [7]

этого выражения, если положить его равным постоянной, задает, как следует из сказанного выше, семейство кривых, пересекающих границу пластины ортогонально. Такое семейство кривых задает и сумма, если ее положить равной постоянной.

[6] Кривые равного потенциала в окрестности точки A_1 имеют вид концентрических окружностей $r_1=\text{const}$, где радиус r_1 бесконечно мал по сравнению с r_2, r_3, r'_1, r'_2, ... Отсюда следует, что электричество из точки A_1 распространяется во все стороны равномерно. Это рассуждение не проходит, если точка A_1 расположена слишком близко к границе пластины, так как тогда расстояние r'_1 также бесконечно мало. Следовательно, если проводник находится очень близко от границы, то для точки, расположенной поблизости от проводника, выведенное выше выражение для u становится неверным. Однако это выражение остается в силе для точки, расположенной на большем расстоянии [от проводника], в чем нетрудно убедиться, заменив проводник бесконечно большим числом очень близко расположенных точек подвода тока. Отсюда следует также, что в общем случае конфигурация проводника очень слабо влияет на потенциал далеко лежащих точек при условии, если проводник допустимо считать бесконечно тонким.

[7] Приведенные выражения не вполне точны; вблизи пластины соотношение $u'=m-nl$ не выполняется (ток в проводнике не параллелен оси проводника). Но так как радиус проводника ρ можно считать бесконечно малым, мы можем пренебречь указанным обстоятельством. Аналогичным образом необходимо обосновать и соотношение $\omega'=(l_1+l_2)/k'\pi\rho^2$.

$$u_1' = m - \frac{E}{k'\pi\rho^2} l_1,$$

$$u_2' = m - K + \frac{E}{k'\pi\rho^2} l_2.$$

Но границы этих сечений принадлежат пластине, следовательно:

$$u_1' = M - \frac{E}{2\pi k\delta} \ln \frac{\rho \cdot A_1A_1'}{A_1A_2 \cdot A_1A_2'},$$

$$u_2' = M - \frac{E}{2\pi k\delta} \ln \frac{A_2A_1 \cdot A_2A_1'}{\rho \cdot A_2A_2'}.$$

(Так как радиус ρ бесконечно мал, мы можем в u_1' вместо r_1' взять A_1A_1' и т. д.) Из этих соотношений получаем

$$K = E \cdot \left\{\frac{(l_1 + l_2)}{k' \cdot \pi\rho^2} + \frac{1}{2k\pi\delta} \ln\left(\left(\frac{A_1A_2}{\rho}\right)^2 \frac{A_1A_2'}{A_1A_1'} \cdot \frac{A_1'A_2}{A_2A_2'}\right)\right\}.$$

Если обозначить сопротивление пластины через ω, а сопротивление проводника — через ω', то должно выполняться равенство

$$K = E \cdot (\omega + \omega'),$$

а так как

$$\omega' = \frac{l_1 + l_2}{k' \cdot \pi\rho^2},$$

мы получаем

$$\omega = \frac{1}{2\pi k\delta} \cdot \ln\left\{\left(\frac{A_1A_2}{\rho}\right)^2 \cdot \frac{A_1A_2' \cdot A_2A_1'}{A_1A_1' \cdot A_2A_2'}\right\}.$$

Перехожу к описанию поставленного мной опыта [7].

Я взял для него круглую пластину из тонкой листовой меди диаметром в 1 фут. В двух точках на краю пластины на расстоянии 3/4 фута друг от друга были припаяны два тонких медных провода, соединенных с полюсами гальванического источника. Если я прикасался к пластине концами двух проводов, противоположные концы которых были погружены в чашечки с ртутью мультипликатора [8], то его магнитная стрелка должна была отклоняться в том случае, когда в точках пластины, которых я касался, потенциал имел различные значения. В том же случае, когда точки касания располагались на *одной* кривой равного потенциала, стрелка не должна была отклоняться. Следовательно, держа один проводник неподвижно и отыскивая такие точки, в которых магнитная стрелка не отклонялась, я мог находить бесконечно много точек, лежащих на одной кривой равного потенциала с неподвижным концом первого проводника.

Согласно теории, такая кривая должна была иметь форму окружности, описанной на диаметре, концы которого находятся в гармоническом отношении с точками подвода тока. Я попытался начертить такую окружность, расположенную как можно ближе к найденным точкам. В следующей таблице в первом

столбце указан радиус окружности, а в остальных столбцах — расстояния от найденных точек до окружности (за единицу принята 1/100 дюйма).

Радиус	Расстояние
114	+1, −1, −1, +1,
278	0, 0, 0, 0, 0, +1,
604	+1, +1, +1, 0, −1 −1, −3, −2, 0, −4, +7
590	−1, −2, −1, 0, 0, 0, +3
285	0, −1, −1, −1, 0, −2, +7
117	0, 0, −1, +1
∞	+2, +2, 0, −2, −3, 0, 0, +2, +4, +6, +3, 0

На рис. 3 показано примерное расположение наблюдавшихся точек. (Последняя строка в таблице соответствует точкам, лежащим вблизи средней линии BC, и указывает расстояния от этой линии.)

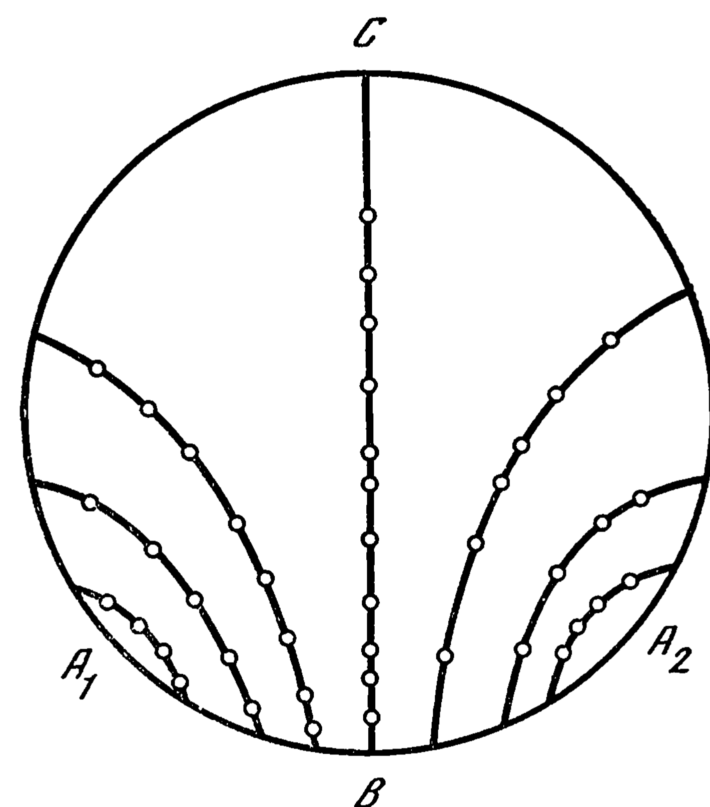


Рис. 3

Отклонения столь малы, что их вполне удовлетворительно можно объяснить неоднородностью электропроводности медной жести и ошибками наблюдения. Если принять такое объяснение, то этот эксперимент показывает, что потенциал в каждой точке пластины есть функция от r_2/r_1, т. е.

$$u = f\,(r_2/r_1);$$

какая это функция f, показывает другой опыт.

Я пропускал через пластину ток от постоянного гальванического источника и касался пластины в двух точках концами двух проводов, к которым, помимо мультипликатора, был подключен слабый термоэлемент, составленный из меди и цинка. Если обе точки контакта я выбирал так, чтобы через мультипликатор не шел ток, то разность потенциалов между ними должна быть равной электродвижущей силе термоэлемента.

Одну точку контакта я выбирал на прямой, соединяющей точки подвода тока, и считывал по шкале расстояния до этих точек r_1 и r_2. Затем я искал на той же линии соответствующую точку контакта. Расстояния от нее до точек подвода тока я обозначил R_1 и R_2. В моем опыте $r_1+r_2=R_1+R_2=39$, и я обнаружил:

r_1	5	10	15	20	25	30
R_1	10,4	17,3	22,8	28	31,5	34,4

Отсюда мы получаем закон, которому следуют r_1, r_2, R_1, R_2:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \text{const}.$$

Вычислив по этому закону R_1 по r_1, я обнаружил следующие отклонения:

Погрешность в R_1	+0,4	—0,1	—0,4	+0,2	0,0	—0,2
R_1	10,4	17,3	22,8	28	31,5	34,4

Такой же опыт, как с линией, соединяющей точки подвода тока, я провел с проходящей через эти точки окружностью, которая имела радиус 5 дюймов. Чтобы удобнее было считывать положение точек контакта, я нанес на эту окружность деления. Если дуги от одной из точек подвода тока до точек контакта обозначить через φ и Φ, то я получил следующие результаты:

φ	10	20	30	40	50	60	70	80
Φ	25,4	48,3	62,5	70,9	78,7	84	88,75	92

Дуги от одной точки подвода тока к другой были равны 100 делениям; отсюда я вычислил r_1, r_2, R_1, R_2 и выяснил, следует ли эти величины приведенному выше закону. Ошибки, которые, по-видимому, были допущены при измерении Φ, составляли:

Φ	25,4	48,3	62,5	70,9	78,7	84	88,75	92
Ошибка в Φ	+0,2	+0,3	—0,4	—1,4	0,0	—0,3	0,6	0,0

Ошибки в этой и в предыдущей серии наблюдений, по моему мнению, могут быть удовлетворительно объяснены частично как ошибки наблюдения, частично неоднородной электропроводностью медной пластины, поэтому следующий закон можно считать экспериментально доказанным: если разность $f(r_2/r_1)-f(R_2/R_1)$ постоянна, то произведение $(r_2/r_1)(R_1/R_2)$ также постоянно. Именно разность $f(r_2/r_1)-f(R_2/R_1)$ ранее была равна разности потенциалов в точках контакта.

Отсюда уже нетрудно найти функцию f. Действительно, если положить $r_2/r_1=p$, $R_2/R_1=P$, то сформулированное выше утверждение означает, что

$$f(p)-f(P)=F(p/P),$$

где F — пока неизвестная функция. Если положить $p/P=q$, то последнее уравнение примет вид

$$f(qP)-f(P)=F(q),$$

или после взятия частной производной по P

$$q\cdot f'(qP)-f'(P)=0.$$

Следовательно, положив $P=1$, мы получим

$$f'(q)=f'(1)/q=N/q, \qquad f(q)=M+N\ln q,$$

$$u=M+N\ln(r_2/r_1),$$

где M и N — произвольные постоянные.

Примечание

Я приложил немало усилий, чтобы проверить экспериментально приведенное выше выражение для сопротивления пластины. Однако изменения, испытываемые этим сопротивлением при варьировании расстояния между провод-

никами, столь малы, что наблюдения содержат неопределенность, не позволяющую считать их доводами как в пользу, так и против теории. Основная трудность, с которой я, помимо этого, столкнулся в указанных опытах, состояла в следующем: добиться, чтобы проводники соприкасались с пластиной одинаково глубоко. Лучше всего мне удалось достичь этого, когда я вместо медной пластины взял слой ртути, в которую погружал проводники.

Для этого, чтобы иметь возможность наблюдать малые изменения сопротивления, я пользовался следующим приспособлением. Ток от гальванического источника делился на два плеча ACB и ADB (рис. 4), точки C и D были соединены промежуточным участком, в который включался мультипликатор. В AC-участок была включена пластина с двумя проводниками, по которым через нее проходил ток, в BC — реостат (AD — более короткий и толстый, BD — более длинный и тонкий медные проводники. Если я устанавливал реостат так, что через мультипликатор ток не шел ((AC), (BC), ... — сопротивления участков AC, BC, ...), то, как только что мной доказано, должно было выполняться соотношение

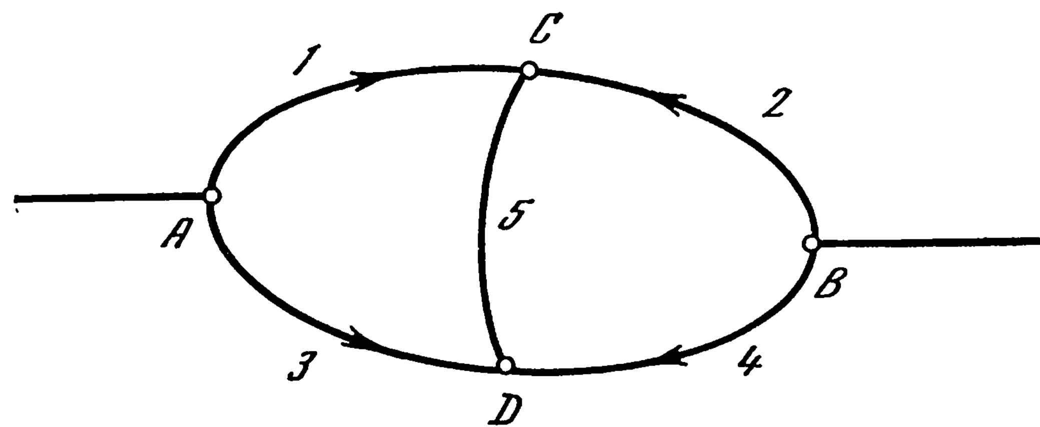


Рис. 4

$$(AC) : (BC) = (AD) : (BD).$$

Таким образом, изменение сопротивления (AC) было пропорционально непосредственно наблюдаемым изменениям сопротивления (BC), но малому изменению сопротивления (AC) соответствовало значительное изменение сопротивления (BC).

Чтобы удобнее вывести приведенную выше пропорцию, я докажу сначала следующую теорему [9].

Пусть по системе проводников, произвольно соединенных между собой, течет ток. Тогда:

1) если проводники 1, 2, ..., μ соединяются в одной точке, то

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_\mu = 0,$$

где I_1, I_2, ... — силы токов, текущих по этим проводникам (все токи, текущие к общей точке, считаются положительными);

2) если проводники 1, 2, ..., ν образуют замкнутый контур, то сумма

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \ldots + I_\nu\omega_\nu$$

равна сумме всех электродвижущих сил, встречающихся при обходе проводников в последовательности 1, 2, ..., ν; ω_1, ω_2, ... — сопротивления проводников; I_1, I_2, ... — силы текущих по проводникам токов (для всех токов положительным считается *одно* направление).

Первая часть нашей теоремы непосредственно следует из того, что к точке соприкосновения проводников 1, 2, ..., μ подводится ровно столько электричества, сколько отводится от нее. Вторая часть доказывается следующим об-

разом. Электрический потенциал в точке проводника i равен $m_i - n_i l_i$, где l_i — расстояние от начала проводника до рассматриваемой точки. Если полную длину проводника обозначить через l'_i, а электродвижущую силу, сосредоточенную в точке контакта проводника i и следующего проводника, обозначить через K_i, то, рассматривая потенциалы в точках контакта любых двух смежных проводников, мы получим уравнения

$$m_1 - n_1 l'_1 + K_1 = m_2,$$
$$m_2 - n_2 l'_2 + K_2 = m_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$m_\nu - n_\nu l'_\nu + K_\nu = m_1.$$

Следовательно,

$$n_1 l'_1 + n_2 l'_2 + \dots + n_\nu l'_\nu = K_1 + K_2 + \dots + K_\nu,$$

но $I_i = n_i k_i q_i$ и $\omega_i = l'_i / k_i q_i$, где k_i — электропроводность, а q_i — площадь поперечного сечения проводника i, поэтому последнее равенство можно записать в виде

$$I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + \dots + I_\nu \omega_\nu = K_1 + K_2 + \dots + K_\nu,$$

что и требовалось доказать.

Многократное применение этой теоремы позволяет получить столько уравнений, сколько необходимо для определения всех I. Применительно к рассматриваемому нами случаю она приводит к уравнениям (если проводники перенумерованы так, как показано на рис. 4)

$$I_1 + I_2 = 0, \quad I_1 \omega_1 - I_3 \omega_3 = 0,$$
$$I_3 + I_4 = 0, \quad I_2 \omega_2 - I_4 \omega_4 = 0$$

(так как величина I_5 должна быть равна нулю). Из этих уравнений следует, что $\omega_1 / \omega_2 = \omega_3 / \omega_4$.

15.

ДОПОЛНЕНИЕ К ПРЕДЫДУЩЕЙ СТАТЬЕ *

В указанной заметке я занимался вычислением [распределения] электричества, устанавливающегося в металлической пластине, по которой пропускают постоянный гальванический ток, и указал метод наблюдения, с помощью которого был экспериментально проверен результат, полученный мной теоретически. Но существует и другой, вполне очевидный способ сравнения теории с экспериментом. Я имею в виду наблюдение действия пластины на магнитную стрелку.

---

* Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze // Ann. Phys. 1846. Bd. 67. S. 344—349. Перевод Ю. А. Данилова по изданию: *Kirchhoff G.* Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 17—22.

Мною был поставлен эксперимент по изучению действия [на магнитную стрелку] круглой пластины. Ток подводился и отводился в двух противоположных концах диаметра. В этом сообщении я хочу показать, в какой мере мои наблюдения оказались в согласии с вычислениями. Я намереваюсь сначала изложить теоретические соображения, лежащие в основе вычислений, а затем описать выполненный мной опыт.

Если над горизонтальной пластиной, по которой текут гальванические токи, подвесить магнитную стрелку, то она отклонится от магнитного меридиана. Чтобы вычислить величину этого отклонения, необходимо прежде всего определить действие такой пластины на магнитный полюс, или, точнее, только горизонтальную составляющую такого действия. Мы будем решать эту задачу в предположении, позволяющем очень легко найти ее общее решение, а именно в предположении, что магнитная стрелка находится бесконечно близко к пластине. В этом случае в горизонтальную составляющую дает вклад только та часть пластины, которая расположена непосредственно под магнитным полюсом. Все более далекие части пластины дают вклад только в вертикальную составляющую, в то время как направление силы, с которой элемент тока действует на полюс, перпендикулярно к плоскости, проходящей через обе составляющие. Следовательно, горизонтальная составляющая не изменится, если мы предположим, что по более далеким от нее частям пластины токи текут не так, как в действительности. Если предположить, что пластина неограничена и электричество повсюду течет в ней в том же направлении и такой же силы, как в части, расположенной под полюсом, то наша задача сведется к следующей: определить действие на магнитный полюс неограниченной пластинки, по которой равномерно течет электричество.

Примем плоскость пластины за плоскость xy прямоугольной системы координат, обозначим координаты полюса через a, b, c; количество магнитной жидкости, которое он содержит, — через μ; координаты точки пластины — через x, y; угол, образуемый направлением тока с осью x, — через φ; силу тока — через i. Тогда составляющие силы, с которой пластина действует на полюс, в направлении осей x и y определяются выражениями

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\mu i c \cdot \sin\varphi}{((x-a)^2+(y-b)^2+c^2)^{3/2}}\, dxdy,$$

$$Y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu i c \cdot \cos\varphi}{((x-a)^2+(y-b)^2+c^2)^{3/2}}\, dxdy.$$

Эти интегралы легко берутся; их значения равны:

$$X = -2\pi\mu i \cdot \sin\varphi, \qquad Y = 2\pi\mu i \cdot \cos\varphi.$$

Мы видели, что те же выражения справедливы и в том случае, когда электричество течет по пластине неравномерно, если только полюс находится достаточно близко к пластине. Однако при этом для i и φ следует брать те значения, которые соответствуют этим величинам для проекции полюса на пластину. Если токи удовлетворяют закону, согласно которому электрический

потенциал в каждой точке x, y равен $u(x, y)$, то для этой точки (положив электропроводность равной 1) мы получили бы

$$i \sin \varphi = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad i \cos \varphi = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Следовательно, если x и y — горизонтальные координаты полюса, то действующие на него силы равны соответственно

$$X = 2\pi\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad Y = -2\pi\mu \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Отсюда нетрудно найти, что на магнитную стрелку, расположенную очень близко от пластины (в предположении, что магнитные жидкости сосредоточены на концах стрелки) и способную поворачиваться в горизонтальной плоскости относительно своего центра, действует вращательный момент, равный

$$\pi M \left(\frac{du(x', y')}{dl} + \frac{du(x'', y'')}{dl}\right),$$

где M — магнитный момент стрелки; x', y' и x'', y'' — горизонтальные координаты ее концов; d/dl — дифференцирование вдоль оси стрелки.

Таким образом, если пластина вынуждает стрелку отклониться на угол ψ от магнитного меридиана, то (обозначив через H горизонтальную составляющую земного магнетизма) мы получаем соотношение

$$H \sin \psi = \pi \left(\frac{du(x', y')}{dl} + \frac{du(x'', y'')}{dl}\right).$$

С этим соотношением я сравнил произведенные мной наблюдения. Предположениям, принятым выше при рассмотрении магнитной стрелки, я попытался по возможности удовлетворить тем, что использовал очень короткую стрелку и располагал ее так близко к пластине, что она почти касалась последней. Малость стрелки (в качестве нее был взят отрезок тонкой проволоки длиной 3/4 дюйма), как я надеялся, должна была сделать приемлемым предположение, что ее допустимо рассматривать как магнитную линию, у которой магнитный момент отдельных молекул был бы постоянен, а его ось совпадала по направлению с самой линией. Но такую линию всегда можно заменить двумя магнитными полюсами, расположенными на ее концах. Под стрелкой находилась пластина — круглый диск из станиоля диаметром 10 дюймов. Диск был наклеен на кусок зеркального стекла и вместе с ним мог перемещаться в направлении, перпендикулярном магнитному меридиану так, чтобы центр стрелки всегда оставался на одном диаметре. К концам диаметра, совпадавшего с магнитным меридианом, были прикреплены два проводника, по которым через пластину шел ток от элемента Даниеля.

Для того чтобы, по возможности, устранить влияние этих проводников на стрелку, они располагались в плоскости пластины. Эксперимент был поставлен так, что с помощью зеркального устройства можно было наблюдать различные углы отклонения ψ, соответствующие различным расстояниям ρ между центром стрелки и центром пластины. При изменении направления тока

на обратное или при замене ρ на $-\rho$ величина отклонения должна была бы оставаться неизменной, если бы не было возмущений. Но в действительности отклонение изменялось потому, что линия, соединявшая точки подвода тока, не вполне точно совпадала с магнитным меридианом отчасти из-за постоянной ошибки в ρ и влияния подводящих проводников, отчасти из-за неоднородности пластины. Отклонения имели следующую величину:

При ρ, равной	При положительном токе	При отрицательном токе	При ρ, равной	При положительном токе	При отрицательном токе
0	94,8	96,2			
1	90,0	93,8	—1	93,4	96,3
2	87,8	89,2	—2	89,9	90,9
3	80,6	81,6	—3	83,0	83,3
4	71,4	72,0	—4	74,0	74,8
5	61,0	61,6	—5	64,2	64,5

Я полагаю, что значения, которые величины, содержащие отклонения, имели бы в отсутствие возмущений, мне удалось довольно точно воспроизвести с помощью арифметического среднего четырех соответствующих значений. Я получил следующие значения для ψ:

При $\rho=0$	95,5	При $\rho=3$	82,2
1	93,4	4	73,1
2	89,5	5	62,8

Относительно приведенных выше наблюдений следует также заметить, что после двукратного измерения одним и тем же прибором силы тока и направления магнитного меридиана с помощью интерполяции устанавливались, какими были значение силы тока и положение магнитного меридиана в момент наблюдения каждого отклонения. Указанные числа приведены к некоторой постоянной силе тока. (За единицу ψ была выбрана величина $2{,}6'$, за единицу ρ — 5/7 дюйма.) Для сравнения наблюдений с теорией мы вычисляли ψ по формуле

$$H \sin\psi = \pi\left(\frac{du\,(x',\ y')}{dl} + \frac{du\,(x'',\ y'')}{dl}\right).$$

Если начало координат поместить в центре пластины, а ось x совместить с магнитным меридианом, то (через R мы обозначили радиус пластины)

$$u = A + B \ln\frac{(x+R)^2+y^2}{(x-R)^2+y^2},$$

где A и B — неизвестные постоянные. Так как угол отклонения стрелки очень мал, мы можем положить

$$x' = L/2, \qquad x'' = -L/2, \qquad y' = \rho, \qquad y'' = -\rho,$$

где L — длина магнитной стрелки; ρ — расстояние между центром стрелки

и центром пластины. Заменяя, кроме того, d/dl на d/dx и $\sin \psi$ на ψ, получаем

$$\psi = K \frac{\left(R-\frac{L}{2}\right)\left(R+\frac{L}{2}\right)+\rho^2}{\left\{\left(R-\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2\right\}\left\{\left(R+\frac{L}{2}\right)^2+\rho^2\right\}}.$$

Если ψ вычислять по этой формуле, придавая ρ различные значения, при которых мы наблюдали отклонение стрелки, то окажется, что при подходящем выборе K удается достичь следующего совпадения между вычислениями и наблюдениями:

ρ	Вычисления	Наблюдения	Ошибка
0	96,3	95,5	+0,8
1	94,4	93,4	+1,0
2	88,8	89,5	—0,7
3	81,3	82,2	—0,9
4	72,4	73,1	—0,7
5	63,5	62,8	+0,7

16.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, К КОТОРЫМ ПРИВОДИТ ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ТОКОВ *

Если дана система n проводников (1, 2, . . .,), которые произвольным образом соединены между собой, и к каждому проводнику приложена произвольная электродвижущая сила, то необходимое число линейных уравнений для определения сил токов $I_1, I_2, \ldots, I_m$, текущих по проводникам, можно получить, используя следующие две теоремы [1] [1].

I. Если проводники $k_1, k_2, \ldots$ образуют замкнутую фигуру и ω_k — сопротивление проводника k, E_k — приложенная к нему электродвижущая сила, которая считается положительной в том же направлении, что и I_k, то (при условии, что все $I_{k1}, I_{k2}, \ldots$ считаются положительными в одном и том же направлении)

$$\omega_{k_1} I_{k_1} + \omega_{k_2} I_{k_2} + \ldots = E_{k_1} + E_{k_2} + \ldots$$

II. Если проводники $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ сходятся в одной точке и $I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, \ldots$ считаются положительными по направлению к этой точке, то

$$I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2} + \ldots = 0.$$

---

* Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme gefürt wird // Ann. Phys. 1847. Bd 72. S. 498—508. Перевод Ю. А. Данилова по изданию: *Kirchhoff G.* Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 22—33.

[1] См. статью 14 наст. издания. — *Примеч. ред.*

Я намереваюсь теперь доказать, что решение уравнений, которые получаются, если эти теоремы применить к I_1, I_2, . . ., I_n (в предположении, что данная система проводников не распадается на несколько совершенно не связанных между собой систем), может быть получено в общем случае следующим образом [2].

Пусть m — число пересечений, т. е. точек, в которых сходятся два или более проводника, и пусть $\mu=n-m+1$. Тогда общий знаменатель всех величин I равен сумме сочетаний из w_1, w_2, . . ., w_n по μ элементов w_{k_1}, w_{k_2}, ..., w_{k_μ}, обладающих тем свойством, что после исключения проводников k_1, k_2, . . ., k_μ в них не остается *ни одной* замкнутой фигуры; числитель величины I_λ равен сумме сочетаний из w_1, w_2, . . ., w_n по $\mu-1$ элементов w_{k_1}, w_{k_2}, . . ., $w_{k_{\mu-1}}$, обладающих тем свойством, что после исключения проводников k_1, k_2, ..., $k_{\mu-1}$ в них не остается *ни одной* замкнутой фигуры и, кроме того, они содержат проводник λ; каждое сочетание умножается на сумму электродвижущих сил, которые приложены к проводникам, образующим соответствующую замкнутую фигуру. При этом электродвижущие силы считаются положительными в том же направлении, что и I_λ.

Чтобы сделать изложение более удобообозримым, я разделю доказательство этой теоремы на отдельные части.

1. Пусть μ — число, показывающее, сколько проводников следует *самое малое* удалить из произвольной системы, чтобы все замкнутые фигуры были разрушены. Тогда μ есть также число независимых уравнений, которые можно вывести, применяя теорему I.

Действительно, μ независимых уравнений, каждое из которых следует из теоремы I, можно получить следующим образом.

Пусть 1, 2, . . ., $\mu-1$, $\mu-\mu$ таких проводников, после изъятия которых не остается ни одной замкнутой фигуры. Тогда после исключения $\mu-1$ из них остается *одна* замкнутая фигура. К замкнутым фигурам, остающимся после изъятия по порядку проводников

$$\begin{array}{l} 2,\ 3,\ \ldots,\ \mu; \\ 1,\ 3,\ \ldots,\ \mu; \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \mu-1, \end{array}$$

применим теорему I.

По самому способу получения ни одно из μ уравнений не может быть следствием остальных, так как каждое из уравнений содержит одно неизвестное, не встречающееся во всех остальных уравнениях: только первое уравнение содержит I_1, только второе I_2 и т. д. Но из этих уравнений можно образовать любое другое уравнение, выводимое с помощью теоремы I. Действительно, уравнение, соответствующее замкнутой фигуре, составленной из нескольких замкнутых фигур, может быть построено из уравнений, соответствующих этим фигурам (с помощью сложения или вычитания), а, как мы хотим показать, каждая замкнутая фигура может быть составлена из μ выбранных нами фигур.

Действительно, все замкнутые фигуры данной системы, которую мы обозначим S, могут быть разделены на фигуры, содержащие проводник μ, и фи-

гуры, содержащиеся в системе S', образующейся из системы S после удаления из нее проводника μ. Если предположить, что все фигуры, принадлежащие ко второму классу, могут быть составлены из $\mu-1$ первых фигур, входящих в число тех μ фигур, о которых уже упоминалось выше, то ясно, что каждая фигура системы S может быть составлена из этих μ фигур. Действительно, произвольная фигура, содержащая проводник μ, может быть составлена из какой-то одной фигуры, содержащей проводник μ, и фигур, не содержащих проводник μ.

Предположение относительно системы S' может быть аналогичным образом распространено на систему S'', если S'' — система, получающаяся из S при удалении проводников μ и $\mu-1$, а именно предположение, что все входящие в S'' замкнутые фигуры могут быть составлены из $\mu-2$ первых фигур, входящих в число μ выбранных нами замкнутых фигур. Продолжая рассуждать таким же образом, мы, наконец, придем к системе $S^{(\mu-1)}$. Так как она содержит только одну замкнутую фигуру, правильность предположения, которое нам необходимо принять относительно нее, чтобы убедиться в истинности нашего утверждения, самоочевидна.

2. Поскольку теоремы I и II должны дать необходимое число уравнений для определения величин $I_1, I_2, \ldots, I_n$, эти уравнения, как было доказано выше, должны иметь следующий вид:

$$\alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^1 w_n I_n = \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \ldots + \alpha_n^1 E_n,$$
$$\alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^2 w_n I_n = \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \ldots + \alpha_n^2 E_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1^\mu w_1 I_1 + \alpha_2^\mu w_2 I_2 + \ldots + \alpha_n^\mu w_n I_n = \alpha_1^\mu E_1 + \alpha_2^\mu E_2 + \ldots + \alpha_n^\mu E_n,$$
$$\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu+1} I_n = 0,$$
$$\alpha_2^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \ldots + \alpha_n^{\mu+2} I_n = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \ldots + \alpha_n^n I_n = 0,$$

где часть коэффициентов α равна $+1$, часть -1 и 0, а μ означает то же, что и раньше.

Отсюда следует, что общий знаменатель величин I, т. е. определитель этих выражений, есть однородная функция степени от $w_1, w_2, \ldots, w_n$, в которую каждая отдельная величина w входит линейно, а помимо w, она содержит только числа. Полученный нами результат можно сформулировать следующим образом: общий знаменатель величин I есть сумма сочетаний из $w_1, w_2, \ldots, w_n$ по μ элементов; каждое сочетание умножается на свой числовой коэффициент. Мы видим также, что числитель каждой из величин I есть сумма сочетаний из $w_1, w_2, \ldots, w_n$ по $\mu-1$ элементов; каждое сочетание умножается на линейную однородную функцию от величин $E_1, E_2, \ldots, E_n$, взятых с числовыми коэффициентами.

3. Для того чтобы определить числовые коэффициенты знаменателя и числителей величин I, воспользуемся тем, что все равно, положим ли мы $w_k = \infty$

или перережем или удалим проводник k. Следовательно, при подстановке $w_k = \infty$ выражения для величин I должны переходить в решения уравнений, которые мы с помощью теорем I и II получаем для системы проводников, возникающей из заданной системы при удалении из нее проводника k. Сама величина I_k при $w_k = \infty$ должна обратиться в нуль.

Условимся понимать под 1, 2, ..., $\mu - 1$ любые $\mu - 1$ проводников, разделим числители и знаменатель величин I на $w_1, w_2, \ldots, w_{\mu-1}$ и затем положим $w_1 = \infty, w_2 = \infty, \ldots, w_n = \infty$. В результате I_λ перейдет в (I_λ). Если обозначить через $A^\lambda_{k_1 k_2 \ldots k_{\mu-1}}$ функцию величин E, стоящую в числителе выражения для I_λ как коэффициент при $w_{k_1} w_{k_2} \ldots w_{k_{\mu-1}}$, а коэффициенты при $w_{k_1} \times \times w_{k_2} \ldots w_{k_\mu}$ в знаменателе через $a_{k_1 k_2 \ldots k_\mu}$, то

$$(I_\lambda) = \frac{A^\lambda_{1,\,2,\,\ldots\,\mu-1}}{a_{1,\,2,\,\ldots\,\mu-1,\,\mu} w_\mu + a_{1,\,2,\,\ldots\,\mu-1,\,\mu+1} w_{\mu+1} + \ldots + a_{1,\,2,\,\ldots\,\mu-1,\,n} w_n}.$$

В силу предпосланного нами замечания, если проводник λ встречается среди проводников 1, 2, ... $\mu - 1$, то

$$(I_\lambda) = 0,$$

а если проводник λ не встречается среди проводников 1, 2, ... $\mu - 1$, то

$$(I_\lambda) = I'_\lambda,$$

где I'_λ означает силу тока, текущего по проводнику λ, когда проводники 1, 2, ... $\mu - 1$ удалены.

Предположим, что мы вывели уравнения, которые получаются, если теоремы I и II применить к остальным проводникам для определения величин $I'_\mu, I'_{\mu+1}, \ldots, I'_n$. Теорема I дает нам μ' независимых уравнений. Общий знаменатель величин I' есть функция степени μ' от $w_\mu, w_{\mu+1}, \ldots, w_n$, а числители этих величин — функции степени $\mu' - 1$ тех же аргументов. По определению μ, показатель μ' либо равен 1, либо больше 1. Если $\mu' > 1$, то, для того чтобы могли возникнуть равенства $(I_\lambda) = I'_\lambda$, либо числители и знаменатель величин I'_λ должны содержать общий множитель степени $\mu' - 1$ относительно w_μ, $w_{\mu+1}, \ldots$, либо должны выполняться равенства $(I_\lambda) = 0$ и $I'_\lambda = 0$, либо, наконец, величина (I_λ) должна иметь вид 0/0.

Первый из этих трех случаев, как показывает следующее рассуждение, представиться не может. Действительно, предположим, что общий множитель указанного вида существует. Тогда он должен входить в числители и знаменатель *всех* I. Предположим, что общий множитель содержит величину w_k. Тогда k должен быть проводником, входящим в замкнутую фигуру, ибо в противном случае величина w_k не могла бы входить в уравнения для $I'_\mu, I'_{\mu+1}, \ldots$. Так как числители и знаменатель величин I' линейны по каждой из величин w, мы получаем при сокращении на множитель, о котором идет речь, выражения, свободные от w_k. Подставляя эти выражения в уравнения, содержащие $w_k I'_k$, мы обращаем их в тождества. Частная производная от них по w_k приводит к равенству

$$I'_k = 0.$$

Но такое равенство не может выполняться. Если бы оно выполнялось, то должно было бы оставаться в силе и в том случае, когда мы обратили бы сколь угодно много величин w в бесконечность, т. е. удалили бы сколь угодно много проводников. Но если мы удалим столько проводников, что останется только *одна* замкнутая фигура, которая содержит проводник k, то величина I'_k не может быть равна нулю при произвольных значениях величин E.

Приведенное выше рассуждение показывает также, что равенство $I'_\lambda=0$ возможно не при всех значениях λ. Оно не возможно для тех проводников, которые принадлежат замкнутым фигурам.

Поэтому при $\mu' > 1$ по крайней мере при некоторых значениях λ должен представиться последний из трех случаев, т. е. величина (I_λ) должна быть представима в виде 0/0. Следовательно, при $\mu' > 1$ обращаются в нуль числители и общий знаменатель величин (I_μ), $(I_{\mu+1})$, . . . или (так как (I_1), (I_2), ... $(I_{\mu-1})$ равны нулю) величин (I_1), (I_2), . . ., (I_n).

Если после удаления проводников 1, 2, . . ., $\mu-1$ остается более одной замкнутой фигуры, то произведение $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1}$ не может входить ни в числители, ни в знаменатель величин I_1, I_2, . . ., I_n.

4. Теперь мы намереваемся определить множители, с которыми произведение $w_1 w_2 \ldots w_{\mu-1}$ входит в числители и в знаменатель величин I, при условии, что после удаления проводников 1, 2, . . ., $\mu-1$ остается только одна замкнутая фигура.

Пусть остающаяся фигура содержит проводники λ_1, λ_2, . . ., λ_ν. Тогда если проводник λ встречается среди них, то

$$I'_\lambda = 0,$$

а если λ не встречается, то

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \ldots + E_{\lambda_\nu}}{w_{\lambda_1} + w_{\lambda_2} + \ldots + w_{\lambda_\nu}},$$

причем E_{λ_1}, E_{λ_2}, . . . считаются положительными в том же направлении, что и I'_λ.

Знаменатель этого выражения может отличаться от знаменателя величины (I_λ), т. е. от выражения

$$a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu} w_\mu + a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu+1} w_{\mu+1} + \ldots + a_{1,2,\ldots\mu-1,n} w_n,$$

только числовым множителем. Поэтому все величины $a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu}$, $a_{1,2,\ldots\mu-1,\mu+1}$ должны обратиться в нуль, кроме величин $a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda_1}$, $a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda_2}$, . . ., $a_{1,2,\ldots\mu-1,\lambda_\nu}$, которые должны быть равны между собой.

Отсюда мы заключаем, что коэффициент при сочетании $w_{k_1} w_{k_2} \ldots w_{k_\mu}$ в знаменателе величин I отличен от нуля в том и только в том случае, если при удалении проводников k_1, k_2, . . ., k_μ все замкнутые фигуры разрушаются, и что все сочетания, удовлетворяющие этому условию и содержащие $\mu-1$ общих множителей w, должны иметь одинаковые коэффициенты.

Исходя из этого, можно доказать, что любые два сочетания

$$w_{k_1} w_{k_2} \ldots w_{k_\mu} \quad \text{и} \quad w_{k'_1} w_{k''_2} \ldots w_{k'_\mu}$$

в знаменателе должны иметь одинаковые коэффициенты, если при удалении как проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$, так и $k'_1, k'_2, \ldots, k'_\mu$ все замкнутые фигуры оказываются разрушенными.

Чтобы доказать это, сделаем следующие предварительные замечания.

При удалении проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ могут оказаться разрушенными все замкнутые фигуры. В этом случае каждый из проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ должен входить, по крайней мере, в одну замкнутую фигуру.

Но и каждая замкнутая фигура должна содержать, по крайней мере, один из этих проводников. Следовательно, если о проводнике k' известно, что он входит в замкнутую фигуру, то он должен входить *в одну и ту же* замкнутую фигуру, по крайней мере, с одним из проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$.

Кроме того, каждый из проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ должен входить в замкнутую фигуру, в которую не входят остальные $\mu-1$ проводников. Например, проводник k_μ входит в замкнутую фигуру, которая остается после удаления проводников $k_1, k_2, \ldots, k_{\mu-1}$. Обозначим ее через f_{k_μ}. Если фигуре f_{k_μ} принадлежит и проводник k'_μ, то после удаления проводников $k_1, k_2, \ldots, k_{\mu-1}$, k'_μ все замкнутые фигуры оказываются разрушенными. С помощью этого замечания нетрудно установить, что, какую бы замкнутую фигуру f мы ни выбрали, всегда можно найти $\mu-1$ таких проводников, после удаления которых та же фигура f останется единственной замкнутой фигурой. Например, если f содержит из проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ проводники k_1, k_2, k_3 и k'_2 — проводник, входящий в f_{k_2}, но не входящий в f, а k'_3 — проводник, входящий в f_{k_3}, но не входящий в f, то $k'_2, k'_3, k_4, \ldots, k_\mu$ — проводники требуемого типа.

Доказательство нашего утверждения мы хотим теперь провести следующим образом: мы предположим, что коэффициенты двух сочетаний указанного вида равны, если сочетания содержат ν общих множителей w, и докажем, что тогда коэффициенты двух сочетаний, содержащих только $\nu-1$ общих множителей, также должны быть равны. Если это нам удастся, то тем самым будет доказана истинность нашего утверждения.

Доказательство остается одним и тем же, какое бы значение ν мы ни выбрали, поэтому мы проведем его только при одном значении ν — при $\nu=3$. Итак, требуется доказать, что коэффициенты двух сочетаний

$$w_{k_1}w_{k_2}w_{k_3}\ldots w_{k_\mu} \quad \text{и} \quad w_{k_1}w_{k_2}w_{k'_3}\ldots w_{k'_\mu}$$

должны быть равны.

В системе проводников, из которых данная система возникает при удалении проводников k_1 и k_2, все замкнутые фигуры не могут быть разрушены при удалении менее чем $\mu-2$ проводников. Они оказываются разрушенными при удалении проводников $k_3, k_4, \ldots k_\mu$ и $k'_3, k'_4, \ldots, k'_\mu$. Отсюда следует, что проводник принадлежит той же замкнутой фигуре, которой принадлежит, по крайней мере, один из проводников $k_3, k_4, \ldots, k_\mu$, например проводник k_3. Только эта фигура остается при удалении проводников $k''_4, k''_5, \ldots, k''_\mu$. Но тогда эта же фигура — единственная остающаяся от исходной системы при удалении проводников $k_1, k_2, k''_4, k''_5, \ldots, k''_\mu$. Отсюда следует, что два сочетания

$$w_{k_1}w_{k_2}w_{k_3}w_{k''_4}w_{k''_5}\ldots w_{k''_\mu}$$

и

$$w_{k_1}w_{k_2}w_{k'_3}w_{k''_4}w_{k''_5}\ldots w_{k''_\mu}$$

с $\mu-1$ общими множителями должны иметь одинаковые коэффициенты. В силу принятого нами предположения сочетания

$$w_{k_1}w_{k_2}w_{k_3}w_{k_4}\ldots w_{k_\mu} \quad \text{и} \quad w_{k_1}w_{k_2}w_{k_3}w_{k''_4}\ldots w_{k''_\mu},$$

$$w_{k_1}w_{k_2}w_{k'_3}w_{k'_4}\ldots w_{k'_\mu} \quad \text{и} \quad w_{k_1}w_{k_2}w_{k'_3}w_{k''_4}\ldots w_{k''_\mu}$$

имеют попарно равные коэффициенты. Следовательно, коэффициенты сочетаний

$$w_{k_1}w_{k_2}w_{k_3}\ldots w_{k_\mu} \quad \text{и} \quad w_{k_1}w_{k_2}w_{k'_3}\ldots w_{k'_\mu}$$

также равны.

Тем самым доказано, что общий знаменатель величин I есть сумма сочетаний $w_{k_1}w_{k_2}\ldots w_{k_\mu}$ из $w_1, w_2, \ldots, w_n$ по μ элементов, которые обладают свойством: после удаления проводников $k_1, k_2, \ldots, k_\mu$ не остается ни одной замкнутой фигуры. Сумма сочетаний умножается на некоторый числовой коэффициент. Этот числовой коэффициент можно положить равным единице, если числители величин I определить указанным выше образом.

Эти числители теперь могут быть найдены очень легко. Действительно, из равенств

$$(I_\lambda)=0 \quad \text{и} \quad (I_\lambda)=I'_\lambda,$$

первое из которых выполняется при $\lambda \leqslant \mu-1$, а второе — при $\lambda > \mu-1$, следует, что

$$A^\lambda_{1,2,\ldots\mu-1}=E_{\lambda_1}+E_{\lambda_2}+\ldots+E_{\lambda_\nu},$$

если индекс λ встречается среди индексов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$, и

$$A_{1,2,\ldots\mu-1}=0$$

в противном случае.

Следовательно, коэффициент при члене $w_1w_2\ldots w_{\mu-1}$ (относительно которого мы уже доказали, что он может быть только тогда отличен от нуля, когда после удаления проводников $1, 2, \ldots, \mu-1$ остается только одна замкнутая фигура) равен нулю, если в этой фигуре не встречается проводник λ. Если же проводник λ в этой фигуре содержится, то коэффициент при $w_1w_2\ldots w_{\mu-1}$ равен сумме электродвижущих сил, имеющихся в фигуре. Электродвижущиеся силы считаются положительными в том же направлении, что и I_λ.

5. Для того чтобы доказать сформулированную нами теорему, остается еще показать равенство $\mu=n-m+1$. Это утверждение справедливо только в том случае, если заданная система проводников не распадается на несколько совершенно отдельных систем, в то время как в предыдущих рассуждениях такое предположение не требовалось.

Как было показано, μ — число независимых уравнений, которые можно получить, применяя теорему I. Число независимых уравнений, которые можно получить, применяя теорему II, соответственно должно быть равно $n-\mu$. Можно показать, что при нашем предположении это число равно $m-1$, откуда и следует равенство $\mu=n-m+1$.

Теорема II позволяет вывести не более $m-1$ независимых уравнений. Действительно, если теорему II применить ко всем m точкам пересечений, то в уравнения, которые при этом получатся, каждая величина I входит дважды: один раз с коэффициентом $+1$, другой раз с коэффициентом -1. Сумма всех уравнений дает тождество $0=0$. Но уравнения, возникающие в результате применения теоремы II к любым $m-1$ точкам пересечения, независимы, так как обладают следующим свойством: если выбрать любые из них и в любом количестве, то в них одно или несколько неизвестных встречается только один раз. Если обозначить точки пересечения $1, 2, \ldots, m$, а проводник, соединяющий две точки пересечения λ и k, — (λ, k), то в уравнения, получающиеся при рассмотрении точек пересечения $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, если одну из них, например k_1, помимо точек, входящих в число точек $k_2, \ldots, k_\nu$, соединить с еще одной точкой λ, неизвестная $I_{(k_1,\lambda)}$ не входит. Но одна из точек $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$ должна быть соединена не только с остальными из этих точек, но и с точкой λ, если проводники, соединяющие точки $k_1, k_2, \ldots, k_\nu$, не образуют замкнутую систему.

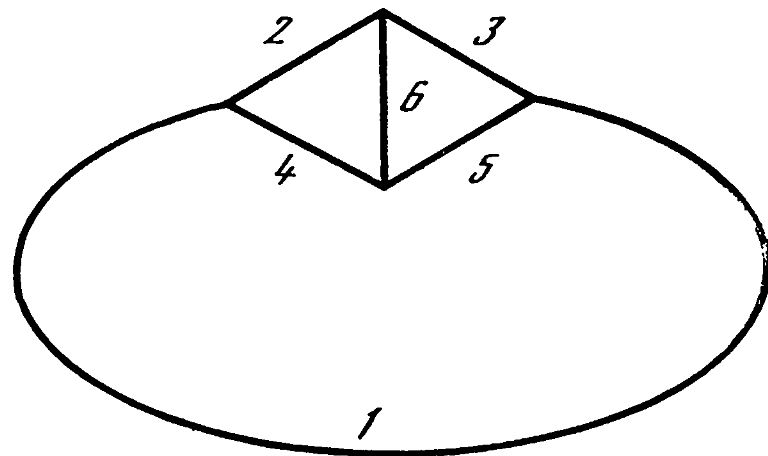


Рис. 1

Да позволено мне будет сделать несколько замечаний по поводу доказанной теоремы.

Если упорядочить члены числителя величины I_λ по величинам $E_1, E_2, \ldots, E_n$, то коэффициент при E_k окажется суммой взятых частью со знаком «плюс», частью со знаком «минус» сочетаний из $w_1, w_2, \ldots, w_n$ по $\mu-1$ тех элементов, которые входят в знаменатель величин I, умноженные как на w_λ, так и на w_k. Именно эти сочетания $w_{k_1}, w_{k_2}, \ldots, w_{k_{\mu-1}}$ обладают тем свойством, что после удаления проводников $k_1, k_2, \ldots, k_{\mu-1}$ остается только одна замкнутая фигура и что в эту фигуру входят и проводник λ, и проводник k. Сочетание $w_{k_1}w_{k_2}\ldots w_{k_{\mu-1}}$ следует брать со знаком «плюс», если в остающейся фигуре положительное направление I_λ совпадает с положительным направлением электродвижущей силы E_λ, и со знаком «минус» в противном случае.

Отсюда среди прочего следует, что если из произвольной системы мы выделим два проводника, то сила тока, создаваемого в одном из них электродвижущей силой в другом проводнике, равна силе тока, которую создала бы во втором проводнике такая же по величине электродвижущая сила в первом проводнике [3].

Найденное нами условие, при котором данное сочетание входит в знаменатель величин I, может быть, как нетрудно видеть, сформулировано следующим образом: сочетание $w_{k_1}w_{k_2}\ldots w_{k_\mu}$ входит в знаменатель, если уравнения, полученные с помощью теоремы I, не зависят от $I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_\mu}$. Можно показать, что это условие эквивалентно условию, согласно которому не существует уравнения, связывающего величины $I_{k_1}, I_{k_2}, \ldots, I_{k_\mu}$ или часть их и выводимого из уравнений, получаемых с помощью теоремы II. Это замечание часто позволяет с легкостью находить сочетания, не входящие в знаменатель

величин I. Например, если проводники 1, 2, 3 сходятся в одной точке, проводники 3, 4, 5 — в другой точке и проводники 5, 6, 7 — в третьей точке, то в знаменателе отсутствуют все сочетания, содержащие

$$w_1w_2w_3;\quad w_3w_4w_5;\quad w_5w_6w_7;\quad w_1w_2w_4w_5;$$
$$w_3w_4w_6w_7;\quad w_1w_2w_4w_6w_7.$$

Следовательно, знаменатель величин I для изображенной на рис. 1 конфигурации проводников, равен сумме всех сочетаний из w_1, w_2, . . ., w_6 по три элемента, за исключением следующих:

$$w_1 \cdot w_2 \cdot w_4;\quad w_1 \cdot w_3 \cdot w_5;\quad w_2 \cdot w_3 \cdot w_6;\quad w_4 \cdot w_5 \cdot w_6.$$

17.

О ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛ ДЛЯ СИЛЫ ГАЛЬВАНИЧЕСКОГО ТОКА В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКОВ К СИСТЕМЕ, ЧАСТИЧНО СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКОВ *

Ом [1], исходя из установленных им и названных в его честь законов [2], с помощью математических рассуждений вывел для неразветвленного участка цепи, состоящей из линейных проводников, известную формулу $J=K/R$ и соответствующие формулы для случая, когда участок состоит из двух или большего числа ветвей. Позднее я предложил более общий вывод формул для сил токов в совершенно произвольной системе линейных проводников [1], которые допустимо считать линейными. Этот случай встречается редко, так как цепям обычно придается такой вид, что они довольно близки к линейным, и почти во всех случаях, в которых применяются формулы Ома, их применяют к системам, частично состоящим из нелинейных проводников. Эти формулы применимы и к таким системам, но их применимость до сих пор не была доказана на основе принципов Ома со всей строгостью и общностью. Доказательство их применимости составляет основное содержание настоящей работы. Применимость формул Ома следует непосредственно из составляемых на основе законов Ома уравнений для токов, возникающих в произвольной системе соприкасающихся тел. Я дам сначала совместный вывод этих уравнений и докажу, что они позволяют однозначно определить все токи.

Если имеется произвольная система соприкасающихся тел и их соприкосновение приводит к возникновению гальванических токов, то, согласно представлениям Ома, в каждой точке любого тела существует определенное электрическое напряжение u, которое не зависит от времени, после того как токи становятся стационарными.

---

* Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 33—49. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] См. статью 14 наст. издания. — *Примеч. ред.*

Проведем в любом из тел две бесконечно близкие плоскости равного напряжения. В плоскости, отвечающей большему значению напряжения, выделим элемент $d\omega$ произвольной формы и через все точки его границы проведем нормали, высекающие из второй плоскости элемент такой же формы, как и $d\omega$. Мы получим бесконечно малый цилиндр, заключенный между двумя плоскостями. Во всех точках *любого* поперечного сечения этого цилиндра напряжение одинаково, а от одного поперечного сечения к другому напряжение равномерно убывает.

Пусть u — напряжение в $d\omega$, N — длина отрезка нормали к $d\omega$, направленной в сторону второй плоскости равного напряжения. В поперечном сечении цилиндра, соответствующем заданному значению N, напряжение равно $u+$ $+(\partial u/\partial N)\cdot N$ (производная $\partial u/\partial N$ должна быть отрицательной). Таким образом, по Ому, через любое поперечное сечение цилиндра за единицу времени в направлении нормали N протекает количество электричества, равное

$$-k d\omega \partial u/\partial N,$$

где k — электропроводность рассматриваемого тела.

Проведем через цилиндр плоскость, пересекающую его ось под косым углом, и обозначим через $d\omega'$ часть этой плоскости, лежащую внутри цилиндра. За единицу времени через элемент $d\omega'$ в направлении нормали N протекает количество электричества, задаваемое приведенным выше выражением. Проведем мысленно из произвольной точки элемента $d\omega'$ нормаль, обозначим длину ее отрезка через N', а угол, образуемой ею с нормалью N, — через $(N,\ N')$. Тогда

$$d\omega = \eta \cos(N,\ N')\, d\omega',$$

где коэффициент η равен $+1$ или -1 в зависимости от того, острый или тупой угол $(N,\ N')$. Так как N — нормаль к поверхности равного напряжения, то

$$\cos(N,\ N')\, \partial u/\partial N = \partial u/\partial N'$$

и выражение для количества электричества, протекающего через $d\omega'$, имеет вид

$$-\eta k d\omega' \partial u/\partial N'.$$

Это количество электричества протекает через $d\omega'$ в ту сторону, в какую направлена нормаль N', если угол $(N,\ N')$ острый, и тогда $\eta=+1$. Оно протекает в противоположную сторону, если угол $(N,\ N')$ тупой, и тогда $\eta=-1$. Поскольку утверждение о том, что количество электричества E протекает через $d\omega'$ в одном направлении, эквивалентно утверждению о том, что количество электричества $-E$ протекает через $d\omega'$ в противоположном направлении, то мы вправе утверждать, что через $d\omega'$ в ту сторону, куда направлена нормаль N', за единицу времени протекает количество электричества, равное

$$-k d\omega' \partial u/\partial N.$$

Это утверждение, очевидно, справедливо для любого элемента поверхности, который только можно выбрать в теле, так как для любого элемента можно построить цилиндр, аналогичный рассмотренному нами.

Отсюда нетрудно вывести уравнения, позволяющие однозначно определить стационарные токи в нашей системе.

Вырежем мысленно из тела некоторый объем. Общее количество электричества, втекающее за произвольное время сквозь граничную поверхность внутрь объема, должно быть равно нулю. Следовательно, если обозначить через $d\omega$ элемент граничной поверхности, через N — направленную внутрь нормаль к $d\omega$, то интеграл

$$-k\int d\omega\partial u/\partial N,$$

взятый по граничной поверхности, должен обратиться в нуль.

Если положение точки в теле задать прямоугольными координатами x, y, z и рассмотреть u как функцию трех координат, то интеграл

$$\int d\omega\partial u/\partial N,$$

взятый по поверхности ограниченного объема, как известно, равен интегралу

$$-\int\int\int dxdydz\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

взятому по этому объему. Таким образом, этот трехкратный интеграл, взятый по любой части нашего тела, должен быть равен нулю. Ясно, что так может быть лишь в том случае, если в каждой точке тела

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь элемент поверхности нашего тела. Часть этой поверхности свободна, т. е. соприкасается только с воздухом, а все прочие части образуют поверхность контакта данного тела с другими телами, входящими в систему. Если $d\omega$ — элемент свободной части поверхности, то (в предположении, что воздух не несет в себе электричество) через него не может течь электричество, т. е. для этого элемента

$$\partial u/\partial N=0. \quad (2)$$

Если $d\omega$ принадлежит поверхности контакта двух тел системы, то через нее в одно тело должно втекать столько же электричества, сколько вытекает из другого. Следовательно, если u и u_1 — напряжения в двух соприкасающихся телах, k и k_1 — их электропроводности, N — нормаль к $d\omega$, направленная внутрь одного тела, а N_1 — нормаль к $d\omega$, направленная внутрь другого тела, то

$$k\partial u/\partial N+k_1\partial u_1/\partial N_1=0. \quad (3)$$

Наконец, по Ому, для того же элемента должно выполняться и соотношение

$$u-u_1=U, \quad (4)$$

где U — постоянная разность напряжений соприкасающихся тел.

Применив уравнение (1) и равенство (2) ко всем телам, входящим в рассматриваемую систему, а соотношения (3) и (4) ко всем контактным поверхностям этих тел, мы получим все вытекающие из законов Ома условия для определения токов. Покажем теперь, что токи полностью определяются этими условиями.

Предположим, что заданным условиям удовлетворяют два различных распределения электричества. Обозначим напряжение в каком-нибудь теле системы при одном распределении через u, а при другом через u'. Докажем, что $u-u'$ для всех точек одного тела и для всех тел имеет одно и то же значение. Отсюда будет следовать, что токи, возникающие в обоих случаях, должны быть одинаковыми, т. е. что существует *лишь одно* распределение токов, удовлетворяющее приведенным выше соотношениям.

Наше доказательство основано на соображениях, аналогичных тем, с помощью которых Гаусс в работе «Исследования о силах притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» [3] доказал, что значение потенциала масс, лежащих вне любой замкнутой поверхности, однозначно определено для любой точки внутри поверхности, если потенциал задан во всех точках самой поверхности. Пусть $u-u'=v$.

Рассмотрим выражение

$$\sum k \int\int\int dxdydz \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\}, \qquad (5)$$

в котором интегрирование проводится по всему пространству, занятому телом, а сумма берется по всем телам. Можно показать, что в силу условий, которым удовлетворяют u и u', выражение (5) равно нулю, а так как оно представляет собой сумму неотрицательных членов, то произойти это может лишь в том случае, если каждый член в отдельности равен нулю, т. е. внутри каждого тела величины

$$\partial v/\partial x, \quad \partial v/\partial y, \quad \partial v/\partial z$$

должны быть равны нулю. Следовательно, разность v внутри каждого тела должна быть постоянной. Отсюда с учетом соотношений, следующих из (4), мы заключаем, что v постоянна и во всей системе.

В том, что выражение (5) должно быть равно нулю, можно убедиться следующим образом. Величины u и u' удовлетворяют внутри рассматриваемого тела уравнению с частными производными (1). Следовательно, v также удовлетворяет уравнению (1). Отсюда, как показал Гаусс в упомянутой нами работе, следует, что трехкратный интеграл, умноженный в (5) на k, равен

$$-\int d\omega \cdot v\partial v/\partial N,$$

где $d\omega$ — элемент поверхности рассматриваемого тела; N — направленная внутрь нормаль к $d\omega$; значение v выбрано в точке, принадлежащей $d\omega$, а интегрирование распространяется по всей поверхности. Для свободной части поверхности производная $\partial v/\partial N$ равна нулю, так как там равны $\partial u/\partial N$ и $\partial u/\partial N'$, поэтому интегрирование достаточно провести лишь по тем частям поверхности, по которым тела примыкают друг к другу. Следовательно, выражение (5)

переходит в сумму интегралов по контактным поверхностям, входящим в систему. Пусть k, v, N и k_1, v_1, N_1 — величины, относящиеся к контактным поверхностям двух тел. Запишем интеграл

$$\int d\omega\,(kv\partial v/\partial N + k_1 v_1 \partial v_1/\partial N_1)$$

и просуммируем по всем контактным поверхностям. Из соотношения (4), которому должны удовлетворять u и u', следует, что $v=v_1$, а из условия (3) — что

$$k\partial v/\partial N + k_1 \partial v_1/\partial N_1 = 0.$$

Таким образом, коэффициент при $d\omega$ под знаком интеграла, а значит, и весь интеграл равны нулю, так же как и все аналогичные интегралы по всем остальным контактным поверхностям и, следовательно, выражение (5).

Из уравнений, однозначно определяющих по доказанному токи в любой системе проводников, мы хотим теперь вывести утверждение, из которого будет следовать, что формулы, полученные для систем линейных проводников, применимы и в более общем случае.

Пусть имеется система проводников, состоящая из двух частей, соединенных двумя проволоками. Проведем мысленно в каждой из проволок поперечное сечение и обозначим части, на которые разбивают систему эти сечения, через A и B. Пусть часть A состоит из простого ряда различных тел, т. е. первое и последнее из тел, образующих A (тела, которым принадлежат оба проведенных нами поперечных сечения), соприкасается лишь с одним телом, а каждое из остальных — лишь с двумя другими телами. Тогда, не изменяя тока в любой точке части B, часть A можно заменить линейным проводником, в котором заключена электродвижущая сила, равная сумме разностей напряжений в A. Сопротивление этого проводника зависит лишь от формы и электропроводности тел, образующих часть A.

Пусть a и b — проведенные нами поперечные сечения, u_a и u_b — напряжения в них, J — количества электричества, протекающие за единицу времени через b из B в A и через a из A в B (они, очевидно, равны) и, наконец, K — сумма всех разностей напряжений в A (величина K, как станет ясно из приводимых ниже вычислений, положительна). Тогда, как нетрудно убедиться, величина

$$(u_b - u_a + K)/J \tag{6}$$

зависит лишь от формы и электропроводности тел, образующих часть A, и, следовательно, не зависит от разностей напряжений в A и от природы и формы тел, составляющих часть B.

Тела, образующие часть A, обозначим 1, 2, . . ., n, так что 1 — тело, начинающееся с поперечного сечения a, а n — тело, заканчивающееся поперечным сечением b.

Пусть u_1, u_2, . . ., u_n — напряжения в этих телах. Величины u_1, u_2, ..., u_n удовлетворяют условиям, которые мы получим, применив уравнение (1) и равенство (2) к телам 1, 2, . . ., n и соотношения (3) и (4) к контактным поверхностям (1, 2), (3, 4), . . ., (n—1, n). Эти условия не позволяют полностью

определить величины u, но, как нетрудно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, если дополнить их условиями

$$\text{в поперечном сечении } a \quad u_1 = u_a,$$
$$\text{в поперечном сечении } b \quad u_n = u_b,$$

то величины u будут определены однозначно.

Предположим теперь, что разности напряжений в A и тела, образующие часть B, изменились. Тогда напряжения в A будут другими, но величины (6), как мы хотим доказать, останутся прежними. Обозначим новые напряжения в A через u'_1, u'_2, . . ., u'_n, а в поперечных сечениях a и b — через u'_a и u'_b. Условия для величин u' мы получим из условий, выполняющихся для величин u, заменив в них u на u' и старые значения разностей напряжений новыми. Пусть величины u известны. Тогда можно доказать, что соотношения для u' выполняются, если предположить, что

$$u'_1 = \alpha u_1 + \beta_1,$$
$$u'_2 = \alpha u_2 + \beta_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$u'_n = \alpha u_n + \beta_n,$$

где α, β_1, β_2, . . . — постоянные, значения которых должны быть выбраны надлежащим образом. Если принять эти предположения, то уравнения, выведенные из (1), (2) и (3), выполняются при любых значениях введенных постоянных. Пусть U_{12}, U_{23}, . . . — старые, а U'_{12}, U'_{23}, . . . — новые значения разностей напряжений. Тогда из (4) мы получаем следующие условия:

		Для величины u	Для величины u'
В сечении	(1, 2)	$u_1 - u_2 = U_{12}$,	$u_1' - u_2' = U_{12}'$,
	(2, 3)	$u_2 - u_3 = U_{23}$,	$u_2' - u_3' = U_{23}'$,
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
	$(n-1,\ n)$	$u_{n-1} - u_n = U_{n-1,n}$	$u'_{n-1} - u'_n = U'_{n-1,\ n}$.

Наконец,

в сечении a	$u_1 = u_a$,	$u_1' = u_a'$,
в сечении b	$u_n = u_b$,	$u_n' = u_b'$.

Подставляя в эти равенства вместо u' выписанные выше выражения и используя равенства для величин u, получаем следующие уравнения для α, β_1, β_2, . . .:

$$\beta_1 - \beta_2 = U'_{12} - \alpha U_{12},$$
$$\beta_2 - \beta_3 = U'_{23} - \alpha U_{23},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_{n-1} - \beta_n = U'_{n-1,\ n} - \alpha U_{n-1,\ n}.$$
$$\beta_1 = u'_a - \alpha u_a,$$
$$\beta_n = u'_b - \alpha u_b.$$

Всем этим уравнениям можно удовлетворить при подходящем выборе величин α, β_1, β_2, ... Таким образом, приняв предположения относительно функций u', мы получим возможность определить напряжения, удовлетворяющие всем условиям, а так как напряжения однозначно определены, то получаемые значения совпадают с единственно возможными.

По функции u' видно, что, как бы ни изменялись разности напряжений в A и часть B, кривые токов в A сохраняются и силы токов во всех точках возрастают в одном и том же отношении. В нашем случае токи возрастают в α раз, поэтому если обозначить силу тока при первом распределении напряжений через J, а силу тока при втором распределении напряжений — через J', то

$$J'/J = \alpha.$$

Вычислим теперь α из уравнений, полученных для α, β_1, β_2, ... Умножив предпоследнее уравнение на -1 и сложив все уравнения, получим

$$\alpha = \frac{U'_{12} + U'_{23} + \ldots + U'_{n-1,\,n} + u'_b - u'_a}{U_{12} + U_{23} + \ldots + U_{n-1,\,n} + u_b - u_a}.$$

Но

$$U_{12} + U_{23} + \ldots + U_{n-1,\,n} = K,$$

поэтому, полагая по аналогии

$$U'_{12} + U'_{23} + \ldots + U'_{n-1,\,n} = K',$$

приходим к соотношению

$$\alpha = \frac{K' - u'_b - u'_a}{K + u_b - u_a}.$$

Следовательно,

$$\frac{K' + u'_b - u'_a}{J'} = \frac{K + u_b - u_a}{J}.$$

Итак, величины (6) сохраняют свои значения, если B и разности напряжений в A изменяются. Следовательно, величины (6) могут зависеть лишь от формы и электропроводности тел, образующих A. Если часть A — линейный проводник, то A — сопротивление. Сохраним за A это название и в рассматриваемом нами более общем случае и обозначим ее сопротивление через R. Нетрудно видеть, что сопротивление R должно быть положительно. Действительно, предположим, что все разности напряжений в A равны нулю. Тогда ясно, что $u_b - u_a$ и J должны быть одновременно положительными или отрицательными. Это замечание понадобится нам и в дальнейшем.

Покажем теперь, что токи в B полностью определе́ны, если относительно A известны только K и R. Отсюда будет следовать, что, не изменяя токи в B, мы можем заменить A другим проводником, удовлетворяющим принятым относительно A предположениям, если в этом проводнике заключена электродвижущая сила K, а его сопротивление равно R. Следовательно, часть A допускает замену линейным проводником, удовлетворяющим этим условиям.

Если K и R заданы, то к условиям, которые получаются для определения напряжений в B из соотношений (1), (2), (3), (4), примененных ко всем телам и контактным поверхностям в B, присоединяется условие

$$u_b - u_a = J \cdot R - K. \tag{7}$$

Предположим, что все эти условия выполняются при двух распределениях электричества, и обозначим через u напряжение при одном распределении и через u' — при другом распределении. Тогда снова можно показать, что разность $u - u'$ должна быть постоянной во всей системе, из чего следует однозначная определенность токов. Если мы рассмотрим выражение (5), в котором суммирование производится по всем телам, входящим в B, то можно доказать, что оно и в этом случае равно нулю. С помощью преобразования, аналогичного примененному нами выше, выражение (5) приводится к сумме интегралов по контактным поверхностям в B и двум интегралам по поперечным сечениям a и b. Первые интегралы, как и выше, равны нулю, и вся сумма сводится к

$$(J - J')\,[u_a - u'_a - (u_b - u'_b)],$$

или с учетом условия (7)

$$-(J - J')^2 R.$$

Из первоначального вида выражения (5) следует, что оно не может быть отрицательным, а из преобразованного — что оно не может быть положительным. Следовательно, оно должно быть равно нулю.

Итак, мы доказали утверждение, приведенное на с. 182. Из него, как нетрудно видеть, следует, что формулы, выведенные для системы линейных проводников, справедливы для случаев, наиболее часто встречающихся в экспериментах [[4]].

Я позволю себе присовокупить несколько замечаний, тесно связанных с приведенными выше рассуждениями.

Соотношения (1), (2), (3), (4), позволяющие определять напряжения в произвольной системе проводников, можно свести к одному условию минимальности значений, принимаемых некоторыми зависящими от напряжений величинами, при заданных разностях напряжений тел. Предположив, что для теплового действия гальванического тока в элементе проводника выполняется закон Джоуля [[5]], мы получим выражение полного количества тепла, создаваемого за определенное время токами в системе. С доказательства этого замечания я и хочу начать.

По закону Джоуля, количество тепла, выделяющегося при прохождении тока в элементе проволоки за определенное время, равно произведению сопротивления элемента на квадрат силы тока. Чтобы вычислить по закону Джоуля количество тепла, выделяющегося в теле произвольной формы, рассмотрим в теле элемент цилиндрической формы с осью, совпадающей с направлением тока в выбранной точке. Количество тепла, выделяющегося в таком элементе, также равно произведению сопротивления элемента на квадрат силы тока.

Если ds — длина элемента, $d\omega$ — его поперечное сечение, то его сопротивление равно $ds/kd\omega$, а сила тока равна $-kd\omega\, \partial u/\partial s$. Следовательно, в рассматриваемом элементе выделяется количество тепла, равное

$$kd\omega ds\,(\partial u/\partial s)^2.$$

Если учесть, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

и что $d\omega\, ds$ — объем рассматриваемого элемента, то для всего тела количество выделившегося тепла определяется выражением

$$k\int\int\int dxdydz\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right),$$

где интегрирование производится по всему пространству, занятому телом. Просуммировав по всем телам системы, мы получим полное количество тепла

$$W=\sum k\int\int\int dxdydz\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right). \tag{8}$$

Найдем теперь условия обращения W в минимум при сохранении разности напряжений контактирующих тел. Это условие мы получим из уравнения

$$\delta W=0,$$

т. е. если, увеличив u на бесконечно малые функции ε, вычтем из соответствующего значения W прежнее значение и, удержав бесконечно малые величины первого порядка, обратим результат в нуль. Величины ε при этом совершенно произвольны с точностью до условия: если ε и ε_1 относятся к соприкасающимся телам, то для каждой точки контактной поверхности должно выполняться соотношение $\varepsilon-\varepsilon_1=0$. Итак, мы получаем

$$\delta W=2\sum k\int\int\int dxdydz\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right),$$

или с помощью известного преобразования

$$\delta W=-2\sum k\left\{\int \varepsilon d\omega\frac{\partial u}{\partial N}+\int\int\int \varepsilon dxdydz\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{dy^2}+\frac{\partial^2 u}{dz^2}\right)\right\}.$$

Нетрудно видеть, что $d\omega$ в однократном интеграле означает элемент поверхности рассматриваемого тела, N — нормаль к этому элементу, направленную внутрь тела, ε — относится к точке, в которой выбран элемент $d\omega$, а интегрирование производится по всей поверхности тела.

Так как внутри каждого тела функция ε совершенно произвольна, то уравнение $\delta W=0$ может выполняться лишь в том случае, если внутри каждого тела

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

В каждой точке свободной поверхности тела функция ε также совершенно произвольна, поэтому в каждой точке такой поверхности должно выполняться равенство

$$\partial u/\partial N=0.$$

Следовательно, δW превращается в сумму интегралов по отдельным контактным поверхностям системы. С учетом условия, наложенного на ε, получаем

$$\delta W=\sum\int \varepsilon d\omega\left(k\frac{\partial u}{\partial N}+k_1\frac{\partial u_1}{\partial N_1}\right),$$

где $d\omega$ — элемент контактной поверхности; k, u, N и k_1, u_1, N_1 относятся к двум телам, образующим контактную поверхность; функция ε произвольна; интегрирование проводится по всей контактной поверхности, а суммирование — по всем контактным поверхностям системы. Из уравнения $\delta W=0$ следует, что для каждой точки контактной поверхности двух тел

$$k\frac{\partial u}{\partial N}+k_1\frac{\partial u_1}{\partial N_1}=0.$$

Если к полученным условиям присоединить установленное нами раньше условие, выражаемое соотношением

$$u-u_1=U,$$

то мы получим те же значения всех токов, которые следуют непосредственно из законов Ома.

Осталось доказать, что при обращении δW в нуль величина W достигает минимума. Это действительно так, поскольку вторая вариация $\delta^2 W$ всегда положительна:

$$\delta^2 W\sum k\int\int\int dxdydz\left(\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right)^2\right).$$

Выражение, полученное для W, обладает заметным сходством с выражением (5), к которому нам уже приходилось обращаться, что позволяет и на этот раз воспользоваться тем преобразованием, которое мы применили к выражению (5). Оно позволяет свести W к сумме интегралов по контактным поверхностям, входящим в систему

$$W=-\sum\int d\omega\left(uk\frac{\partial u}{\partial N}+u_1k_1\frac{\partial u_1}{\partial N_1}\right).$$

Но теперь

$$k\frac{\partial u}{\partial N}+k_1\frac{\partial u_1}{\partial N_1}=0$$

и

$$u-u_1=U$$

поэтому

$$W=-\sum U\int d\omega k\frac{\partial u}{\partial N},$$

или, если обозначить через i количество электричества, вытекающего за единицу времени через рассматриваемую контактную поверхность из тела, характеризуемого величиной u_1, и втекающего в тело, характеризуемое величиной u, то

$$W = \sum U \cdot i.$$

Таким образом, полное количество тепла, выделяющегося в системе, равно сумме произведений разностей напряжений и количеств электричества, протекающих за единицу времени через соответствующие контактные поверхности в заданном направлении.

Количество тепла, выделяющегося в любой части системы, мы получим, производя интегрирование в выражении (8) по этой части. Преобразование, которым мы воспользовались выше, применимо и в этом случае, и мы получаем для количества тепла, выделяющегося в части системы, выражение, которое состоит из следующих частей: во-первых, суммы количеств электричества, протекающих за единицу времени через контактные поверхности, если те принадлежат рассматриваемой части системы (каждое количество электричества умножено на соответствующую разность напряжений и считается положительным или отрицательным в том смысле, как указано выше) и, во-вторых, суммы количеств электричества, протекающих за единицу времени через элементы поверхности, отделяющей выделенную нами часть системы от остальных частей, внутрь выделенной части (каждое количество электричества умножено на напряжение соответствующего элемента).

Разделим теперь нашу систему на две части так, как это было сделано выше, и вычислим количество тепла, выделяющееся в части A. Мы снова получим уже знакомые соотношения. Ясно, что все количества электричества, проходящие за единицу времени через отдельные контактные поверхности, равны (обозначим каждое из них через J). Следовательно, количество тепла, выделяющееся в A, равно

$$KJ + u_б J - u_a J = (u_б - u_a + K) J = J^2 R.$$

Итак, закон Джоуля, первоначально сформулированный для линейного проводника, по теории Ома доказан и для проводников такого типа, как A.

В заключение заметим, что из доказанного нами общего утверждения (количество тепла, выделяющегося в произвольной системе проводников, минимально при заданных разностях напряжений соприкасающихся тел), если его применить к системе линейных проводников, приводит к выведенным мной ранее уравнениям для сил протекающих токов.

Если система состоит из n проводов с сопротивлениями $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и силами токов $J_1, J_2, \ldots, J_n$, то полное количество тепла определяется выражением

$$W = \omega_1 J_1^2 + \omega_2 J_2^2 + \ldots + \omega_n J_n^2.$$

Если потребовать, чтобы разности напряжений в точках соприкосновения тел были равны заданным, то получатся доказанные мной ранее соотношения, согласно которым всякий раз, когда провода 1, 2, ..., r образуют замкнутый контур, величина

$$\omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 + \ldots + \omega_r J_r$$

равна сумме всех разностей напряжения вдоль пути 1, 2, . . ., r. Если потребовать, чтобы это соотношение выполнялось и величина W была минимальной, то без особого труда мы получим остальные соотношения, выведенные мной в упомянутой работе, а именно соотношения, означающие, что провода 1, 2, . . ., p сходятся в одной точке:

$$J_1 + J_2 + \dots + J_p = 0.$$

18.

О ВЫВОДЕ ЗАКОНА ОМА, СОГЛАСУЮЩЕМСЯ С ТЕОРИЕЙ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ *

При выводе своего закона для токов в гальванической цепи Ом исходил из допущений относительно электричества, не согласующихся с предположениями, которые необходимо принять для объяснения электростатических явлений. Вопреки этим предположениям Ом исходит из гипотезы о том, что электричество находится в проводнике в состоянии покоя, если оно заполняет объем проводника с равномерной плотностью. Вывод законов, которым подчиняются электрические токи, из соображений, согласующихся с теорией электростатики, сам по себе желателен, но он становится совершенно необходимым, если мы хотим создать удовлетворительную теорию опытов, в которых приходится иметь дело с электричеством, как текущим, так и находящимся в состоянии покоя.

Такого рода опыты Кольрауш [1] недавно произвел над замкнутой цепью, содержащей конденсатор и электрометр [1]. В этой работе я намереваюсь показать, каким образом формулы Ома можно вывести из электростатического закона для взаимного отталкивания частиц электричества, если воспользоваться некоторыми предположениями относительно вопросов, заведомо не выходящих за рамки теории электростатики.

Если проводнику передано электричество, то оно находится в равновесии лишь в том случае, когда силы, с которыми свободное электричество действует на частицу электричества, находящуюся в любой точке внутри проводника, направлены в противоположные стороны. Так происходит, если потенциал своего свободного электричества постоянен относительно всех точек внутри проводника. Как показывают вычисления, это возможно лишь в том случае, если свободное электричество особым образом распределено по поверхности проводника.

Если привести в соприкосновение два различных проводника, например кусок меди и кусок цинка, каждый из которых в отдельности не обладает свободным электричеством, то один проводник станет электроотрицательным, а другой — электроположительным.

Электричество, возникающее в месте контакта, тотчас же переходит в состояние равновесия, в котором потенциал свободного электричества относительно

* Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 49—55. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] *Kirchhoff G.* // Ann. Phys. 1849. Bd. 78. S. 506—513.

всех точек каждого из двух проводников должен быть постоянным. Отсюда следует, что свободное электричество должно находиться не внутри проводников, а располагаться на их поверхности. Одна часть электричества связана с контактными поверхностями проводников, а другая часть покрывает их свободные поверхности. Потенциал всего свободного электричества относительно всех точек каждого проводника постоянен, но значение потенциала для одного проводника отлично от его значения в другом. Действительно, как показывают вычисления, если бы значения потенциалов для обоих проводников совпадали, то никакого свободного электричества не было бы, так как все свободное электричество в сумме было бы равно нулю.

Что же касается разности значений потенциала в двух проводниках, то она может зависеть от веществ, из которых изготовлены проводники, и от формы проводников. Я буду исходить из предположения, что разность значений потенциала не зависит от формы проводников, и назову величину разности напряжением между двумя телами. Обозначим потенциал всего свободного электричества относительно любой точки первого проводника через u_1, а относительно любой точки второго проводника — через u_2. И u_1, и u_2 должны быть постоянными. Пусть U_{12} — напряжение между двумя телами. Тогда

$$u_1 - u_2 = U_{12}.$$

Рассмотрим несколько проводников (например, три проводника), расположенных так, что проводник 1 соприкасается с проводником 2, а проводник 2 — с проводником 3, вследствие чего электричество на этих проводниках всегда находится в состоянии равновесия. Обозначим снова потенциал всего свободного электричества относительно любой точки первого проводника через u_1, относительно любой точки второго проводника — через u_2, относительно любой точки третьего проводника — через u_3, напряжение между первым и вторым проводником — через U_{12} и напряжение между вторым и третьим проводниками — через U_{23}. Тогда для равновесия требуется чтобы каждая из трех величин u_1, u_2, u_3 была постоянной и выполнялись равенства

$$u_1 - u_2 = U_{12},$$
$$u_2 - u_3 = U_{23}.$$

Но предположим теперь, что проводники 1, 2, 3 расположены иначе и каждый из них соприкасается с двумя другими, вследствие чего равновесие электричества на них возможно не всегда. Если равновесие имеет место, то каждая из величин u_1, u_2, u_3 снова должна быть постоянной и должны выполняться равенства

$$u_1 - u_2 = U_{12},$$
$$u_2 - u_3 = U_{23},$$
$$u_3 - u_1 = U_{31}.$$

Суммируя правые и левые части этих равенств, получаем

$$0 = U_{12} + U_{23} + U_{31}.$$

Таким образом, напряжения трех проводников должны удовлетворять этому условию, чтобы электричество на них могло находиться в состоянии равновесия. Условие выполняется, если три проводника принадлежат так называемому ряду напряжений [2].

Выясним теперь, что произойдет, если это условие не выполнено. В любой момент времени свободное электричество каким-то образом распределено в системе. Я оставляю в стороне вопрос о том, находится ли свободное электричество и в этом случае лишь на поверхности проводника или проникает внутрь его. Потенциал свободного электричества относительно точки одного из проводников обозначим через u. Потенциал u не постоянен, а является функцией координат точки, относительно которой он выбран, поэтому силы, действующие со стороны свободного электричества на частицу электричества, находящуюся в любом месте внутри проводника, находятся не в равновесии, а имеют отличную от нуля результирующую.

Рассмотрим внутри проводника элемент объема v и обозначим через R результирующую в v. Если в объеме v нет свободного электричества, то нейтральная электрическая жидкость разлагается: положительное электричество перемещается в направлении R, а отрицательное — в противоположном направлении. При этом количества положительного и отрицательного электричества, движущиеся в элементе v, и их скорости должны быть равны. Предположим, что количество той и другой электрической жидкости, проходящей за единицу времени через поперечное сечение dw объема v, перпендикулярное направлению R, равно

$$dwkR,$$

где k — электропроводность тела.

Решить, что происходит в том случае, когда объем v содержит свободное электричество, нам поможет следующее предположение: движение электрической жидкости в проводнике происходит только так, что через любой элемент поверхности в проводнике за одно и то же время в противоположные стороны проходят равные количества положительного и отрицательного электричества. Отсюда следует, что если объем v содержит свободное электричество, то через dw за единицу времени положительного электричества в направлении R проходит столько же, сколько отрицательного электричества проходит в противоположном направлении. Что же касается количества электричества, протекающего через dw, то его мы будем по-прежнему считать равным

$$dwkR.$$

Дополним эти предположения, большей частью высказанными Вебером при разработке системы электродинамических единиц [3], еще одним предположением. Будем считать, что разность значений потенциала всего свободного электричества в двух точках, расположенных на малом расстоянии друг от друга по разные стороны от контактной поверхности двух проводников, остается неизменной независимо от того, течет ли по проводнику ток или электричество находится в состоянии покоя.

Если принять, что электрическое состояние системы стационарно, то для потенциала свободного электричества мы получим те же соотношения, которые

возникают из выражения, полученного Омом для электроскопической силы, т. е. для плотности электричества.

Действительно, если N — нормаль к элементу dw, имеющая то же направление, что и R, то

$$R = -\partial u / \partial N.$$

Следовательно, количество положительного или отрицательного электричества, протекающего через dw за единицу времени, равно

$$-k dw \partial u / \partial N.$$

То же самое выражение для количества электричества получается из представления Ома, если через u обозначить электроскопическую силу [2]. Из этого выражения, не вдаваясь в интерпретацию u, можно заключить, что если состояние системы стало стационарным, то u должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

для каждой точки свободной поверхности проводника должно выполняться граничное условие

$$\partial u / \partial N = 0,$$

а для каждой точки контактной поверхности двух тел — условие

$$k \frac{\partial u}{\partial N} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial N_1} = 0.$$

К этим условиям, как в представлении Ома, так и в нашем представлении, необходимо добавить еще одно условие: для каждой точки контактной поверхности разность $u - u_1$ равна напряжению двух тел. Таким образом, оба представления приводят к одним и тем же соотношениям для величин u. Следовательно, относительно токов, задаваемых частными производными от величин u, мы получаем одни и те же результаты независимо от выбора исходного представления. Однако относительно распределения свободного электричества в цепи результаты оказываются различными. По Ому, плотность электричества задается непосредственно значением u в любой точке системы. В развитом нами подходе это не так. Из наших представлений следует, что и в случае замкнутой цепи свободное электричество может находиться только на поверхности проводника [[4]]. Так как внутри проводника u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

то u — потенциал масс, лежащих вне этого проводника. Но u — потенциал всего свободного электричества. Никакая часть свободного электричества не может лежать поэтому внутри данного проводника и, следовательно, вообще внутри любого из проводников.

[2] См. с. 179. Мы называем напряжением то, что Ом называет электроскопической силой.

Изложенные нами соображения остаются в силе независимо от числа, формы и порядка следования проводников, находящихся в контакте. Выполняются они и в том случае, если одна пластина конденсатора соединена с какой-нибудь точкой замкнутой цепи, и поэтому позволяют построить теорию опытов такого рода, как упоминавшиеся выше опыты Кольрауша. Полученные результаты находятся в полном согласии с данными этих опытов.

В основе развитых нами соображений лежит электростатический закон взаимодействия электрических частиц. Этот закон не позволяет объяснить электродинамические явления, открытые Ампером, и явления индукции. Вебер нашел более общий закон [5], что позволило объяснить и эти явления, в который входит относительная скорость взаимодействующих частиц. При обращении относительной скорости в нуль закон Вебера переходит в электростатический закон. Чтобы рассмотреть с единой точки зрения различные области учения об электричестве, необходимо поэтому вывести законы для токов в замкнутой цепи из закона Вебера. Вывод этот, насколько можно судить, должен быть трудным, но апостериори легко доказать, что представление о токе, к которому приводит предположение о выполнимости электростатического закона, находится в полном соответствии с законом Вебера, если принять еще одну гипотезу.

Согласно этой гипотезе, при вычислении силы, которая приводит к разделению положительного и отрицательного электричества в элементе объема v проводника [6], электричество в v надлежит считать покоящимся. В таком предположении нет ничего противоречащего ранее принятым допущениям, если представить, что движение электричества в проводнике происходит лишь от молекулы к молекуле, а каждая частица электричества, достигнув очередной молекулы, переходит в состояние покоя [7].

При таком представлении легко согласиться с тем, что количество электричества, передаваемого от молекулы к соседней молекуле, зависит только от сил, действующих на частицы электричества, когда они покоятся на молекуле, а не от сил, которые действуют на частицы, когда те движутся от одной молекулы к другой. Что касается предложенной Вебером теории индукции, то для нее безразлично, примем ли мы это предположение или не примем. Если принять это предположение, а в остальном рассматривать токи в цепи так, как того требуют допущения, принятые при выводе электростатического закона, то величина и направление силы, стремящейся разделить положительное и отрицательное электричество в элементе v (следовательно, величина и направление электродвижущей силы, как называет ее Вебер), не зависят от того, будем ли мы исходить из электростатического закона или из закона Вебера.

Различия, если бы таковые существовали, должны быть связаны с силами, создаваемыми положительным и отрицательным электричеством, текущим в других частях системы, а эти силы, как показал Вебер, не дают вклада в электродвижущую силу, так как токи постоянны и одинаковые количества положительного и отрицательного электричества движутся в противоположных направлениях с одинаковой скоростью.

19.

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ПРОВОДАХ *

Я предпринял попытку построить общую теорию движения электричества в бесконечно тонких проводах, предположив, что некоторые закономерности, установленные для постоянных и медленно изменяющихся электрических токов, остаются в силе и в общем случае. Я позволю себе изложить здесь эту теорию и ее применение к некоторым простым случаям.

Представим себе однородный провод круглого сечения, имеющий всюду одинаковую толщину. На средней линии этого провода выберем одну неподвижную и одну переменную точку. Отрезок средней линии между выбранными точками обозначим через s. Через переменную точку проведем поперечное сечение. Пусть ρ и ψ — полярные координаты точки сечения относительно системы координат, начало которой совмещено с центром сечения. Назовем электродвижущей силу, которая стремится разделить положительное и отрицательное электричество вдоль провода в окрестности точки (s, ρ, ψ). Эта сила обусловлена отчасти имеющимся в проводе свободным электричеством, отчасти индукцией, вызванной изменениями силы тока во всех частях провода. Что касается первой составляющей электродвижущей силы, то к ней применим электростатический закон Кулона. Пусть V — потенциал свободного электричества относительно рассматриваемой точки, т. е. сумма отдельных количеств свободного электричества, каждое из которых разделено на расстояние, отделяющее его от этой точки. Количества электричества измеряются в механической мере, т. е. единицей считается такое количество электричества, которое действует на равное количество электричества, находящееся от него на единичном расстоянии, с единичной силой. Вообще, все встречающиеся далее величины (силы токов, сопротивления и т. д.) считаются измеренными в механической мере так, как неоднократно указывал в своих электродинамических единицах измерения Вебер. Тогда $-\partial V/\partial s$ — сила, с которой свободное электричество стремится сдвинуть находящееся в рассматриваемой точке положительное электричество в направлении возрастания s. Такая же по величине сила действует в противоположном направлении на отрицательное электричество. Таким образом, $-2\partial V/\partial s$ — электродвижущая сила, связанная с единичным количеством электричества, которая действует в рассматриваемой точке и обусловлена свободным электричеством.

При вычислении значений V будем предполагать, что на провод не действует никакое другое свободное электричество, кроме того, которое находится в нем самом. Количество свободного электричества, которое в момент времени t находится в элементе провода, соответствующего элементу ds средней линии, обозначим через $e ds$. Пусть ds' — другой элемент средней линии, а $e' ds'$ — количество электричества в соответствующем ему элементе провода. Рассмотрим кусок провода длиной 2ε с центром в ds, где ε — величина, бесконечно малая по сравнению с длиной всего провода, но в то же время бесконечно большая по сравнению с радиусом поперечного сечения. Если элемент провода, в кото-

* Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 131—154. Перевод Ю. А. Данилова.

ром находится количество электричества, равное $e'ds'$, лежит вне выбранного нами куска, то при вычислении V все электричество можно считать сосредоточенным на отрезке ds', а точку, относительно которой мы определяем V, считать лежащей на отрезке ds. Следовательно, та часть потенциала V, которая обусловлена электричеством, распределенным по всему проводу, за исключением рассматриваемого отрезка, равна

$$\int \frac{e'ds'}{r},$$

где r расстояние между элементами ds и ds', а интегрирование проводится по всей средней линии за исключением отрезка длиной 2ε. Что же касается части потенциала V, связанной с выделенным отрезком, то ее удастся вычислить лишь в том случае, если известно распределение свободного электричества внутри поперечного сечения.

Предположим, что, как при постоянном токе или при электрическом равновесии, свободное электричество находится только на поверхности и, кроме того, плотность его одинакова во всех точках границы поперечного сечения. Если α — радиус поперечного сечения, то плотность свободного электричества в любой точке поверхности рассматриваемого куска провода равна $e/2\pi\alpha$. Так как длина этого куска бесконечно мала, то его можно считать прямолинейным, и создаваемая им часть потенциала V составляет

$$\frac{e}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int_{0}^{2\pi}\frac{dx'd\psi'}{\sqrt{x'^2+\alpha^2+\rho^2-2\alpha\rho\cos(\psi'-\psi)}}.$$

Здесь через x' для краткости обозначена разность $s'-s$, а ψ' означает угол между радиусом, проведенным к элементу поверхности провода и прямой, от которой отсчитывается угол ψ. Если выполнить интегрирование по x' и воспользоваться тем, что ε — бесконечно большая величина по сравнению с α и ρ, то мы придем к выражению

$$\frac{e}{\pi}\int_0^{2\pi} d\psi'\left(\ln 2\varepsilon - \ln\sqrt{\alpha^2+\rho^2-2\alpha\rho\cos(\psi'-\psi)}\right) =$$

$$= 2e\left(\ln 2\varepsilon - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi' \ln\sqrt{\alpha^2+\rho^2-2\alpha\rho\cos(\psi'-\psi)}\right).$$

Если обозначить для краткости

$$U=\int_0^{2\pi} d\psi' \ln\sqrt{\alpha^2+\rho^2-2\alpha\rho\cos(\psi'-\psi)},$$

то U должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2}=0,$$

так как стоящее при $d\psi'$ подынтегральное выражение удовлетворяет этому уравнению при каждом значении ψ'. Однако, вводя в качестве переменной интегрирования $\psi'-\psi$ вместо ψ', нетрудно убедиться в том, что U не зависит от ψ.

Следовательно, U должно удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2U}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dU}{d\rho}=0,$$

откуда

$$U=C_1\ln\rho+C_2,$$

где C_1 и C_2 — две неизвестные постоянные. Их значения определяются без труда, если предположить, что ρ бесконечно мало по сравнению с α. При таком предположении интегрирование в выражении для U приводит к соотношению

$$U=2\pi\ln\alpha,$$

из чего следует, что $C_1=0$ и U при всех допустимых значениях ρ имеет постоянное значение $2\pi\ln\alpha$. Это означает, что часть потенциала V, обусловленная отрезком провода длиной 2ε, равна $2e\ln(2\varepsilon/\alpha)$, и, таким образом,

$$V=2e\ln\frac{2\varepsilon}{\alpha}+\int\frac{e'ds'}{r}, \tag{1}$$

где интегрирование производится по всему проводу за исключением отрезка 2ε.

Попытаемся теперь вывести выражение для электродвижущей силы, индуцируемой в рассматриваемой точке изменениями сил токов во всех частях провода.

Если в элементе проводника длиной l' изменяется сила тока i', то при этом в другом элементе индуцируется электродвижущая сила, величина которой на единицу количества электричества составляет, по Веберу [1],

$$-\frac{8}{c^2}\frac{\partial i'}{\partial t}\frac{l'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta',$$

где ϑ и ϑ' — углы, которые образуют с соединяющей их прямой оба элемента; r — длина отрезка этой прямой, заключенного между элементами; c — постоянная скорость, с которой должны двигаться две разновидности электричества друг относительно друга, чтобы ни одна из них не создавала силы, действующей на другую [1].

Для всех частей провода, за исключением рассмотренного ранее куска длиной 2ε, можно считать, что электрический ток сосредоточен на средней линии. Та часть индуцированной электродвижущей силы, которую создает провод с выброшенным из него куском длиной 2ε, составляет поэтому

$$-\frac{8}{c^2}\int\frac{\partial i'}{\partial t}\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta',$$

---

[1] *Weber W.* Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig, 1846. S. 354; 1857. S. 268.

где i' — сила тока, протекающего через поперечное сечение проводника там, где расположен элемент ds'; ϑ и ϑ' — углы, образуемые элементами ds и ds' с соединяющей их прямой; r — длина отрезка этой прямой, заключенного между ds и ds', а интегрирование производится по всему проводу за исключением указанного выше куска.

Считать, что ток и в этом куске провода сосредоточен на линии, недопустимо, так как для этого она должна быть прямой и параллельной элементу ds. Проведем через начало элемента ds' поперечное сечение провода и обозначим через ρ', ψ' полярные координаты его точек относительно системы координат, начало которой совмещено с центром сечения, а ось параллельна прямой, от которой отсчитывается угол ψ. Если обозначить через J' плотность тока в точке, задаваемой координатами ρ', ψ', то для той части индуцированной электродвижущей силы, которая обусловлена куском провода длиной 2ε, мы получаем выражение

$$-\frac{8}{c^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\partial J'}{\partial t}\cdot\frac{\rho' d\rho' d\psi' x'^2 dx'}{(x'^2+\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi'-\psi))^{3/2}}.$$

Так как силу тока J' вполне допустимо считать не зависящей от x', то интегрирование по x' проводится без труда. Учитывая, что ε бесконечно велико по сравнению со всеми значениями ρ и ρ', преобразуем полученное выражение к виду

$$-\frac{16}{c^2}\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{\partial J'}{\partial t}\rho' d\rho' d\varphi'\left[\ln 2\varepsilon-1-\ln\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi'-\psi)}\right].$$

Но

$$\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}J'\rho' d\rho' d\psi' = i,$$

поэтому новое выражение, в свою очередь, допускает упрощение:

$$-\frac{16}{c^2}\left[(\ln 2\varepsilon-1)\frac{\partial i}{\partial t}-\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}\frac{\partial J'}{\partial t}\rho' d\rho' d\psi'\ln\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi-\psi')}\right].$$

Таким образом, вся электродвижущая сила оказывается равной

$$-\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

если

$$W=\int i'\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'+2i(\ln 2\varepsilon-1)-$$
$$-2\int_0^{\alpha}\int_0^{2\pi}J'\rho' d\rho' d\psi'\ln\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi'-\psi)}.$$

В случае стационарного электрического тока его плотность равна произведению электродвижущей силы, приходящейся на единицу количества электричества, на электропроводность. Предположим, что та же зависимость сохраняется и в том случае, когда ток не стационарен. Это предположение выполняется, если действующие на частицы электричества силы, которые создают сопротивление, столь велики, что время, в течение которого частицы электричества продолжают двигаться по инерции после выключения ускоряющей силы, допустимо считать бесконечно малым по сравнению с характерными промежутками времени, возникающими при рассмотрении нестационарного электрического тока [2]. Приняв это предположение и обозначив через k электропроводность провода, через J — плотность тока в точке с координатами s, ρ и ψ в момент времени t, мы придем к выражению

$$J=-2k\left(\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right).$$

Из этого выражения для плотности тока нетрудно вывести выражение для силы тока i. Для этого первое выражение достаточно умножить на $\rho d\rho d\psi$ и проинтегрировать по ρ от 0 до α и по ψ от 0 до 2π. Так как V не зависит от ρ и ψ, то, обозначив

$$w=\frac{1}{\pi\alpha^2}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}W\rho d\rho d\psi,$$

получим

$$i=-2\pi k\alpha^2\left(\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right). \tag{2}$$

При этом

$$w=\int i'\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'+2i(\ln 2\varepsilon-1)-\frac{1}{\pi\alpha^2}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}J'\rho'd\rho'd\psi'\rho d\rho d\psi\times$$
$$\times\ln\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi'-\psi)}.$$

Интеграл

$$\int_0^{2\pi}d\psi\ln\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\psi'-\psi)}$$

имеет такой же вид, как рассмотренный выше интеграл, который мы обозначили через U. Из приведенных нами соображений следует, что этот интеграл равен $2\pi\ln\rho'$ при $\rho'>\rho$ и $2\pi\ln\rho$ при $\rho'<\rho$. Умножая на $\rho d\rho$ и интегрируя от 0 до α, получаем

$$\pi\alpha^2\left(\ln\alpha-\frac{\alpha^2-\rho'^2}{2\alpha^2}\right).$$

Таким образом, если учесть, что

$$\int_0^\alpha\int_0^{2\pi}J'\rho'd\rho'd\psi'=i,$$

то третий член в выражении для w можно преобразовать к виду

$$-2i\ln\alpha+\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{2\pi}\frac{\alpha^2-\rho'^2}{\alpha^2}J'\rho'd\rho'd\psi'.$$

Следовательно,

$$w=\int i'\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta'+2i\left(\ln\frac{2\varepsilon}{\alpha}-1\right)+\int\limits_0^\alpha\int\limits_0^{2\pi}\frac{\alpha^2-\rho'^2}{\alpha^2}J'\rho'd\rho'd\psi'.$$

Оставшийся двойной интеграл невозможно привести к простому виду, так как J' — неизвестная функция от ρ. Однако им можно пренебречь по сравнению с членом $2i\,[\ln(2\varepsilon/\alpha)-1]$, последний же можно считать приближенно равным $2i\ln(2\varepsilon/\alpha)$, если толщина провода достаточно мала по сравнению с размерами фигуры, образуемой средней линией: в этом случае ε можно выбрать столь малым, что значение $\ln(2\varepsilon/\alpha)$ будет сколь угодно большим, хотя ε будет бесконечно малым по сравнению с размерами фигуры, образуемой средней линией. При таком предположении получаем

$$w=2i\ln\frac{2\varepsilon}{\alpha}+\int i'\frac{ds'}{r}\cos\vartheta\cos\vartheta', \tag{3}$$

где интегрирование проводится по всему проводу за исключением отрезка длиной 2ε.

К уравнениям (1), (2) и (3) между четырьмя величинами i, e, V, w можно присоединить еще одно — четвертое — соотношение.

Проведем через начало и конец элемента ds два поперечных сечения. Через первое сечение за время dt в ограниченный с двух сторон элемент провода поступает количество положительного электричества, равное idt, через второе сечение за то же время из того же элемента провода уходит количество положительного электричества, равное $(i+\partial i/\partial s ds)dt$. Следовательно, за время dt элемент провода теряет $\partial i/\partial s ds dt$ положительного электричества. Через каждое сечение отрицательного электричества протекает столько же, сколько и положительного, но в противоположном направлении. Таким образом, за время dt элемент провода получает столько же отрицательного электричества, сколько теряет положительного электричества. Свободное электричество в элементе провода, т. е. разность между количествами положительного и отрицательного электричества, уменьшается за время dt на $2\partial i/\partial s ds dt$. Это количество электричества равно eds, и поэтому [2]

$$2\frac{\partial i}{\partial s}=-\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{4}$$

[2] Вывод этого уравнения основан на представлении о том, что и в случае нестационарного тока через каждое поперечное сечение проводника за одно и то же время в противоположных направлениях проходят одинаковые количества положительного и отрицательного электричества. Но уравнение (4) было бы верным и в том случае, если бы мы отказались от подобного предположения: необходимо лишь силу тока определить как среднее арифметическое количеств положительного и отрицательного электричества, протекающих за единицу времени в противоположных направлениях через поперечное сечение проводника.

Разовьем теорию, содержащуюся в уравнениях (1)—(4), в предположении, что средняя линия провода имеет такую форму, при которой расстояние между любыми двумя точками, ограничивающими конечный кусок провода, не является бесконечно малым. Такое предположение исключает случай, когда в проводнике имеются индукционные витки. Оно позволяет существенно упростить уравнения (1) и (3).

Пусть A — точка, в которой выбран элемент ds, B и C — две точки, расположенные на проводе на конечном расстоянии по разные стороны от A. Тогда интеграл

$$\int \frac{e'ds'}{r},$$

взятый по всему проводу, за исключением отрезка BAC, имеет конечную величину, но бесконечно мал по сравнению с $2e \ln (2\varepsilon/\alpha)$, поэтому в уравнении (1) этот интеграл следует брать лишь по отрезку BAC, из которого выброшена часть длиной 2ε. Если обозначить через σ дугу между A и переменной точкой провода, то наш интеграл допускает разбиение

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \frac{e'd\sigma}{r} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{e'd\sigma}{r}.$$

Величина e'/r есть функция от σ, значение которой стремится к e/σ, если σ стремится к 0, поэтому интегралы

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma}\right) d\sigma \quad \text{и} \quad \int_{\varepsilon}^{AC} \left(\frac{e'}{r} - \frac{e}{\sigma}\right) d\sigma$$

имеют конечные значения, поскольку интегрируемая функция в каждом из них нигде не обращается в бесконечность. Следовательно, интеграл, входящий в уравнение (1), также можно заменить суммой интегралов

$$\int_{\varepsilon}^{AB} \frac{ed\sigma}{\sigma} + \int_{\varepsilon}^{AC} \frac{ed\sigma}{\sigma},$$

т. е.

$$e \ln (AB/\varepsilon) + e \ln (AC/\varepsilon).$$

Длины дуг AB и AC можно выбирать произвольно с тем лишь условием, чтобы длина каждой из них была конечной по сравнению с длиной провода. Если каждую из дуг выбрать равной половине длины провода (длину всего провода мы обозначим l), то уравнение (1) примет вид

$$V = 2e \ln (2\varepsilon/\alpha) + 2e \ln (l/2\varepsilon),$$

т. е.

$$V = 2e \ln (l/\alpha).$$

Как показывают аналогичные рассуждения, уравнение (3) также приводится к аналогичному виду

$$w = 2i \ln (l/\alpha).$$

Подставим полученные выражения для V и w в уравнение (2). Обозначив для краткости через γ величину $\ln(l/\alpha)$ и через r сопротивление всего провода, т. е. величину $l/k\pi\alpha^2$, получим после подстановки

$$i = -4\gamma \frac{l}{r}\left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{4}{e^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Это уравнение вместе с уравнением (4), а именно с уравнением

$$2\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t},$$

позволяет определить i и e как функции от s и t.

Частное решение их дифференциальных уравнений мы найдем, полагая

$$e = X\sin ns, \qquad i = Y\cos ns,$$

где n — произвольная постоянная, а X и Y — неизвестные функции от t. Уравнения переходят в следующие:

$$Y = -4\gamma\frac{l}{r}\left(nX + \frac{4}{c^2}\frac{dY}{dt}\right), \qquad 2nY = \frac{dX}{dt}.$$

Исключая Y, получаем

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{c^2r}{16\gamma l}\frac{dX}{dt} + \frac{c^2n^2}{2}X = 0.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$X = C_1e^{-\lambda_1 t} + C_2e^{-\lambda_2 t},$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные; e — основание натуральных логарифмов; λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \frac{c^2r}{16\gamma l}\lambda + \frac{c^2n^2}{2} = 0.$$

Корни λ_1 и λ_2 имеют следующие значения:

$$\frac{c^2r}{32\gamma l}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}nl\right)^2}\right].$$

Чтобы понять, вещественны эти корни или мнимы, необходимо рассмотреть один частный случай, например, взять в качестве провода эталон сопротивления Якоби [3] (сопротивление эталона измерил Вебер). Эталон Якоби представляет собой медную проволоку длиной 7,620 м и радиусом 0,333 мм. Величина γ имеет значение, которое с высокой точностью можно принять равным 10. Сопротивление проволоки в электромагнитных единицах [4] нашел Вебер [3] ($598\cdot10^7$), принявший за единицу длины миллиметр, а за единицу времени — секунду.

Чтобы найти сопротивление, т. е. значение r, в механических единицах, его необходимо умножить на $8/c^2$. Поскольку в этих единицах [4]

---

[3] *Weber W.* Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig, 1857. S. 252.

[4] *Weber W., Kohlrausch R.* Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig, 1856. S. 264.

$$c = 4{,}39 \cdot 10^{11},$$

то

$$r = 2{,}482 \cdot 10^{-13},$$

откуда

$$32\gamma/rc\sqrt{2} = 2070.$$

Величину n, оставшуюся пока неопределенной, необходимо в дальнейшем выбрать так, чтобы число nl было кратно π. Тогда отрицательный член под знаком корня в выражении для λ_1 и λ_2 будет столь большим по сравнению с 1, что его можно считать бесконечно большим. Это позволяет существенно упростить задачу. В дальнейшем мы будем рассматривать только такой случай, т. е. считать величину

$$32\gamma/rc\sqrt{2}$$

бесконечно большой по сравнению с единицей. Такое предположение выполняется тем точнее, чем меньше сопротивление провода при заданном отношении между длиной и радиусом. В то же время сопротивление провода может быть значительно больше сопротивления эталона Якоби, прежде чем полученные нами результаты утратят свою силу.

При наших предположениях корни λ_1 и λ_2 равны

$$h \pm \frac{cn}{\sqrt{2}}\sqrt{-i},$$

где для краткости мы приняли обозначение

$$h = \frac{c^2 r}{32\gamma l}.$$

Введение новых постоянных вместо C_1 и C_2 позволяет преобразовать выражение для X к виду

$$X = e^{-ht}\left(A\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}} + B\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}\right),$$

при этом

$$Y = -\frac{e^{-ht}}{2}\left\{\left(\frac{h}{n}A - \frac{c}{\sqrt{2}}B\right)\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}} + \left(\frac{c}{\sqrt{2}}A + \frac{h}{n}B\right)\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Предположим, что при $t=0$ выполняется равенство $i=0$ и, следовательно, $Y=0$. Тогда

$$B = \frac{A}{\dfrac{nc}{h\sqrt{2}}}.$$

Величину n, как мы уже отмечали, необходимо выбирать кратной π/l, поэтому знаменатель выражения для B должен быть кратен

$$\pi\frac{c}{hl\sqrt{2}}.$$

Но множитель, стоящий в этом выражении при π, равен

$$\frac{32\gamma}{rc\sqrt{2}},$$

т. е. именно той величине, относительно которой предполагалось, что она бесконечно большая. Следовательно, коэффициент B бесконечно мал по сравнению с A, что позволяет нам положить

$$X = Ae^{-ht}\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}}, \qquad Y = -\frac{c}{2\sqrt{2}}Ae^{-ht}\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}.$$

Умножив эти выражения соответственно на $\sin ns$ и $\cos ns$ и положив произведения равными величинам e и i, мы получим частное решение дифференциальных уравнений, которым удовлетворяет e и i. Эти решения можно обобщить, прибавив к s произвольную постоянную, и получить

$$e = e^{-ht}\cos\frac{cnt}{\sqrt{2}}(A\sin ns + A'\cos ns),$$

$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}}e^{-ht}\sin\frac{cnt}{\sqrt{2}}(A\cos ns - A'\sin ns).$$

Частное решение другого вида, также удовлетворяющее условию $i=0$ при $t=0$, определяется выражениями

$$e = a + bs, \qquad i = -\frac{c^2}{8h}b(1 - e^{-2ht}),$$

где a и b — две произвольные постоянные. Нетрудно убедиться в том, что такие e и i удовлетворяют дифференциальным уравнениям. Воспользуемся для этого тем, что введение величины h позволяет преобразовать уравнения к виду

$$2hi = -\left(\frac{c^2}{4}\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{\partial i}{\partial t}\right).$$

Решение, которое может удовлетворять условиям задачи, мы получим, выбрав e и i равными суммам частных решений приведенного выше вида.

Рассмотрим теперь более подробно случай, когда провод замыкается на себя. Если провод замкнут, то значения e и i при $s=0$ и $s=l$ должны совпадать, причем совпадение должно иметь место независимо от выбора начала отсчета s. Для этого необходимо, чтобы e и i были периодическими функциями от s с периодом l, для чего, в свою очередь, требуется, чтобы

$$b = 0 \quad \text{и} \quad n = m\frac{2\pi}{l},$$

где m — целое число. Для e и i мы получаем следующие выражения:

$$e = e^{-ht}\sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\frac{2\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}t \cdot \sin m\frac{2\pi}{l}s + a + e^{-ht}\sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos m\frac{2\pi}{l}\frac{c}{\sqrt{2}}t \cdot \cos m\frac{2\pi}{l}s,$$

$$i = -\frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cdot \cos m \frac{2\pi}{l} s +$$

$$+ \frac{c}{2\sqrt{2}} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \sin m \frac{2\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t \cdot \sin m \frac{2\pi}{l} s.$$

Постоянные a, A и A' мы найдем по теореме Фурье, если e задано при $t=0$ как функция от s. Однако решение можно преобразовать к другому виду, в котором его характерные особенности видны более отчетливо.

Пусть при $t=0$, $e=f(s)$. Произведения синусов и косинусов, стоящие под знаками сумм в выражениях для e и i, преобразуем, используя тригонометрические тождества

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} \sin(y+x) + \frac{1}{2} \sin(y-x),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(y+x) + \frac{1}{2} \cos(y-x),$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} \cos(y+x) + \frac{1}{2} \cos(y-x).$$

Если учесть затем, что функция f непременно должна быть периодической с периодом l, то выражения для e и i можно записать в виде

$$e = a + \frac{1}{2} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) + f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) - 2a \right],$$

$$i = -\frac{c}{4\sqrt{2}} e^{-ht} \left[f\left(s + \frac{c}{\sqrt{2}} t\right) - f\left(s - \frac{c}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

Величина a определяется соотношением

$$a = \frac{1}{l} \int_0^l f(s)\, ds,$$

т. е. la — количество электричества во всем проводе.

Выражение для e указывает на весьма замечательную аналогию между распространением электричества в проводе и распространением волны в натянутой струне или в продольно колеблющемся упругом стержне.

Если $a=0$, т. е. если суммарное количество свободного электричества равно 0, то электричество, если можно так выразиться, распадается на две волны одинаковой амплитуды, распространяющиеся по проводу в противоположных направлениях со скоростью $c/\sqrt{2}$. Плотность электричества убывает пропорционально e^{-ht}, но по сравнению со скоростью волн это спадание происходит очень медленно.

Действительно, время, за которое каждая из волн успевает обойти весь провод, составляет $l\sqrt{2}/c$, поэтому отношение плотностей электричества в произвольно выбранной точке до и после того, как волна успевает обежать весь провод, равно

$$1/e^{-hl\sqrt{2}/c}.$$

Это отношение отличается от 1 на бесконечно малую величину, так как вследствие принятого нами предположения показатель экспоненты бесконечно мал. По сравнению со скоростями, которые доступны непосредственному наблюдению, электрическая плотность убывает гораздо быстрее. Если в качестве провода выбрать эталон сопротивления Якоби, то величина $1/h$ мало отличается от 1/2000 доли секунды. За этот короткий промежуток времени электрическая плотность успевает уменьшиться в $e:1$, т. е. в 2,7 : 1 раз.

Если величина a отлична от нуля, т. е. если средняя плотность электричества не равна 0, то, как показывает выражение для e, избыток плотности над средней плотностью изменяется так, как если бы средняя плотность была равна нулю.

Скорость распространения электрической волны, по нашим расчетам, оказывается равной $c/\sqrt{2}$, т. е. не зависит ни от поперечного сечения, ни от электропроводности провода, ни, наконец, от плотности электричества. Скорость эта составляет 41950 миль в секунду, т. е. очень близка к скорости света в пустом пространстве [5].

Если провод не образует замкнутой петли, то величина b не обязательно должна быть равной нулю и величины n могут принимать значения, отличные от значений n в рассмотренном нами случае. В зависимости от условий, наложенных на концы провода, на этих концах должны выполняться определенные соотношения. Если конец изолирован, то на нем всегда $i=0$. Если конец идеально заземлен, то при любых t потенциал V и e должны быть равны нулю.

Нетрудно вывести выражения для e и i и для тех случаев, когда оба конца изолированы, оба конца заземлены или один конец изолирован, а другой заземлен. При этом оказывается, что, достигнув конца провода, волна неизменно претерпевает отражение. Если конец заземлен, то отражение сопровождается обращением волны, т. е. если к концу приходит волна положительного электричества, то от конца уходит волна отрицательного электричества. На изолированном конце отражение происходит без обращения волны. Таким образом, заземленный конец в определенном смысле соответствует закрепленному концу продольно колеблющегося стержня, а изолированный конец провода — свободному концу стержня.

Рассмотрим более подробно еще один относящийся к затронутому нами кругу вопросов случай: исследуем, как движется электричество в проводниках, служащих выводами гальванической цепи, до того, как ток выйдет на стационарное значение. Предположим, что сопротивление цепи бесконечно мало по сравнению с сопротивлением выводов и что один полюс выводов заземлен. Соединим при $t=0$ с заземленным выводом начало, а с другим выводом — конец провода. Тогда в начале провода, или при $s=0$, потенциал неизменно будет равен нулю, а в конце, или при $s=l$, он будет иметь постоянное значение, зависящее от электродвижущей силы цепи. Если K — электродвижущая сила, то значение потенциала равно $(1/2)K$. Это означает, что выражения для e и i должны удовлетворять следующим условиям.

Прежде всего

$$\text{при}\quad s=0,\quad e=0;$$

$$\text{при}\quad s=l,\quad e=(1/4\gamma)K;$$

$$\text{при}\quad t=0,\quad e=0.$$

Из первого условия следует, что $A'=0$ и к тому же $a=0$. Так как e при $s=l$ не должно зависеть от t, то n должно удовлетворять условиям

$$\sin nl = 0,$$

т. е.

$$n = m\pi/l,$$

где m — произвольное целое число. Кроме того, чтобы e принимало при $s=l$ заданное значение, величину b необходимо выбрать равной

$$(1/4\gamma l)\, K.$$

Если ввести для краткости обозначения

$$\tau = \frac{\pi}{l} \frac{c}{\sqrt{2}} t$$

и

$$\varphi = \frac{\pi}{l} s,$$

то для e получится соотношение

$$e = \frac{K}{4\gamma l} s + e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos m\tau \sin m\varphi.$$

Постоянные A определяются последним условием: при всех значениях φ от 0 до π должно выполняться соотношение

$$\frac{K}{4\gamma\pi} \varphi = - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\varphi.$$

Но по теореме Фурье в тех же пределах должно выполняться и соотношение

$$\varphi = -2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m} \sin m\varphi,$$

поэтому необходимо положить

$$A_m = (-1)^m \frac{K}{4\gamma\pi} \frac{1}{m}.$$

В результате мы получаем

$$e = \frac{K}{4\gamma} \left\{ \frac{s}{l} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi \right\}.$$

Выписав соответствующее выражение для i и вспомнив соотношение, определяющее h, мы придем к следующему выражению:

$$i = -\frac{K}{r} (1 - e^{-2ht}) - \frac{cK}{4\sqrt{2}\,\gamma\pi} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau \cos m\varphi.$$

Выясним теперь смысл полученных выражений. Начнем с выражения для i. Прежде всего весьма важно найти сумму входящего в выражение для i ряда. Величину φ при этом надлежит считать постоянной и рассматривать ряд как функцию от τ. Эта функция периодическая, с периодом 2π. Кроме того, при τ и $2\pi-\tau$ она принимает значения, равные по величине и противоположные по знаку, поэтому достаточно установить, какие значения она принимает при τ, изменяющемся от 0 до π. Сумму ряда можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau \cos m\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau+\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau-\varphi).$$

Но при x, заключенном между $-\pi$ и $+\pi$, сумма

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin mx$$

равна $-x/2$, а поскольку она периодическая функция с периодом 2π, то ее значение в общем случае представимо в виде

$$-\frac{1}{2}(x-2p\pi),$$

где p — целое число, такое, что $x-2p\pi$ заключено между $-\pi$ и $+\pi$. Если τ изменяется в указанных выше пределах, то разность $\tau-\varphi$ заключена между $-\pi$ и $+\pi$, так как во всех точках провода φ принимает значения, заключенные в пределах от 0 до π. Следовательно,

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau-\varphi) = -\frac{\tau-\varphi}{2}.$$

Что же касается величины $\tau+\varphi$, то она может быть как меньше, так и больше π. В зависимости от этого мы получаем

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau+\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{\tau+\varphi}{2} & \text{при } \varphi < \pi-\tau, \\ -\dfrac{\tau+\varphi}{2}+\pi & \text{при } \varphi > \pi-\tau, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\sum \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \cos m\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\tau}{2} & \text{при } \varphi < \pi-\tau, \\ -\dfrac{\tau}{2}+\dfrac{\pi}{2} & \text{при } \varphi > \pi-\tau. \end{cases}$$

При выводе этих соотношений предполагалось, что τ изменяется от 0 до π. Если τ изменяется от π до 2π, то та же сумма равна

$$\begin{cases} \pi-\dfrac{\tau}{2} & \text{при } \varphi < \tau-\pi, \\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\tau}{2} & \text{при } \varphi > \tau-\pi. \end{cases}$$

Для вычисления суммы при больших значениях τ необходимо воспользоваться тем, что она периодическая функция с периодом 2π.

Отсюда следует, что в каждый момент времени в проводе найдется точка, в которой сила тока претерпевает скачок. При $t=0$ точка разрыва совпадает с концом провода, движется оттуда со скоростью $c/\sqrt{2}$ к началу и, достигнув начала, движется с той же скоростью к концу и продолжает совершать колебания от конца к началу и от начала к концу провода с постоянной скоростью. В каждой из двух частей, на которые делит провод мгновенное положение точки разрыва, сила тока постоянная. Если s и i выбрать за прямоугольные координаты точки, то получится ломаная, изображенная на рис. 1. Сила тока перед

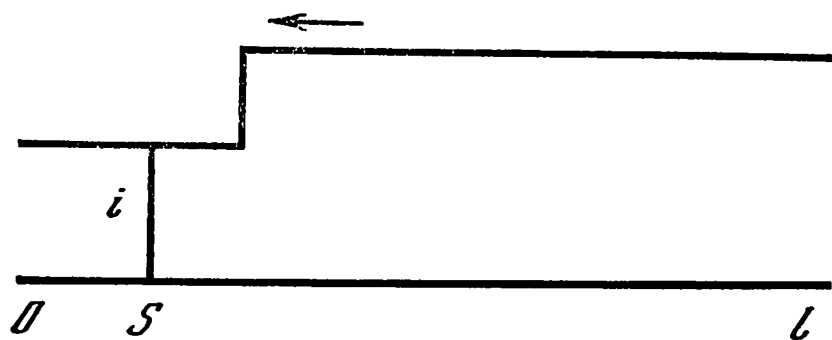


Рис. 1

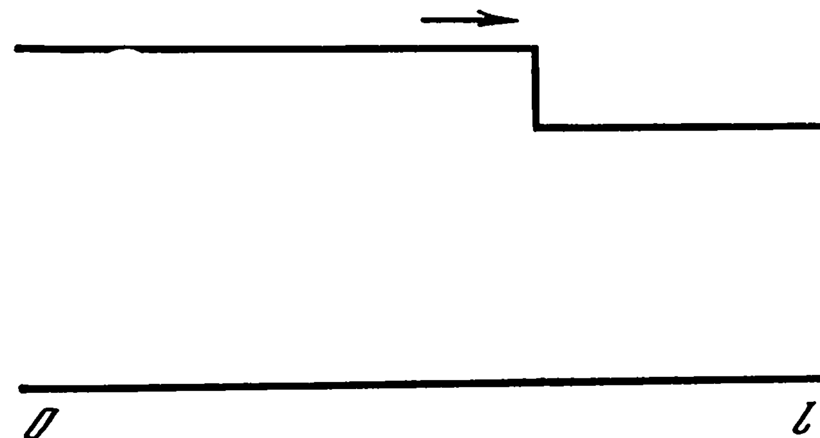


Рис. 2

точкой разрыва по абсолютной величине всегда меньше, а за точкой разрыва — больше (до и после здесь надлежит понимать в смысле до и после прохождения точки разрыва). Например, на рис. 1 распределение сил токов показано для того случая, когда точка разрыва движется от конца к началу провода. На рис. 2 показано движение точки разрыва в обратном направлении. Величина скачка равна

$$\frac{cK}{8\sqrt{2}\,\gamma}\,e^{-ht},$$

или, если обозначить через J значение, к которому стремится со временем i, т. е. значение K/r, то величина скачка составляет

$$J\,\frac{cr}{8\sqrt{2}\,\gamma}\,e^{-ht}.$$

Эта величина достигает наибольшего значения при $t=0$, но в силу принятого нами предположения даже максимальное значение бесконечно мало по сравнению с J. Несколько короче выражение для величины скачка удается записать, если ввести время, которое требуется точке разрыва или электрической волне, чтобы пройти длину провода. Если это время обозначить через T, т. е. положить

$$T = l\sqrt{2}/e,$$

то, как нетрудно показать, величину скачка можно записать в виде

$$J \cdot 2hTe^{-ht}.$$

Со временем величина скачка убывает, но так медленно, что за время T успевает уменьшиться лишь на бесконечно малую величину.

Чтобы составить полное представление о всем процессе в целом, нам осталось лишь исследовать, как изменяется сила тока в начале провода. Пусть i_0 — величина силы тока i при $s=0$. Используя вновь введенные обозначения J и T, получаем

$$i_0 = J(1 - e^{-2ht}) + \frac{J \cdot 4hT}{\pi} e^{-ht} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m\tau.$$

Заменяя сумму ее значением и учитывая, что

$$\frac{\tau}{\pi} = \frac{t}{T},$$

преобразуем это выражение к виду

$$i_0 = J(1 - e^{-2ht}) + J \cdot 2he^{-ht}(2pT - t),$$

где p — то целое число, для которого

$$\frac{t - 2pT}{T}$$

— правильная (положительная или отрицательная) дробь. Число можно также определить как наибольшее целое число, содержащееся в дроби

$$\frac{t+T}{2T}.$$

При тех значениях t, при которых число p не очень велико, выражение для i_0 допускает существенное упрощение. Действительно, при таких значениях t величина ht бесконечно мала, и, пренебрегая членами высших порядков, выражение для i_0 можно представить в виде

$$i_0 = J \cdot 2ht + J \cdot 2h(2pT - t),$$

т. е.

$$i_0 = pJ \cdot 4hT.$$

Это выражение показывает, что сила тока в начале провода равна нулю до $t=T$, после чего изменяется скачком в моменты времени $t=3T$, $5T$ и т. д. Каждый скачок силы тока в начале провода вдвое больше, чем в других точках провода. Между двумя последовательными скачками сила тока постоянна.

Аналогичным образом можно проанализировать и выражение для e. Справедлива следующая формула:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cos m\tau \sin m\varphi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau + \varphi) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin m(\tau - \varphi).$$

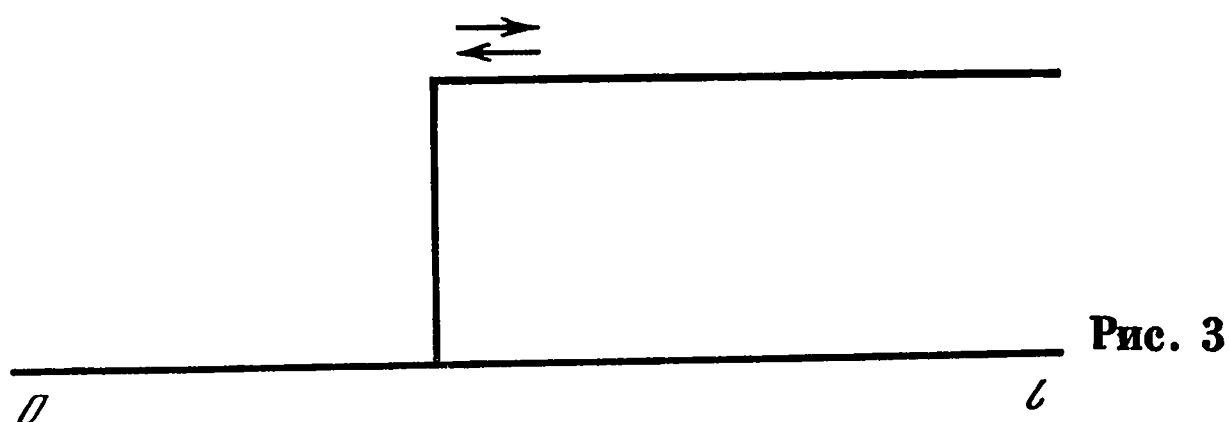


Рис. 3

Если τ изменяется от 0 до π, то сумма равна

$$\begin{cases} -\frac{\varphi}{2} & \text{при } \varphi < \pi - \tau, \\ -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} & \text{при } \varphi > \pi - \tau, \end{cases}$$

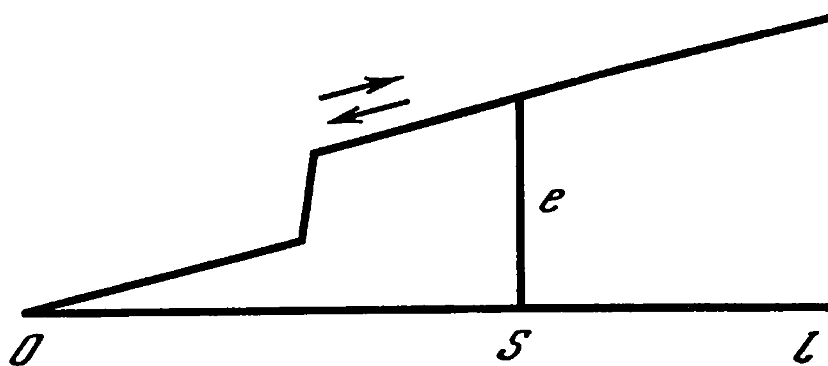


Рис. 4

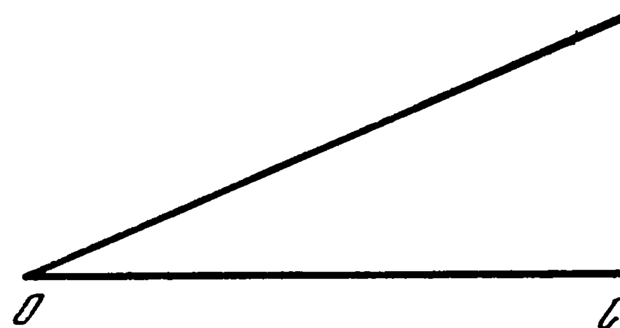


Рис. 5

если же τ изменяется от π до 2π, то та же сумма равна

$$\begin{cases} -\frac{\varphi}{2} & \text{при } \varphi < \tau - \pi, \\ -\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} & \text{при } \varphi > \tau - \pi. \end{cases}$$

Второе утверждение следует из первого, если учесть, что сумма принимает равные значения при τ и $2\pi - \tau$. При бо́льших значениях τ при вычислении суммы необходимо воспользоваться тем, что она имеет период 2π.

Отсюда мы заключаем, что в любой момент времени в некоторой точке провода величина e также претерпевает скачок. Эта точка всегда совпадает с той, с которой при заданном t претерпевает скачок величина i. Величина e всегда больше с той стороны от точки разрыва, с которой находится конец провода, и меньше со стороны начала провода. Величина скачка составляет

$$\frac{K}{4\gamma} e^{-ht},$$

или, если обозначить через E постоянное значение e с той стороны, где находится конец провода,

$$Ee^{-ht}.$$

С той стороны от точки разрыва, где расположено начало провода, имеем

$$e = E \cdot \frac{s}{l}(1 - e^{-ht}),$$

а с той стороны, где находится конец провода,

$$e = E\left\{\frac{s}{l}(1 - e^{-ht}) + e^{-ht}\right\}.$$

Если e и s принять за прямоугольные координаты точки, то при некотором t возникает ломаная, изображенная на рис. 3. Если t не превосходит не слишком большого кратного T, ломаная имеет такой вид, как показано на рис. 4. При дальнейшем увеличении t она все более стремится к прямой, изображенной на рис. 5.

20.
О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ПРОВОДНИКАХ *

В предыдущей работе [1] я изложил теорию движения электричества в линейных проводниках. Теперь я намереваюсь показать, каким образом развитые мною соображения при надлежащем обобщении становятся применимы к проводникам любой формы.

Обозначим через x, y, z прямоугольные координаты точки проводника. Разложим ток, проходящий в момент времени t через точку (x, y, z), по направлениям трех координатных осей и обозначим через u, v, w плотности компонент тока. Эти величины должны быть равны произведениям компонент электродвижущей силы, действующей в точке (x, y, z) на единицу количества электричества, на электропроводность. Электродвижущая сила обусловлена отчасти имеющимся в проводнике свободным электричеством, отчасти индукцией, вызванной изменениями сил токов во всех частях проводника. Если Ω — потенциальная функция свободного электричества относительно точки (x, y, z), то компоненты первой части электродвижущей силы равны

$$-2\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad -2\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Чтобы определить компоненты второй части, обозначим через x', y', z' координаты другой точки проводника, через u', v', w' — значения компонент u, v, w в этой точке, через r — расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z') и введем величины

$$U = \int\int\int \frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x - x')[u'(x - x') + v'(y - y') + w'(z - z')],$$

* Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern // Ges. Abhandl. Leipzig: Johannes Ambrosius Barth, 1882. S. 154—168. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] См. статью 19 наст. издания. — *Примеч. ред.*

$$V=\int\int\int\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(y-y')[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')],$$

$$W=\int\int\int\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(z-z')[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')],$$

где интегрирование производится по всему объему проводника. По закону индукции Вебера компоненты второй части электродвижущей силы равны

$$-\frac{8}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t},\quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t},\quad -\frac{8}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t},$$

где c — та самая постоянная скорость, с которой должны двигаться друг относительно друга положительное и отрицательное электричества, чтобы между ними не возникала сила. Следовательно, если k — электропроводность проводника, то

$$u=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right), \tag{1}$$

$$v=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \tag{2}$$

$$w=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial W}{\partial t}\right). \tag{3}$$

Мы не предполагаем, что электричество распределено лишь по поверхности проводника, как в состоянии равновесия или при постоянных токах. Более того, будет показано, что в общем случае такое предположение неверно. Обозначим через ε плотность свободного электричества в точке (x, y, z), через ε' — плотность свободного электричества в точке (x', y', z'), через e — плотность свободного электричества для элемента dS поверхности, и через e' — плотность свободного электричества для другого элемента dS' поверхности, тогда

$$\Omega=\int\frac{dx'dy'dz'}{r}\varepsilon'+\int\frac{dS'}{r}e', \tag{4}$$

где первое интегрирование проводится по всему объему, а второе — по поверхности проводника.

К выведенным уравнениям необходимо добавить еще два уравнения, относящиеся к временным изменениям плотности свободного электричества. Действительно, в каждой точке внутри проводника выполняется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \tag{5}$$

и, если обозначить через N направленную внутрь проводника нормаль к элементу dS его поверхности, то для каждой точки поверхности справедливо уравнение

$$u\cos(N, x)+v\cos(N, y)+w\cos(N, z)=-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{6}$$

Полученные уравнения позволяют вывести замечательное соотношение между ε и Ω. Подставляя выражения для u, v, w из (1)—(3) и учитывая, что

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=-4\pi\varepsilon,$$

получаем

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-16k\left[\pi\varepsilon-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right].$$

Поскольку выражение для U можно записать в виде

$$U=-\int dx'dy'dz'\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,[u'(x-x')+v'(y-y')+w'(z-z')],$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\int dx'dy'dz'\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}\,u'-$$

$$-\int dx'dy'dz'\,\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\,[u'(x-x')+v'(x-x')+w'(z-z')].$$

Выписывая аналогичным образом выражение для $\partial V/\partial y$ и $\partial W/\partial z$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=-\int dx'dy'dz'\left(u'\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}+v'\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y}+w'\,\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z}\right),$$

так как для всех точек (x', y', z') не совпадающих с точкой (x, y, z), выполняется уравнение

$$\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2}=0,$$

а входящие во вторую часть электродвижущей силы интегралы, взятые по бесконечно малому объему, содержащему точку (x, y, z), бесконечно малы.

В правильности последнего утверждения нетрудно убедиться тем же способом, которым Гаусс доказал, что потенциал масс, непрерывно заполняющих пространство, относительно точки внутри распределенных масс дает бесконечно малый вклад в потенциал тех же масс относительно бесконечно близкой точки [2]. Если в интеграле, стоящем в правой части, заменить частные производные по x, y, z взятыми со знаком минус частными производными по x', y', z', разбить интеграл на три слагаемых и проинтегрировать первое слагаемое по частям по x', второе — по y' и третье — по z', то получится уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=-\int\frac{dS'}{r}[u'\cos(N',x)+v'\cos(N',y)+w'\cos(N',z)]-$$

$$-\int\frac{dx'dy'dz'}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right),$$

[2] Результат, выведенный Гауссом из анализа наблюдений Магнитного общества [1] (Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1839. S. 7).

где N' — направленная внутрь нормаль к элементу dS' поверхности. Уравнения (6), (5) и (4) позволяют преобразовать последнее уравнение к виду

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}=\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial t},$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-8k\left(2\pi\varepsilon-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}\right). \qquad (7)$$

Из этого соотношения отчетливо видно, что ε может быть равно нулю лишь в исключительных случаях и что в общем случае даже внутри проводника имеется свободное электричество. Весьма вероятно, что находящееся внутри проводника свободное электричество играет существенную роль при так называемых механических действиях тока разряда лейденской банки, например, при разрушении тонкой проволочки.

Применим теперь развитую выше теорию к случаю, рассмотренному в предыдущей работе, упомянутой во введении, — бесконечно тонкому проводнику, вблизи которого нет никаких других заряженных тел. Докажем, что более общий вариант теории приводит к тому же результату, который был получен в предыдущей работе, и, кроме того, позволяет ответить на вопросы, ранее остававшиеся без ответа.

Упростим сначала общие уравнения с помощью предположения о том, что проводник имеет форму цилиндра с круглым поперечным сечением и токи, так же как и распределение свободного электричества, симметричны относительно оси. За ось симметрии выберем ось x, а вместо y и z введем новые координаты ρ и φ, такие, что

$$y=\rho\cos\varphi, \qquad z=\rho\sin\varphi.$$

Аналогичным образом положим

$$y'=\rho'\cos\varphi', \quad z'=\rho'\sin\varphi'.$$

Обозначим через σ плотность компоненты тока, ортогональной оси цилиндра, в точке (x, ρ, φ) (компонента считается положительной, если направлена от оси цилиндра) и через σ' — плотность той же компоненты в точке (x', ρ', φ'). Тогда

$$v=\sigma\cos\varphi, \qquad w=\sigma\sin\varphi,$$

$$v'=\sigma'\cos\varphi', \qquad w'=\sigma'\sin\varphi',$$

и

$$u=-2k\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{4}{c^2}\frac{\partial U}{\partial t}\right), \qquad (8)$$

где

$$U=\int\frac{dx'dy'dz'}{r^3}(x-x')\left[u'(x-x')+\sigma'(\rho\cos(\varphi-\varphi')-\rho')\right]. \qquad (9)$$

Если пренебречь действием свободного электричества, находящегося на поверхности цилиндра, и обозначить через α радиус цилиндра, то уравнение (4) можно записать в виде

$$\Omega=\int\frac{dx'\rho'd\rho'd\varphi'}{r}\varepsilon'+\alpha\int\frac{dx'd\varphi'}{r}e'. \tag{10}$$

Уравнение (5) перейдет при этом в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho\sigma}{\partial\rho}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \tag{11}$$

а уравнение (6), относящееся к электричеству на поверхности проводника, — в уравнение

$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{12}$$

Выражения для Ω и U существенно упрощаются, если предположить, что поперечное сечение цилиндра бесконечно мало, а его длина конечна. Обозначим длину цилиндра через l и поместим начало координат в центре цилиндра. Тогда интегрирование по x' будет производиться от $-l/2$ до $+l/2$. Для краткости введем обозначение

$$\xi=x'-x.$$

Тогда вместо dx' в интегралы войдет $d\xi$ и интегрирование по ξ необходимо будет производить от $-l/2-x$ до $l/2-x$ (первый предел всегда отрицателен, второй — всегда положителен). Входящая в интегралы величина r определяется из соотношения

$$r^2=\xi^2+\beta^2,$$

где

$$\beta^2=\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi').$$

Чтобы начать преобразование второй части Ω, будем считать величину e' в интеграле

$$\int\limits_{-\frac{l}{2}-x}^{\frac{l}{2}-x}\frac{d\xi e'}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}}$$

разложенной в ряд Тейлора по степеням ξ:

$$e'=e+\frac{\partial e}{\partial x}\xi+\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}\frac{\xi^2}{1\cdot 2}+\ldots.$$

Отдельные слагаемые в разложении интеграла имеют вид

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\frac{\partial^n e}{\partial x^n}\int\frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}}.$$

Но

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \frac{1}{n}\xi^{n-1}\sqrt{\beta^2+\xi^2} - \frac{n-1}{n}\beta^2 \int \frac{\xi^{n-2}d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}}$$

и

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \ln\left(\xi+\sqrt{\beta^2+\xi^2}\right), \qquad \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = \sqrt{\beta^2+\xi^2}.$$

Если величина β бесконечно мала, а это действительно так при бесконечно малой α, то лишь первый член в разложении и только он обращается в бесконечность. Следовательно, всеми остальными членами разложения по сравнению с первым членом можно пренебречь и получить

$$\int \frac{e' d\xi}{\sqrt{\beta^2+\xi^2}} = 2e \ln \frac{\sqrt{l^2-4x^2}}{\beta}.$$

Пренебрегая конечной величиной по сравнению с бесконечно большой, преобразуем правую часть к виду

$$2e \ln \frac{l}{\beta}.$$

Кроме того,

$$\int_0^{2\pi} \ln \beta d\varphi' = 2\pi \ln \rho' \quad \text{при} \quad \rho' > \rho.$$

Во втором интеграле для Ω следует положить $\rho' = \alpha$, после чего

$$\alpha \int \frac{dx' d\varphi'}{r} e' = 4\pi\alpha e \ln \frac{l}{\alpha}.$$

Аналогичные соображения применимы и к первой части Ω. Пусть ε_0' — значение, принимаемое ε в точке (x, ρ', φ'). Тогда

$$\int \frac{e' dx}{r} = 2\varepsilon_0' \ln \frac{l}{\beta}$$

и, кроме того,

$$\int \ln \beta d\varphi' = \begin{cases} 2\pi \ln \rho' & \text{при} \quad \rho' > \rho, \\ 2\pi \ln \rho & \text{при} \quad \rho > \rho'. \end{cases}$$

Пренебрегая конечными величинами по сравнению с бесконечно большими, каждое из двух последних выражений можно записать в виде $2\pi \ln \alpha$, поэтому

$$\int \frac{dx' \rho' d\rho' d\varphi'}{r} \varepsilon' = 4\pi \ln \frac{l}{\alpha} \int_0^{\alpha} \rho' d\rho' \varepsilon_0'.$$

Введя обозначение

$$E = 2\pi\alpha e + 2\pi \int_0^\alpha \rho' d\rho' \varepsilon_0',$$

т. е. обозначив через Edx количество свободного электричества в части провода, соответствующей элементу dx, получим[3]

$$\Omega = 2E \ln \frac{l}{\alpha}. \tag{13}$$

Аналогичное преобразование допускает и выражение (9) для U. Будем считать, что u' и σ' в (9) разложены в ряд по степеням ξ, и обозначим через u_0' и σ_0' значения u и σ в точке (x, ρ', φ'). Члены разложения интеграла в правой части (9) содержат интегралы вида

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int \frac{\xi^n d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} = \frac{1}{n-2} \frac{\xi^{n-1}}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} - \frac{n-1}{n-2} \beta^2 \int \frac{\xi^{n-2} d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}},$$

$$\int \frac{\xi d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}}.$$

$$\int \frac{\xi^2 d\xi}{(\beta^2 + \xi^2)^{3/2}} = -\frac{\xi}{\sqrt{\beta^2 + \xi^2}} + \ln\left(\xi + \sqrt{\beta^2 + \xi^2}\right).$$

Следовательно, из интегралов такого вида, взятых от отрицательного до положительного конечного предела, бесконечно большим при бесконечно малом β является интеграл с $n=2$ и только с $n=2$. Всеми остальными интегралами можно пренебречь по сравнению с этим интегралом, а в нем самом можно пренебречь конечной частью. При $n=2$ один из сомножителей в подынтегральном выражении имеет вид

$$u_0' - \frac{\partial \sigma_0'}{\partial x} (\rho \cos (\varphi - \varphi') - \rho').$$

Ввиду малости ρ и ρ' в нем можно удержать только u_0'. Производя вычисления, мы приходим к выражению, выведенному выше для Ω:

$$U = 4\pi \ln \frac{l}{\alpha} \int \rho' d\rho' u_0'.$$

Если количество электричества, протекающего за единицу времени через поперечное сечение провода, т. е. силу тока, обозначить через i, то полученное выражение можно записать в более простом виде:

$$U = 2i \ln \frac{l}{\alpha}.$$

[3] E — та же самая величина, которая в предыдущей работе была обозначена e.

Подставляя в (8) это выражение для U и выражение (13) для Ω, получаем

$$u = -4 \ln \frac{l}{a} k \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right).$$

Правая часть этого выражения не зависит от ρ. Следовательно, u также не зависит от ρ, и поэтому

$$i = \pi a^2 u.$$

В то же время

$$i = -4\pi a^2 k \ln \frac{l}{a} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{4}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right). \tag{14}$$

Второе соотношение между величинами E и i мы получаем из (11) и (12). Умножая уравнение (11) на $\rho d\rho d\varphi$, интегрируя по поперечному сечению провода и вычитая уравнение (12), предварительно умноженное на $2\pi a$, получаем

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{15}$$

При выводе уравнений (14) и (15) предполагалось, что провод прямолинеен. Но поскольку из них следует, что на электрическое состояние в данной точке провода никак не влияют электрическое состояние точек, отстоящих от нее на конечное расстояние, то уравнения (14) и (15) выполняются и в том случае, когда провод искривлен, если только радиус кривизны всюду конечен и точки, между которыми заключен кусок провода, не лежат на бесконечно малом расстоянии друг от друга.

Уравнения (14) и (15) совпадают с уравнениями, выведенными для такого же случая в предыдущей работе. Развитая нами более общая теория приводит к тем же результатам, которые изложены в предыдущей работе, но позволяет также получить ответы и на некоторые новые вопросы. Например, если найти E из уравнений (14) и (15), а Ω — из уравнения (13), то, интегрируя уравнение (7), мы находим ε, или плотность свободного электричества внутри провода, если в начальный момент времени величина ε задана. Если при $t=0$ величина ε не зависит от ρ, то и в дальнейшем ε не зависит от ρ, т. е. плотность свободного электричества одинакова во всех точках поперечного сечения, так как из (13) следует, что Ω не зависит от ρ, а в уравнение (7) ρ не входит. После того как плотность свободного электричества ε найдена, мы можем найти e. Если начальное значение ε не зависит от ρ (а мы предполагаем, что это именно так), то e можно найти из соотношения

$$E = 2\pi a e + \pi a^2 \varepsilon.$$

Наконец, при том же предположении σ легко найти по e, а именно из уравнения

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\rho}{a} \frac{\partial e}{\partial t}.$$

В том, что это уравнение выполняется при $\rho = a$, нас убеждает уравнение (12), а в том, что величина σ пропорциональна ρ, — уравнение (11). Действительно,

умножая уравнение (11) на $\rho d\rho$, интегрируя и учитывая, что u и ε не зависят от ρ, получаем

$$\sigma = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right) + \frac{\text{const}}{\rho}.$$

Постоянную интегрирования следует положить равной нулю, так как σ при $\rho=0$ должна обращаться не в бесконечность, а в нуль, поскольку на оси провода направление тока должно совпадать с направлением оси.

Решение уравнений (14) и (15) было получено в неоднократно упоминавшейся предыдущей работе для случая, к которому мы приближаемся тем точнее, чем меньше сопротивление провода. Я доказал, что электричество распространяется по проводам так же, как волна по натянутой струне, причем со скоростью света в пустом пространстве. Представляет интерес рассмотреть противоположный случай, к которому мы приближаемся тем точнее, чем больше сопротивление провода. Проанализируем его в предположении, что оба конца провода соединены.

Как и в предыдущей работе, обозначим сопротивление провода через r и введем обозначение $\gamma = \ln (l/\alpha)$, тогда при любом значении r решениями дифференциальных уравнений (14) и (15) служат функции

$$E = \sum [(C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t}) \sin nx + (C_1' e^{-\lambda_1 t} + C_2' e^{-\lambda_2 t}) \cos nx],$$
$$i = \sum \left[-\frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{-\lambda_2 t}) \cos nx + \frac{1}{2n} (\lambda_1 C_1' e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2' e^{-\lambda_2 t}) \sin nx \right],$$

где n — число, кратное $2\pi/l$; λ_1 и λ_2 имеют значения

$$\frac{c^2 r}{32\gamma l}\left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}} nl\right)^2}\right];$$

C_1, C_2, C_1', C_2' — произвольные постоянные, а суммирование проводится по всем n. Постоянные C нетрудно найти, если E и i заданы при $t=0$. Действительно, если E и i при $t=0$ представить как функции от x в виде

$$\sum (E_n \sin nx + E_n' \cos nx)$$

и

$$\sum (-i_n \cos nx + i_n' \sin nx),$$

то получаются уравнения

$$E_n = C_1 + C_2, \qquad i_n = (1/2n)(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2)$$

и

$$E_n' = C_1' + C_2', \qquad i_n' = (1/2n)(\lambda_1 C_1' + \lambda_2 C_2').$$

Решая их, находим

$$C_1 = \frac{\lambda_2 E_n - 2n i_n}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad C_2' = \frac{-\lambda_1 E + 2n i_n}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$C_1' = \frac{\lambda_2 E_n' - 2ni_n'}{\lambda_2 - \lambda_1}, \qquad C_2' = \frac{-\lambda_1 E_n' + 2ni_n}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

В предыдущей работе был рассмотрен случай, когда величина

$$\frac{32\gamma}{cr\sqrt{2}}$$

может считаться бесконечно большой. Предположим теперь, что эта величина бесконечно мала. Тогда оба корня λ_1 и λ_2 вещественны. Если λ_2 — бóльший из двух корней, то, пренебрегая членами высших порядков, получаем

$$\lambda_2 = \frac{c^2 r}{16\gamma l}, \qquad \lambda_1 = \frac{8\gamma l}{r} n^2,$$

откуда

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left(\frac{16\gamma}{cr\sqrt{2}} nl\right)^2.$$

Эта величина бесконечно мала, так как число nl кратно 2π, т. е. конечно, что позволяет записать выражения для постоянных C в виде

$$C_1 = E_n - \frac{2n}{\lambda_2} i_n, \qquad C_1' = E_n' - \frac{2n}{\lambda_2} i_n',$$

$$C_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n + \frac{2n}{\lambda_2} i_n, \qquad C_2' = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} E_n' + \frac{2n}{\lambda_2} i_n.$$

Следовательно, коэффициент при $\sin nx$ в выражении для E равен

$$E_n\left(e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}\right) - \frac{2n}{\lambda_2} i_n \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right),$$

или

$$E_n e^{-\lambda_1 t} - \frac{2n}{\lambda_2} i_n \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right),$$

а коэффициент при $-\cos nx$ в выражении для i —

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) - i_n\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right).$$

Отсюда, подставляя вместо E_n и i_n соответственно E_n' и i_n', получаем коэффициенты при $\cos nx$ в выражении для E и при $\sin nx$ в выражении для i. Если исключить случай, когда начальное значение i бесконечно велико по сравнению со значением, принимаемым i при неизменном E и начальном значении $i=0$, то полученное выражение удается упростить. Действительно, из него следует, что если $i=0$ при $t=0$, т. е. если $i_n=0$, то i по порядку величины сравнимо с $E_n\ (\lambda_1/2n)$.

Это означает, что если $i=0$ при $t=0$, то i_n по порядку величины сравнимо с $E_n\ (\lambda_1/2n)$ и коэффициенты при $\sin nx$ в выражении для E и при $-\cos nx$ в выражении для i можно записать в виде

$$E_n e^{-\lambda_1 t}$$

и

$$E_n \frac{\lambda_1}{2n} e^{-\lambda_1 t} + \left(i_n - E_n \frac{\lambda_1}{2n}\right) e^{-\lambda_2 t}.$$

Если исключить из рассмотрения те значения t, которые столь малы, что произведение $\lambda_1 t$ бесконечно мало, то произведение $\lambda_2 t$ будет бесконечно большим, и поэтому вторым членом в последнем выражении можно пренебречь по сравнению с первым членом. Поскольку эти соображения применимы и к коэффициентам при $\cos nx$ и $\sin nx$ в выражениях для E и i, то эти выражения, если вместо λ_1 подставить полученное выше значение, принимают следующий вид:

$$E = \sum (E_n \sin nx + E'_n \cos nx)\, e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t}, \tag{16}$$

$$i = \frac{4\gamma l}{r} \sum n(-E_n \cos nx + E'_n \sin nx)\, e^{-\frac{8\gamma l}{r} n^2 t}. \tag{17}$$

Оба этих выражения не зависят от c. Это решения дифференциальных уравнений, которые получаются из уравнений (14) и (15), если считать, что c — бесконечно большая величина, т. е. дифференциальных уравнений

$$i = -\frac{4\gamma l}{r}\frac{\partial E}{\partial x}, \qquad \frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

Исключая из них i, получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{8\gamma l}{r}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

Уравнение такого же вида описывает теплопроводность. Следовательно, в рассматриваемом нами случае электричество распространяется так же, как тепло в случае теплопроводности.

Апостериори нетрудно доказать, что выражения (16) и (17) при принятом предположении относительно сопротивления r действительно задают решения дифференциальных уравнений (16) и (17). Действительно, мы легко убеждаемся в том, что при таком предположении $4/c^2 \partial i/\partial t$ — бесконечно малая величина по сравнению с производной $\partial E/\partial x$, если вместо i и E подставить их выражения (17) и (18).

Аналогично тому, как мы рассматривали случай замкнутого провода, удается рассмотреть и случай, когда концы провода разомкнуты и потенциал на них имеет два постоянных значения. В этом случае, если сопротивление провода достаточно велико (а мы предполагаем, что это так), между распространением электричества и тепла в случае теплопроводности имеет место такая же аналогия, как и в рассмотренном выше случае.

Для эталона сопротивления Якоби (медной проволоки длиной 7,62 м и радиусом 0,333 мм), как показано в нашей предыдущей работе,

$$32\gamma/rc\sqrt{2} = 2070.$$

Для провода из того же материала того же поперечного сечения длиной 1000 км та же величина составляет 0,034. В первом случае ее можно приближенно считать бесконечно большой, а во втором — бесконечно малой. В первом случае электричество распространяется, как волна по натянутой струне, во втором — как тепло в случае теплопроводности.

Томсон [4] исследовал движение электричества в подводном телеграфном кабеле [[2]]. Он исходил из предположения, обоснованность которого не была им доказана, что индукция не оказывает заметного влияния на распространение электричества, и доказал, что движение электричества аналогично распространению тепла при теплопроводности. Как показывают приведенные нами соображения, такое предположение выполняется даже для простого провода, если только длина его достаточно велика, и тем более справедливо для подводного кабеля, в котором движение электричества из-за электропроводности морской воды значительно замедляется.

21.
К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ПО ПОДВОДНЫМ ИЛИ ПОДЗЕМНЫМ ТЕЛЕГРАФНЫМ ПРОВОДАМ *

Еще в 1855 г. сэр Вильям Томсон, исходя из гипотезы, согласно которой в телеграфном проводе, проложенном по дну моря или под землей, влияние индукции, возникающей вследствие изменений сил токов, пренебрежимо мало по сравнению с изменениями зарядов, вывел теорему о том, что электричество распространяется по подводному или подземному проводу так же, как тепло в стержне. В настоящей работе я позволю себе представить Академии вывод теоремы Томсона, основанный на той же гипотезе, но исходящий из более общих принципов, и присовокупить к докладу несколько формул, ранее насколько мне известно, не опубликованных.

В основу вычислений положены допущения, сформулированные Гельмгольцем в его работе в томе 82 журнала Борхардта [[1]]. Речь идет о системе соприкасающихся покоящихся проводников, каждый из которых однороден. Проводники отличаются электропроводностью и диэлектрической поляризуемостью. На контактных поверхностях проводников могут быть сосредоточены постоянные электрические разности. Пусть x, y, z — прямоугольные координаты точки в одном из проводников; u, v, w — компоненты плотности тока; α, β, γ — компоненты электрического момента, отнесенного к единице объема, во время t; λ — электропроводность; k — постоянная, характеризующая диэлектрическую поляризуемость проводника. Тогда

---

[4] *Thomson W.* // Phil. Mag. 1856. Vol. 2 (4). P. 157.

* Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1877. Oct. Перевод Ю. А. Данилова по изданию: *Kirchhoff G.* Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 182—193.

$$\begin{aligned} u &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \alpha &= -k \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \beta &= -k \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w &= -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & \gamma &= -k \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

где φ — электростатический потенциал, зависящий от x, y, z и t. Его допустимо считать состоящим из трех частей. Первая часть связана со свободным электричеством, находящимся частично внутри проводника, частично на его поверхности. Вторая часть связана с диэлектрической поляризацией. И, наконец, третья часть обусловлена двойными электрическими слоями, находящимися на контактных поверхностях неоднородных проводников, между которыми существуют электрические разности.

Обозначим эти три составляющие электростатического потенциала через U, V и W. Выражения для них мы получим, обозначив через ε плотность свободного электричества внутри проводника, через e — плотность свободного электричества в точке (x, y, z) на поверхности проводника в момент времени t, через ε' и e' — аналогичные величины для другой точки (x', y', z'), через $d\tau'$ — элемент объема, через ds' — элемент поверхности, которому принадлежит точка (x', y', z') и через r — расстояние между точками (x, y, z) и (x', y', z'). В этих обозначениях

$$U = \int \frac{d\tau'}{r} \varepsilon' + \int \frac{ds}{r} e',$$

где интегрирование проводится по всему пространству и всем поверхностям, где находится свободное электричество. В тех же обозначениях

$$V = \int d\tau' \left(\alpha' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right)$$

и, наконец,

$$W = \int ds' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} h',$$

где ds' — элемент поверхности, на котором сосредоточена электрическая разность; n' — нормаль к ds'; $4\pi h'$ — величина разности.

Из смысла величин u, v, w, ε следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}.$$

Припишем величинам, относящимся к первому проводнику, индекс 1, величинам, относящимся ко второму проводнику, индекс 2 и обозначим нормали к элементу контактной поверхности, обращенные внутрь первого и второго проводника, через n_1 и n_2. Тогда

$$u_1 \cos(n_1x) + v_1 \cos(n_1y) + w_1 \cos(n_1z) + u_2 \cos(n_2x) + \\ + v_2 \cos(n_2y) + w_2 \cos(n_2z) = -\partial e/\partial t.$$

Подставив в два последних уравнения выражения для u, v, w из (1), получим

$$\lambda\Delta\varphi = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \tag{2}$$

и

$$\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = \frac{\partial e}{\partial t}. \tag{3}$$

Из выведенных соотношений нетрудно составить дифференциальное уравнение в частных производных и граничные условия, содержащие только неизвестную функцию φ. Для этого рассмотрим каждую из трех компонент потенциала φ в отдельности. Из выражения для U следует, что

$$\Delta U = -4\pi\varepsilon$$

и, кроме того, что функция U всюду непрерывна, а ее производные по x, y и z на контактной поверхности двух различных проводников претерпевают разрыв, причем такой, для которого выполняется соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} = -4\pi e.$$

Интегрируя по частям выражение, выведенное для V, преобразуем его к виду

$$V = -\int \frac{d\tau'}{r}\left(\frac{\partial\alpha'}{\partial x'} + \frac{\partial\beta'}{\partial y'} + \frac{\partial\gamma'}{\partial z'}\right) - \int \frac{ds'}{r}(\alpha' \cos(n'x) + \beta' \cos(n'y) + \gamma' \cos(n'z)),$$

где ds' — элемент поверхности любого из проводников; n' — нормаль к ds', направленная внутрь этого проводника. Следовательно, функция V удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = 4\pi\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right),$$

всюду непрерывна, а ее производные терпят на контактной поверхности второго проводника разрыв, причем такой, что выполняется соотношение

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = 4\pi(\alpha_1 \cos(n_1x) + \beta_1 \cos(n_1y) + \gamma_1 \cos(n_1z) + \\ + \alpha_2 \cos(n_2x) + \beta_2 \cos(n_2y) + \gamma_2 \cos(n_2z)).$$

С учетом (1) мы получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\Delta V = -4\pi k\Delta\varphi$$

и граничное условие

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = -4\pi\left(k_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right).$$

Наконец, как показывает выражение для W, эта функция удовлетворяет уравнению

$$\Delta W = 0,$$

терпит разрыв на поверхности второго проводника, причем так, что выполняется соотношение

$$W_1 - W_2 = -4\pi h,$$

а производные от W непрерывны, и поэтому

$$\frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0.$$

Поскольку

$$\varphi = U + V + W,$$

для φ получаем уравнение

$$\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon - 4\pi k \Delta\varphi.$$

Дифференцируя по t, преобразуем это уравнение (с учетом (2)) к виду

$$(1 + 4\pi k)\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} + 4\pi\lambda\Delta\varphi = 0, \qquad (4)$$

а на поверхности второго проводника будут выполняться соотношения

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -4\pi h \qquad (5)$$

и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = -4\pi e - 4\pi\left(k_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + k_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right).$$

Последнее соотношение при дифференцировании по t переходит (с учетом (3)) в следующее:

$$(1 + 4\pi k_1)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + (1 + 4\pi k_2)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} + 4\pi\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + 4\pi\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = 0. \qquad (6)$$

Итак, мы получили для φ дифференциальное уравнение с частными производными (4) и два граничных условия (5) и (6). Специальные предположения позволяют упростить граничные условия.

Если φ_0 — значение, принимаемое φ при $t=0$, то, как следует из (4):

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 e^{-\frac{4\pi\lambda}{1+4\pi k}t},$$

где e — основание натуральных логарифмов. Следовательно, величина $\Delta\varphi$ равна нулю *при любых* t, если она равна нулю при $t=0$, т. е. при каком-то *одном* значении t. Уравнение $\Delta\varphi=0$ эквивалентно уравнению $\varepsilon=0$ в силу соотношения между $\Delta\varphi$ и ε, использованного при выводе уравнения (4). Предполагается, что в некоторый момент времени внутри рассматриваемых проводников нет

свободного электричества. Это означает, что свободного электричества нет нигде, и вместо (4) мы получаем дифференциальное уравнение с частными производными

$$\Delta\varphi = 0.$$

Кроме того, можно предположить, что в рассматриваемой системе электрические разности не существенные, т. е. что величины h равны нулю. Тогда соотношение (5) заменится условием непрерывности φ во всем пространстве. Кроме этого, должно выполняться уравнение (6), которое, если положить

$$\frac{1 + 4\pi k}{4\pi} = \mu$$

и, следовательно, обозначить через $4\pi\mu$ так называемую диэлектрическую постоянную, переходит в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2}\right) + \lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = 0.$$

Предположив, что зависимость φ от t включает в себя множитель $e^{\nu t}$, где ν — некоторая постоянная, преобразуем наше уравнение к виду

$$(\lambda_1 + \nu\mu_1)\frac{\partial\varphi}{\partial n_1} + (\lambda_2 + \nu\mu_2)\frac{\partial\varphi}{\partial n_2} = 0.$$

Примем такое предположение и выберем постоянную ν мнимой. Тогда потенциал φ станет комплексным, но его вещественная часть есть вещественное решение уравнений (4) и (6), удовлетворяющее условию (5), так как эти уравнения и условие линейны, однородны и содержат только вещественные коэффициенты. Пусть система проводников устроена так, что все контактные поверхности различных проводников имеют форму круговых цилиндров с общей осью, совпадающей с осью z, и пусть φ зависит только от t, z и ρ, где

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение с частными производными для φ имеет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0,$$

а граничные условия сводятся к утверждению, что

$$\varphi \quad \text{и} \quad (\lambda + \nu\mu)\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}$$

непрерывны на контактных поверхностях. Решение этого дифференциального уравнения с частными производными, удовлетворяющее граничным условиям, мы получим, предположив, что потенциал φ представим в виде произведения экспонент $e^{\pm imz}$ и некоторой величины, не зависящей от z, где $i=\sqrt{-1}$, m — постоянная с положительной вещественной частью. В этом случае должно выполняться дифференциальное уравнение с частными производными

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}-m^2\varphi=0,$$

которому мы удовлетворим, выбрав

$$\varphi=e^{\nu t\pm imz}(AP(m\rho)+BQ(m\rho)), \tag{7}$$

где A и B — произвольные постоянные, значения которых могут изменяться от проводника к проводнику, а P и Q определяются разложениями

$$P(x)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{(2\cdot 4)^2}+\ \ldots,$$

$$Q(x)=-P(x)\left(\ln\frac{x}{2}+0,\ 577\ \ldots\right)+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4\left(1+\frac{1}{2}\right)}{(2\cdot 4)^2}+\ \ldots.$$

Определение $Q(x)$ следует дополнить замечанием о том, что входящий в разложение логарифм $\ln(x/2)$ должен быть вещественным при вещественных и положительных x и непрерывно зависеть от x. Тогда функция $Q(x)$ будет однозначно определена при всех значениях x, входящих в (7), так как вещественная часть m остается всегда положительной. При этом $Q(m\rho)$ обращается в нуль при $\rho=\infty$, при $\rho=0$ функция $Q(m\rho)$ обращается в бесконечность. Наоборот, функция $P(m\rho)$ остается конечной при $\rho=0$ и обращается в бесконечность при $\rho=\infty$.

Специализируем рассматриваемый случай. Пусть имеются лишь три проводника: медный провод радиуса ρ_1, оболочка из гуттаперчи наружнего радиуса ρ_2 и вне ее неограниченно простирающаяся масса воды. Припишем медному проводу индекс 1, воде индекс 2, а величины, относящиеся к гуттаперчевой оболочке, условимся оставлять без индекса. В силу упоминавшихся выше свойств функций P и Q должны выполняться равенства

$$B_1=0 \quad \text{и} \quad A_2=0,$$

а условия непрерывности, если обозначить

$$dP/dx=P'(x), \qquad dQ/dx=Q'(x),$$

имеют вид

$$AP(m\rho_1)+BQ(m\rho_1)=A_1P(m\rho_1),$$
$$AP(m\rho_2)+BQ(m\rho_2)=B_2Q(m\rho_2),$$
$$(\lambda+\nu\mu)(AP'(m\rho_1)+BQ'(m\rho_1))=(\lambda_1+\nu\mu_1)A_1P'(m\rho_1),$$
$$(\lambda+\nu\mu)(AP'(m\rho_2)+BQ'(m\rho_2))=(\lambda_2+\nu\mu_2)B_2Q'(m\rho_2).$$

Следовательно, определитель

$$\begin{vmatrix} \lambda+\nu\mu-\lambda_1-\nu\mu_1, & (\lambda+\nu\mu)\dfrac{Q'(m\rho_1)}{P'(m\rho_1)}-(\lambda_1+\nu\mu_1)\dfrac{Q(m\rho_1)}{P(m\rho_1)} \\ (\lambda+\nu\mu)\dfrac{P'(m\rho_2)}{Q'(m\rho_2)}-(\lambda_2+\nu\mu_2)\dfrac{P(m\rho_2)}{Q(m\rho_2)}, & \lambda+\nu\mu-\lambda_2-\nu\mu_2 \end{vmatrix}$$

обращается в нуль. Модуль числа ν может быть настолько малым, что числом ν допустимо пренебречь по сравнению с λ_1 и λ_2. Так как μ, μ_1 и μ_2 — не очень большие числа и λ можно считать бесконечно малой величиной по сравнению с λ_1 и λ_2, мы получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & (\lambda+\nu\mu)\frac{Q'(m\rho_1)}{P'(m\rho_1)}-\lambda_1\frac{Q(m\rho_1)}{P(m\rho_1)} \\ (\lambda+\nu\mu)\frac{P'(m\rho_2)}{Q'(m\rho_2)}-\lambda_2\frac{P(m\rho_2)}{Q(m\rho_2)}, & \lambda_2 \end{vmatrix}=0.$$

Предположим теперь, что модуль числа $m\rho_1$, так же как и $m\rho_2$, можно считать бесконечно малым (как показывают вычисления, такие m существуют). Если положить для краткости

$$\frac{1}{2}e^{0,577\ldots}=\gamma,$$

то принятое нами предположение приводит к следующим значениям P, Q, P' и Q':

$$P(m\rho_1)=1, \qquad P'(m\rho_1)=\frac{m\rho_1}{2},$$

$$Q(m\rho_1)=-\ln\gamma m\rho_1, \qquad Q'(m\rho_1)=-\frac{1}{m\rho_1},$$

$$P(m\rho_2)=1, \qquad P'(m\rho_2)=\frac{m\rho_2}{2},$$

$$Q(m\rho_2)=-\ln\gamma m\rho_2, \qquad Q'(m\rho_2)=-\frac{1}{m\rho_2}.$$

Соотношение между ν и m принимает вид уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda_1, & (\lambda+\nu\mu)\frac{2}{m^2\rho_1^2}-\lambda_1\ln\gamma m\rho_1 \\ (\lambda+\nu\mu)\frac{m^2\rho_2^2}{2}-\frac{\lambda_2}{\ln\gamma m\rho_2}, & \lambda_2 \end{vmatrix}=0,$$

или, поскольку величина $(\lambda+\nu\mu)\,m^2\rho_2^2/2$ бесконечно мала по сравнению с $\lambda_2/\ln\gamma\,m\rho_2$,

$$\lambda+\nu\mu+\lambda_1\frac{m^2\rho_1^2}{2}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}=0. \tag{8}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как уравнение, возникающее в теории теплопроводности в стержне, откуда и следует упоминавшаяся во введении теорема Томсона.

Внутри провода с точностью до бесконечно малых выполняется равенство

$$P(m\rho)=1,$$

поэтому (см. (7))

$$\varphi=Ae^{\nu t\pm imz},$$

где A — постоянная, обозначенная ранее через A_1, или, если B — новая постоянная,

$$\varphi = Ae^{\nu t + imz} + Be^{\nu t - imz}.$$

Если положить $\nu = in$, где n — вещественная положительная величина, то φ можно представить в виде

$$\varphi = Ae^{i(nt+mz)} + Be^{i(nt-mz)}. \tag{9}$$

Вещественный потенциал, удовлетворяющий наложенным на φ условиям, мы получим из этого комплексного решения, положив

$$m = \alpha - i\beta, \quad A = C - iC', \quad B = D - iD',$$

где число α должно быть положительным как вещественная часть m, и выбрав в качестве φ вещественную часть выражения, стоящего в правой части (9):

$$\varphi = e^{\beta z}[C\cos(nt+\alpha z) + C'\sin(nt+\alpha z)] + \\ + e^{-\beta z}[D\cos(nt-\alpha z) + D'\sin(nt-\alpha z)]. \tag{10}$$

Это выражение описывает два цуга волн, один из которых распространяется в сторону положительной полуоси z, а другой в противоположном направлении со скоростью n/α. Высота каждой из волн убывает по мере удаления в отношении, зависящем от β. Длина периода φ по времени составляет $2\pi/n$. Для определения α и β из (8) получаем уравнения

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{2\lambda}{\lambda_1\rho_1^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}},$$

$$\beta\alpha = \frac{n\mu}{\lambda_1\rho_1^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Второе из них показывает, что если число β положительно, то α также положительно. Если электропроводность гуттаперчи λ равна нулю, то

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{n\mu}{\lambda_1\rho_1^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}}.$$

Если λ возрастает от нуля, то одна из величин α и β в силу второго уравнения возрастает, а другая убывает. Из первого уравнения следует, что возрастает β, а убывает α. Таким образом, чем больше электропроводность гуттаперчи, тем больше скорость распространения волн, но тем быстрее убывает и высота волн по мере их удаления. Если величина λ очень мала по сравнению с n, то

$$\alpha = \sqrt{\frac{n\mu}{\lambda_1^2\rho_1^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}}\left(1 - \frac{\lambda}{2n\mu}\right), \qquad \beta = \sqrt{\frac{n\mu}{\lambda_1^2\rho_1^2 \ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}}\left(1 + \frac{\lambda}{2n\mu}\right).$$

Если провод можно считать неограниченным в направлении положительной полуоси z, то постоянные C и C' в (10) следует положить равными нулю, чтобы потенциал φ не обращался в бесконечность внутри провода. Если, кроме того,

$$\varphi = \cos nt \quad \text{при} \quad z = 0, \tag{11}$$

то из (10) следует, что

$$\varphi = e^{-\beta z} \cos (nt - \alpha z).$$

Рассмотрим еще случай, когда условие (11) выполняется, но провод простирается только до $z=l$ и его конец присоединен к обкладке конденсатора, другая обкладка которого соединена с землей хорошим проводником. Если c — емкость конденсатора, то при $z=l$ должно выполняться соотношение

$$c\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\pi\rho_1^2\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{12}$$

так как

$$J = -\pi\rho_1^2\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{13}$$

где J — сила тока в любом сечении провода.

Потребуем, чтобы комплексный потенциал φ удовлетворял условию (12) и еще одному условию, состоящему в том, что

$$\varphi = e^{int} \quad \text{при} \quad z = 0. \tag{14}$$

Тогда вещественная часть φ будет иметь вид (10) и удовлетворять условиям (11) и (12). Полагая

$$\frac{cn}{\pi\rho_1^2\lambda_1} = \gamma,$$

находим из (12) и (14) соотношения для входящих в (9) постоянных A и B:

$$A(\gamma + m)e^{iml} + B(\gamma - m)e^{-iml} = 0,$$
$$A + B = 1.$$

Вычислив значения A и B и подставив их в (9), получим

$$\varphi = e^{int}\frac{(\gamma + m)e^{im(l-z)} - (\gamma - m)e^{-im(l-z)}}{(\gamma + m)e^{iml} - (\gamma - m)e^{-iml}}.$$

Особый интерес представляет знание силы тока J. Из (13) следует, что J совпадает с вещественной частью выражения

$$e^{int}\pi\rho_1^2\lambda_1 im\frac{(\gamma + m)e^{im(l-z)} + (\gamma - m)e^{-im(l-z)}}{(\gamma + m)e^{iml} - (\gamma - m)e^{-iml}}$$

которое представимо в виде

$$e^{int}a(\cos\delta + i\sin\delta),$$

где число a должно быть положительным. Следовательно,

$$J = a\cos(nt + \delta).$$

Обе величины — a и δ (амплитуда и фаза силы тока) — можно найти следующим образом. Пусть

$$(\gamma + m)\,e^{im(l-z)} + (\gamma - m)\,e^{-im(l-z)} = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$
$$(\gamma + m)\,e^{iml} - (\gamma - m)\,e^{-iml} = N(\cos\eta + i\sin\eta),$$

т. е.

$$M\cos\vartheta = e^{\beta(l-z)}\left((\gamma+\alpha)\cos\alpha(l-z) + \beta\sin\alpha(l-z)\right) + $$
$$+ e^{-\beta(l-z)}\left((\gamma-\alpha)\cos\alpha(l-z) + \beta\sin\alpha(l-z)\right),$$
$$M\sin\vartheta = e^{\beta(l-z)}\left((\gamma+\alpha)\sin\alpha(l-z) - \beta\cos\alpha(l-z)\right) - $$
$$- e^{-\beta(l-z)}\left((\gamma-\alpha)\sin\alpha(l-z) - \beta\cos\alpha(l-z)\right),$$
$$N\cos\eta = e^{\beta l}\left((\gamma+\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\right) - e^{-\beta l}\left((\gamma-\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\right),$$
$$N\sin\eta = e^{\beta l}\left((\gamma+\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\right) + e^{-\beta l}\left((\gamma-\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\right)$$

(M и N, по предположению, положительны). Тогда

$$a = \pi\rho_1^2\lambda_1(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}M/N,$$
$$\delta = \operatorname{arc\,tg}(\alpha/\beta) + \vartheta - \eta,$$

где арктангенс надлежит выбирать в первой четверти. M и ν зависят от z, в то время как все остальные величины, входящие в выражения для a и δ, от z не зависят. При $z = l$

$$M = 2\gamma, \qquad \vartheta = 0,$$

при $z = 0$

$$M\cos\vartheta = e^{\beta l}\left((\gamma+\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\right) + e^{-\beta l}\left((\gamma-\alpha)\cos\alpha l + \beta\sin\alpha l\right),$$
$$M\sin\vartheta = e^{\beta l}\left((\gamma+\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\right) - e^{-\beta l}\left((\gamma-\alpha)\sin\alpha l - \beta\cos\alpha l\right).$$

Если емкость конденсатора и, следовательно, γ бесконечно велики, то мы имеем дело с таким же случаем, как если бы конец провода $z = l$ был соединен хорошим проводником с землей. Величины M и N умножаются на γ. Этот множитель можно отбросить, не нарушив выражений для a и δ, так как в последние входит только отношение M/N, и получить следующие выражения:

$$M\cos\vartheta = \left(e^{\beta(l-z)} + e^{-\beta(l-z)}\right)\cos\alpha(l-z),$$
$$M\sin\vartheta = \left(e^{\beta(l-z)} - e^{-\beta(l-z)}\right)\sin\alpha(l-z),$$
$$N\cos\eta = \left(e^{\beta l} - e^{-\beta l}\right)\cos\alpha l,$$
$$N\sin\eta = \left(e^{\beta l} + e^{-\beta l}\right)\sin\alpha l.$$

V

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

22.
О РАВНОВЕСИИ И ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ *

Первую попытку построить теорию поперечных колебаний упругих мембран предприняла Софи Жермен [1]. В 1811 г. она представила Парижской академии, назначившей большую премию за лучшую работу по теории упругих мембран, мемуар с изложением гипотезы о силах, которые возникают в мембране, сопротивляющейся изменению формы, и на основе своей гипотезы вывела дифференциальное уравнение в частных производных для колебаний мембраны.

В своих вычислениях С. Жермен допустила ошибку. Лагранж, бывший членом комиссии, специально утвержденной для рассмотрения работы Жермен, вывел дифференциальное уравнение, к которому должны были бы привести вычисления, если бы в них не вкралась ошибка. Это уравнение и поныне считается правильным. Однако отсутствовали граничные условия, без которых невозможно однозначно задать решение дифференциального уравнения в частных производных. Софи Жермен вывела их из той же гипотезы в своем втором мемуаре, представленном в Академию через два года.

Найденные ею граничные условия были такого рода, что позволили автору мемуара получить решение задачи для случая прямоугольной мембраны. Полученные результаты Жермен сравнила с экспериментом и обнаружила совпадение, которое, казалось бы, подтверждало ее гипотезу. В третьем мемуаре, представленном Академии в 1815 г., Жермен обобщила свою гипотезу, так, что сумела вывести из нее теорию колебаний пластин, искривленных в своем естественном состоянии. Жермен удалось произвести расчет для цилиндрически изогнутых пластин. И в этом случае полученные ею результаты оказались в согласии с экспериментальными данными.

Все три мемуара Софи Жермен не опубликованы. Основное содержание их и результаты дальнейших исследований Жермен изложила в двух статьях. Первая из них под названием «Исследования по теории упругих поверхностей» вышла в свет в 1821 г. в Париже, вторая под названием «Замечания о природе, границах и обширности вопроса об упругих поверхностях и общем уравнении таких поверхностей» была опубликована там же в 1826 г.

Несмотря на подтверждения, полученные теорией Софи Жермен из эксперимента, эта теория неверна: некоторые следствия из нее находятся в явном противоречии с действительностью. Чтобы продемонстрировать это, я ограничусь рассмотрением пластины, плоской в естественном состоянии. Рассуждения, с помощью которых Софи Жермен приходит к своим утверждениям относительно изменения формы пластины под действием внешних сил и совершаемых пластиной колебаний, по существу, сводятся к следующему.

---

* Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // Ges. Abhandl. Leipzig: Johannes Ambrosius Barth, 1882. S. 237—279. Перевод Ю. А. Данилова.

В каждом элементе деформированной пластины возникает сила, стремящаяся вернуть элементу его первоначальную форму. Условие равновесия пластины состоит в равенстве нулю суммы момента всех сил, возникших в пластине, и момента приложенных к пластине внешних сил. Пусть ε — толщина пластины, df — элемент ее средней поверхности. Сила, возникающая в элементе εdf, тем больше, чем больше различие между формой элемента df после деформации и его первоначальной формой. Если бы мы располагали подходящей мерой этого различия, то можно было бы предположить, что сила, возникающая в элементе при деформации, пропорциональна различию в форме до и после деформации. Пусть u — такая мера. Тогда силу можно принять равной $N^2 u df$, где N^2 — постоянная, зависящая от толщины и природы пластины. Эта сила стремится уменьшить u. Ее момент равен поэтому — $N^2 u \delta u df$, где δu — виртуальное изменение u.

Те же соображения применимы и в случае упругого стержня, но правильные уравнения мы получим, если положим u равной величине, обратной радиусу кривизны средней линии стержня. В соответствии с этим Софи Жермен считала, что в случае мембраны u можно принять равной сумме величин, обратных главным радиусам кривизны средней поверхности. Если ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны, то момент силы, возникающей в элементе мембраны, равен

$$-N^2\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\delta\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)df,$$

а в качестве условия равновесия пластины мы получаем уравнение

$$\delta P - N^2\int\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)\delta\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)df = 0,$$

если δP — момент приложенных к пластине внешних сил.

Покажем, что это условие не может быть правильным, и для этого обратимся к случаю, когда мембрана деформирована бесконечно мало силами, действующими внутри ортогонально ее средней поверхности. Край пластины для простоты будем считать свободным. Пусть средняя поверхность первоначально совпадает с плоскостью xy прямоугольной системы координат; z — перемещение точки (x, y) средней поверхности в перпендикулярном направлении; Z — сила, действующая на пластину в направлении оси z вдоль прямой, проходящей через точку (x, y). Тогда, если

$$u = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

то условие равновесия приводит к дифференциальному уравнению в частных производных для u

$$N^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = Z$$

и граничным условиям

$$u = 0, \qquad \partial u/\partial n = 0,$$

где n — нормаль к краю средней поверхности. Но решение дифференциального уравнения полностью определяется первым граничным условием, поэтому в об-

щем случае невозможно найти такую функцию u, которая бы удовлетворяла еще и второму граничному условию. Следовательно, в общем случае для пластины не существует равновесия. Если бы силы Z были такими, при которых мы могли бы найти функцию u, удовлетворяющую обоим граничным условиям, то, чтобы найти форму средней поверхности, эту функцию u следовало бы подставить в дифференциальное уравнение для z и из него определить z. Но уравнению для z удовлеторяет бесконечно много функций, поэтому в этом случае для пластины существовало бы бесконечно много положений равновесия. Так произошло бы, например, если бы внешних сил Z не было. Если пластине придать любую форму, при которой выполняется уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

и предоставить себе, то она должна оставаться в этом положении, не обнаруживая стремления обрести первоначальную форму. Таким образом, из условия равновесия следует, что пластина, хотя она и обладает конечными кривизнами, может в отсутствие внешних сил находиться в состоянии равновесия, коль скоро для всех точек ее средней поверхности сумма величин, обратных главным радиусам кривизны, равна нулю.

Вторую теорию равновесия и движения упругих мембран создал Пуассон и изложил в своем знаменитом мемуаре «О равновесии и движении упругих тел» [1]. Однако и эта теория нуждается в обосновании. Именно такому обоснованию и посвящена настоящая работа. Применив свои общие уравнения равновесия упругих тел к случаю мембраны, Пуассон получил то же дифференциальное уравнение в частных производных, к которому приводила гипотеза Софи Жермен, но другие граничные условия, причем три граничных условия. Как будет доказано, этим условиям невозможно удовлетворить одновременно, из чего следует, что по теории Пуассона для пластин вообще не существует состояние равновесия. Доказательство этого утверждения будет приведено после вывода двух граничных условий, долженствующих заменить три граничных условия Пуассона, поскольку он, разумеется, придерживался тех соображений, из которых будут выведены граничные условия.

Пуассон применил свою теорию к круглой пластине, совершающей колебания так, что все точки, равноотстоящие от ее центра, всегда находятся в одном и том же состоянии. Пуассону удалось применить свою теорию потому, что в этом случае все три его граничных условия выполняются тождественно. Мне удалось вывести из модифицированной теории общие законы колебаний свободной круглой пластины. В том частном случае, о котором мы упоминали, я получил те же формулы, которые вывел Пуассон. Благодаря любезности Штрельке [[2]], предоставившего мне данные измерений относительно линий узлов круглых мембран, я смог сопоставить численные результаты теории с соответствующими результатами наблюдений.

§ 1. При выводе уравнений упругой пластины Пуассон исходил из соображений, относящихся к деформации упругого тела произвольной формы. Эти

[1] *Poisson S. D.* Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques // Mém. Acad. Sci. Paris, 1829. T. 8. P. 237.

уравнения можно свести к одному уравнению, означающему, что момент сил, вызвавших деформацию, равен вариации некоторого интеграла. По сравнению с уравнениями Пуассона это единственное уравнение обладает еще и тем преимуществом, что те выполняются лишь при бесконечно малых перемещениях, в то время как единое уравнение выполняется при условии, что растяжения и сжатия бесконечно малы. Уравнения Пуассона не выполняются, а единое уравнение остается в силе для бесконечно тонких стержней или пластин, которым приданы конечные кривизны. Это уравнение имеет следующий вид:

$$\delta P - \delta K \int dV \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \vartheta (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2\right) = 0, \qquad (1)$$

где δP — момент внешних сил; dV — объем элемента тела; λ_1, λ_2, λ_3 — главные коэффициенты растяжения этого элемента; интегрирование производится по всему телу; K и ϑ — две постоянные, от которых коэффициент упругости q зависит следующим образом:

$$q = 2K \frac{1 + 3\vartheta}{1 + 2\vartheta}.$$

Уравнение (1) получается из уравнений Пуассона при $\vartheta = 1/2$ и из уравнений, к которым Вертгейм [2] [[3]] пришел из эксперимента, при $\vartheta = 1$. Если обозначить через x, y, z прямоугольные координаты точки, в которой находится элемент dV в первоначальном состоянии тела, через u, v, w — перемещения этого элемента вдоль осей при деформации тела, через XdV, YdV, ZdV — силы, действующие на элемент dV по направлениям осей, через $d\vartheta$ — элемент поверхности тела и через $(X)\,d\vartheta$, $(Y)\,d\vartheta$, $(Z)\,d\vartheta$ — силы давления на поверхности тела по направлениям осей, то выражение для δP, подставляемое в уравнение (1), должно быть следующим:

$$\delta P = \int dV \,(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) + \int dO\,((X)\,\delta u + (Y)\,\delta v + (Z)\,\delta w), \qquad (2)$$

где первый интеграл берется по всему объему, а второй — по поверхности тела.

В том, что уравнение (1) при бесконечно малых u, v, w действительно переходит в известные уравнения для деформаций упругого тела, нетрудно убедиться при помощи следующих вычислений.

Пусть α, β, γ — косинус углов, образуемых с осями координат прямой, проходящей через точку (x, y, z). Коэффициент растяжения в направлении этой прямой для точки (x, y, z), который можно обозначить через λ, в предположении, что u, v, w и производные от них по x, y, z бесконечно малы, удовлетворяет уравнению

$$\lambda = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \beta\gamma \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \gamma\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \alpha\beta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Главные коэффициенты растяжений λ_1, λ_2, λ_3 — это значения λ при таких α, β, γ, при которых вариация $\delta\lambda$ обращается в нуль, т. е. корни уравнения

---

[2] *Wertheim G.* // Ann. chem. et phys. 1848. T. 23 (3). P. 52.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\lambda\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\lambda\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\lambda\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2=\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

и

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Подставим эти выражения для $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ и $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$ в уравнение (1) [3], записав его следующим образом:

$$\delta P-K\delta\Omega=0, \tag{3}$$

где

$$\Omega=\int dV\,(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\vartheta\,(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2). \tag{4}$$

Вариация $\delta\Omega$ состоит из трех частей, из которых первая зависит от δu, вторая — от δv, а третья — от δw. Их мы обозначим соответственно через δR, δS, δT. Тогда

$$\delta\Omega=\delta R+\delta S+\delta T \tag{5}$$

и

$$\delta R=\int dV\left\{\left(2\,(1+\vartheta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\vartheta\frac{\partial v}{\partial y}+2\vartheta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial\delta u}{\partial z}\right\}.$$

Подвергая u, v, w и одновременно x, y, z циклической перестановке, мы из выражения для δR получаем выражение для δS, а из выражения для δS — выражение для δT. Выражение для δR разложим на три интеграла: первый из них содержит под знаком интеграла множитель $\partial\delta u/\partial x$, второй — множитель

[3] Уравнение, возникающее в результате такой подстановки, приведено в слегка ином виде в работе Дж. Грина «О законах отражения и преломления света» (*Green G.* On The laws of the reflexion and refraction of light // Trans. Camb. Phil. Soc. 1842. Vol. 7. P. 1—24, 113—120). Оно выведено там иным способом, без рассмотрения главных коэффициентов растяжения.

$\partial\delta u/\partial y$ и третий — множитель $\partial\delta u/\partial z$. Применим к первому интегралу теорему, выражаемую равенством

$$\int dVF\frac{\partial G}{\partial x}=-\int dVG\frac{\partial F}{\partial x}-\int dOFG\cos(N,\ x),$$

где F и G — две произвольные функции от x, y, z; dV — элемент объема некоторой ограниченной части пространства; dO — элемент ее поверхности; $(N,\ x)$ — угол, образуемый с осью x нормалью, направленной внутрь ограниченной части пространства. Ко второму и третьему из интегралов, сумма которых равна δR, применим ту же теорему, заменив x соответственно на y или z. При этом каждый раз мы полагаем $G=\delta u$. Собирая вместе интегралы по dV и по dO, получаем

$$\delta R=-\int dV\left\{\left(2(1+\vartheta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\right.\right.$$
$$\left.+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right\}\delta u-\int dO\left\{\left(2(1+\vartheta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\vartheta\frac{\partial v}{\partial y}+2\vartheta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cos(N,\ x)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(N,\ y)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(N,\ z)\right\}\delta u.$$

Произведя соответствующие перестановки, имеем из выражения для δR выражения для δS и δT и, суммируя все три выражения, получим $\delta\Omega$ в силу соотношения (5). Подставляя полученное выражение для $\delta\Omega$, а также δP из (2), в уравнение (3) и собирая интегралы по объему и интегралы по поверхности (полагая в соответствии с принципами вариационного исчисления множители при δu, δv, δw под знаками обоих интегралов равными нулю), получим следующие уравнения.

Для точки внутри тела

$$K\left\{2(1+\vartheta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right\}+X=0,$$

$$K\left\{2(1+\vartheta)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right\}+Y=0,$$

$$K\left\{2(1+\vartheta)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+(1+2\vartheta)\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right\}+Z=0. \quad (6)$$

Для точки на поверхности

$$K\left\{\left[2(1+\vartheta)\frac{\partial u}{\partial x}+2\vartheta\frac{\partial v}{\partial y}+2\vartheta\frac{\partial w}{\partial z}\right]\cos(N,\ x)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(N,\ y)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(N,\ z)\right\}+(X)=0,$$

$$K\left\{\left[2(1+\vartheta)\frac{\partial v}{\partial y}+2\vartheta\frac{\partial w}{\partial z}+2\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}\right]\cos(N,\ y)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(N,\ z)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(N,\ x)\right\}+(Y)=0,$$

$$K\left\{\left[2(1+\vartheta)\frac{\partial w}{\partial z}+2\vartheta\frac{\partial u}{\partial x}+2\vartheta\frac{\partial v}{\partial y}\right]\cos(N,\ z)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(N,\ x)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(N,\ y)\right\}+(Z)=0.$$

Эти уравнения совпадают с теми, которые были выведены Коши без рассмотрения молекулярных сил. При $\vartheta=1/2$ они переходят в уравнения Пуассона, а при $\vartheta=1$ — в уравнения Вертгейма.

Обратимся теперь к выводу уравнения (1), из которого будет следовать, что оно выполняется и в тех случаях, когда утрачивают силу уравнения (6). Приводимые нами соображения аналогичны тем, которые неоднократно использует в своей механике Лагранж, например, при выводе условия равновесия упругого стержня.

Пусть dV — объем бесконечно малой части упругого тела, находящегося в своем естественном состоянии. Состояние же, в которое эта часть переходит при деформации, как известно, можно считать возникающим вследствие того, что рассматриваемая часть, не изменяя относительного расположения своих молекул, занимает новое положение в пространстве, после чего подвергается растяжению по трем взаимно перпендикулярным направлениям (растяжение равномерно по каждому направлению, но не одинаково по различным направлениям) [4]. Бесконечно малый шар при таком растяжении переходит в эллипсоид, оси которого совпадают с направлениями, по которым производятся растяжения.

Таким образом, растяжения по трем взаимно перпендикулярным направлениям — это главные растяжения λ_1, λ_2, λ_3. Упругость тела действует так, что рассматриваемая часть тела стремится сжаться по тем направлениям, по которым она растянута. Пусть L_1dV, L_2dV, L_3dV — силы, с которыми стремится сжаться рассматриваемая часть тела. Первая из этих сил действует так, чтобы уменьшить λ_1, вторая — чтобы уменьшить λ_2 и третья — чтобы уменьшить λ_3. Момент первой силы равен — $L_1dV\delta\lambda_1$, момент второй силы составляет $-L_2dV\delta\lambda_2$, момент третьей силы равен $-L_3dV\delta\lambda_3$, а полный момент всех трех сил

$$-\partial V\,(L_1\delta\lambda_1+L_2\delta\lambda_2+L_3\delta\lambda_3).$$

L_1, L_2, L_3 — функции от λ_1, λ_2, λ_3, относительно которых известно, что они обращаются в нуль одновременно с λ_1, λ_2, λ_3. Кроме этого, L_1 — симметрическая функция по λ_2 и λ_3 — должна быть такой же функцией от λ_1, λ_2, λ_3, как L_2 — от λ_2, λ_3, λ_1 и L_3 — от λ_3, λ_1, λ_2. Следовательно, L_1, L_2, L_3 при бесконечно малых λ_1, λ_2, λ_3 можно представить в виде[4]

$$L_1=a\lambda_1+b\lambda_2+b\lambda_3,\qquad L_2=b\lambda_1+a\lambda_2+b\lambda_3,\qquad L_3=b\lambda_1+b\lambda_2+a\lambda_3,$$

где a и b — величины, зависящие от природы тела. Если вместо a и b можно ввести две другие величины K и ϑ, связанные с ними соотношениями

$$a=2K(1+\vartheta),\quad b=2K\vartheta,$$

то для момента сил, возникающих в dV, мы получим выражение

$$-dV\delta K\,(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2+\vartheta\,(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2),$$

[4] Сжатие условимся называть отрицательным растяжением.

а для момента сил, возникающих во всем теле, — выражение

$$-\delta K \int dV\,(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \vartheta\,(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2).$$

В состоянии равновесия сумма этого момента и момента внешних сил должна быть равна нулю, что и утверждает уравнение (1).

§ 2. Перейдем теперь к рассмотрению пластинки. Будем предполагать, что в своем естественном состоянии она ограничена сверху и снизу двумя параллельными бесконечно близкими плоскостями, а сбоку — произвольной цилиндрической поверхностью, пересекающейся с этими плоскостями под прямым углом. Под действием внутренних сил и сил давления, приложенных к краю, пластинка претерпевает деформацию. Верхняя и нижняя поверхности пластинки свободны от нагружения. Действующие на пластинку силы, по предположению, таковы, что вызываемые ими растяжения можно считать бесконечно малыми. Это предположение отнюдь не означает, что кривизны пластинки бесконечно малы. Условимся пока считать, что кривизны пластинки конечны.

Примем теперь два предположения, которые позволят применить уравнение (1) к такой пластинке. Эти предположения можно считать экспериментальными фактами. Они полностью согласуются с гипотезами, принятыми Яковом Бернулли относительно упругого стержня. Итак, сформулируем эти предположения [5].

1. Каждая прямая в пластинке, первоначально перпендикулярная плоскостям, ограничивающим пластинку, после деформации остается прямой и перпендикулярна поверхностям, которые до деформации были граничными плоскостями.

2. Все элементы средней поверхности (т. е. поверхности, которая в естественном состоянии пластинки является плоскостью, параллельной граничным плоскостям и расположенной посредине между ними) при деформации не испытывают растяжения.

Эти два предположения позволяют в рассматриваемом нами случае выразить главные растяжения λ_1, λ_2, λ_3 через главные радиусы кривизны средней поверхности. Для этого воспользуемся следующими соображениями, применимыми и в случае упругого тела произвольной формы. В теле, находящемся в первоначальном состоянии, мысленно выделим бесконечно малый шар. Пусть a — один из диаметров этого шара, а A — перпендикулярная ему диаметральная плоскость. При деформации шар переходит в эллипсоид. Молекулы, первоначально находившиеся на a и A, располагаются на диаметре a' и диаметральной плоскости A' эллипсоида. Диаметр a' сопряжен с плоскостью A' и поэтому, вообще говоря, не перпендикулярен ей. Если же a' перпендикулярен плоскости A', то a' — одна из главных осей эллипсоида, а максимум и минимум диаметров, перпендикулярных a', равны двум другим главным осям, т. е. растяжение диаметра a' задает одно главное растяжение, а два других главных растяжения совпадают с максимумом и минимумом растяжений, перпендикулярных диаметру a'.

Если это утверждение применить к случаю пластинки, то с учетом предположения (1) из него следует, что в любой точке внутри пластины растяжение в направлении проведенной через нее нормали к средней поверхности есть одно из

главных растяжений. Пусть z — первоначальное расстояние от рассматриваемой точки до средней поверхности, а z' — расстояние после деформации. Через z' можно также обозначить нормаль к средней поверхности после деформации относительно ее исходного положения. Если обозначить [разность $z'-z$] через

$$q = z' - z,$$

то производная $\partial q/\partial z$ будет одним из главных растяжений. Так как все три главных растяжения бесконечно малы, а q обращается в нуль вместе с z, то q — бесконечно малая величина по сравнению с z.

Из предположения (2) следует, что коэффициент растяжения в любом направлении, перпендикулярном z', равен z'/p, где ρ — радиус кривизны линии пересечения плоскости, проведенной через z' и соответствующее направление, со средней поверхностью в основании нормали z'. Если обозначить через ρ_1 и ρ_2 радиусы кривизны главных сечений средней поверхности в основании z', то z'/ρ_1 и z'/ρ_2 — значения двух других главных растяжений. Так как разность $z'-z$ бесконечно мала по сравнению с z, то эти главные растяжения можно принять равными z/ρ_1 и z/ρ_2.

После того как значения главных растяжений λ_1, λ_2, λ_3 найдены, подставим их в уравнение (1). Записав элемент объема пластинки в виде $df \cdot dz$, где df — элемент средней поверхности, получим уравнение

$$\delta P - K\delta \int\int df dz \left\{\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_2}\right)^2 + \vartheta\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2}\right)^2\right\} = 0. \qquad (7)$$

Если 2ε — толщина пластинки, то интегрирование по z следует производить от $z=-\varepsilon$ до $z=+\varepsilon$.

Покажем теперь, что одно из главных растяжений $\partial q/\partial z$ можно выразить через два других: z/ρ_1 и z/ρ_2 — не зная сил, вызвавших деформацию пластины. Для этого необходимо более подробно рассмотреть выражение для δP, задаваемое соотношением (2). Прямоугольную систему координат, в которой записано это соотношение, выберем так, чтобы плоскость xy совпадала со средней поверхностью в естественном состоянии пластинки. Тогда z будет иметь тот смысл, о котором говорилось выше. Если обозначить через (z', x), (z', y), (z', z) угол, образуемый нормалью z' к средней поверхности с осями координат, через x_0, y_0, O — первоначальные координаты основания нормали z' и через u_0, v_0, w_0 — перемещения этой точки по направлениям осей, то из предположения (1) мы получим соотношения

$$\begin{aligned} x + u &= x_0 + u_0 + z' \cos(z', x), \\ y + v &= y_0 + v_0 + z' \cos(z', y), \\ z + w &= \phantom{x_0 +{}} w_0 + z' \cos(z', z), \end{aligned}$$

или (поскольку разность $z' - z$ бесконечно мала по сравнению с z)

$$\begin{aligned} x + u &= x_0 + u_0 + z \cos(z', x), \\ y + v &= y_0 + v_0 + z \cos(z', y), \\ z + w &= \phantom{x_0 +{}} w_0 + z \cos(z', z). \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta u_0 + z\delta \cos(z', x), \\ \delta v &= \delta v_0 + z\delta \cos(z', y), \\ \delta w &= \delta w_0 + z\delta \cos(z', z). \end{aligned} \tag{8}$$

Полученные выражения для δu, δv, δw подставим в соотношение (2). Второе слагаемое в правой части каждого из равенств (8) бесконечно мало по сравнению с первым слагаемым, что позволяет, вообще говоря, пренебречь вторыми слагаемыми. Мы сохраним их лишь для того, чтобы воспользоваться приведенными выше рассуждениями, в которых интегралы

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xzdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yzdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Zzdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (X)\,zdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Y)\,zdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Z)\,zdz$$

имеют такой же порядок величины, как и интегралы

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Ydz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Zdz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (X)\,dz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Y)\,dz, \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (Z)\,dz.$$

Подставив выражения (8) для δu, δv, δw в (2), заметим, что δP не зависит от δq. Это следует из того, что в левой части уравнения (7) содержащий δq второй член должен обратиться в нуль сам по себе. Но тогда

$$(1+\vartheta)\frac{\partial q}{\partial z} + \vartheta\left(\frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2}\right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2}\right).$$

Подставив это выражение для $\partial q/\partial z$ в уравнение (7), получим

$$\delta P - K\delta \int\int df dz z^2 \left\{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2\right\} = 0,$$

или после интегрирования по z

$$\delta P - \frac{2}{3}\varepsilon^3 K\delta \int df\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2\right) = 0. \tag{9}$$

§ 3. Полученное нами общее условие равновесия для пластинки применим теперь к случаю, рассмотренному Пуассоном, а именно к случаю, когда пластинка находится в состоянии, бесконечно близком к исходному состоянию равновесия. Прежде всего продолжим преобразование выражения для δP.

Если w_0 — бесконечно малая величина первого порядка, то, поскольку средняя поверхность не испытывает растяжения, u_0 и v_0 — бесконечно малые ве-

личины второго порядка. Следовательно, δu_0 и δv_0 можно считать бесконечно малыми по сравнению с δw_0 и записать соотношения (8) в виде

$$\begin{aligned} \delta u &= z\delta\cos(z', x), \\ \delta v &= z\delta\cos(z', y), \\ \delta w &= \delta w_0 + z\delta\cos(z', z). \end{aligned}$$

Кроме того, если и в рассматриваемом случае учитывать лишь бесконечно малые величины первого порядка, то

$$\cos(z', x) = -\frac{\partial w_0}{\partial x_0}, \qquad \cos(z', y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y_0}, \qquad \cos(z', z) = 1,$$

и, таким образом,

$$\delta u = -z\frac{\partial\delta w_0}{\partial x_0}, \qquad \delta v = -z\frac{\partial\delta w_0}{\partial y_0}, \qquad \delta w = \delta w_0.$$

Подставим эти выражения в соотношение (2). Если элемент объема пластинки снова записать в виде $dfdz$, элемент ее боковой поверхности — в виде $dsdz$, где ds — элемент границы средней поверхности, и условиться для удобства вместо u_0, v_0, w_0 писать просто u, v, w, то соотношение (2) примет следующий вид:

$$\delta P = \int\int dfdz\left\{Z\delta w - z\left(X\frac{\partial\delta w}{\partial x} + Y\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)\right\} + \int\int dsdx\left\{(Z)\delta w - \right.$$
$$\left. - z\left((X)\frac{\partial\delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)\right\}.$$

Силы X, Y, Z и силы давления (X), (Y), (Z) здесь допустимо считать не зависящими от w, поскольку перемещение w должно быть бесконечно малым. Преобразуем выражение для δP дальше. Представим его в виде

$$\delta P = \int\int\int dxdydz\left\{Z + z\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\delta w - \int\int\int zdxdydz\frac{\partial X\delta w}{\partial x} - \right.$$
$$\left. - \int\int\int zdxdydz\frac{\partial Y\delta w}{\partial y} + \int\int dsdz\left\{(Z)\delta w - z\left((X)\frac{\partial\delta w}{\partial x} + (Y)\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)\right\}.\right.$$

Второй и третий из этих четырех интегралов преобразуем по формулам

$$\int dxdy\frac{\partial F}{\partial x} = -\int ds\cos\varphi F, \qquad \int dxdy\frac{\partial F}{\partial y} = -\int ds\sin\varphi F, \tag{10}$$

где F — произвольная функция от x и y, двукратные интегралы берутся по поверхности с границей, однократные — по самой границе, φ — угол, образуемый обращенной внутрь нормалью к границе поверхности с положительным направлением оси x. Угол φ описывает ось x, если ее поворачивать до тех пор, пока она не станет параллельной нормали в том же направлении, в каком ее следует повернуть на 90°, чтобы она совпала с положительной полуосью y. Пользуясь формулами (10), преобразуем выражение для δP к следующему виду:

$$\delta P=\int\int\int dxdydz\left\{Z+z\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w+\int\int dsdz\left\{(Z)+\right.$$
$$\left.+z\,(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)\right\}\delta w-\int\int zdsdz\left\{(X)\frac{\partial\delta w}{\partial x}+(Y)\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right\}.$$

В последнем из трех интегралов, стоящих в правой части, подставим вместо $\partial\delta w/\partial x$ и $\partial\delta w/\partial y$ производную от δw по направленной внутрь нормали к границе поверхности $\partial\delta w/\partial N$ и производную от δw по дуге границы $\partial\delta w/\partial s$.

Дугу s будем считать возрастающей в таком направлении, чтобы угол, образуемый касательной, проведенной к дуге в сторону возрастания, с положительным направлением оси x был равен φ — 90° (такой угол описывает ось x, если ее поворачивать в направлении, указанном в определении угла φ, до тех пор, пока она не расположится параллельно касательной). В результате мы получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial\delta w}{\partial x}=\frac{\partial\delta w}{\partial N}\cos\varphi+\frac{\partial\delta w}{\partial s}\sin\varphi,\qquad \frac{\partial\delta w}{\partial y}=\frac{\partial\delta w}{\partial N}\sin\varphi-\frac{\partial\delta w}{\partial s}\cos\varphi, \tag{11}$$

поэтому

$$\int\int zdsdz\left\{(X)\frac{\partial\delta w}{\partial x}+(Y)\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right\}=\int\int zdsdz\left\{(X)\cos\varphi+\right.$$
$$\left.+(Y)\sin\varphi\right\}\frac{\partial\delta w}{\partial N}+\int\int zdsdz\left\{(X)\sin\varphi-(Y)\cos\varphi\right\}\frac{\partial\delta w}{\partial s}.$$

Во втором из двух интегралов в правой части последнего равенства произведем интегрирование по частям по s. Внеинтегральный член обратится в нуль, так как интегрирование проводится по замкнутой кривой. Произведя аналогичные преобразования с третьим интегралом в правой части выражения для δP, получим

$$\delta P=\int\int\int dxdydz\left\{Z+z\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right\}\delta w+\int\int dsdz\left\{(Z)+\right.$$
$$\left.+z\frac{\partial\left((X)\sin\varphi-(Y)\cos\varphi\right)}{\partial s}+z\,(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)\right\}\delta w-$$
$$-\int\int zdsdz\left\{(X)\cos\varphi+(Y)\sin\varphi\right\}\frac{\partial\delta w}{\partial N}. \tag{12}$$

Образуем теперь второй член в левой части уравнения (9). Представим себе, что через точку средней поверхности с координатами x, y, w проведена плоскость, параллельная оси z и образующая с плоскостью xz угол ϑ. Пусть ρ — радиус кривизны линии пересечения этой плоскости и средней поверхности в точке (x, y, w). Тогда

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\vartheta+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos\vartheta\sin\vartheta+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\vartheta.$$

Значения $1/\rho_1$ и $1/\rho_2$ — максимум и минимум величины $1/\rho$, поэтому они являются корнями уравнения

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\Lambda\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\Lambda\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2=0,$$

откуда

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2.$$

Эти значения необходимо подставить в уравнение (9). Пусть

$$Q=\int\int dx dy\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right),$$

$$R=\int\int dx dy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2. \tag{13}$$

Тогда уравнение (9) преобразуется к виду

$$\delta P-\frac{2}{3}\varepsilon^3 K\left(\delta Q+\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\,\delta R\right)=0. \tag{14}$$

Выпишем в явном виде выражения для δQ и δR. Из (13) получаем

$$\delta Q=2\int\int dx dy\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}\right\}. \tag{15}$$

Но

$$\int\int dx dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}=\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w}{\partial x}}{\partial x}-\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\delta w}{\partial x}+\int\int dx dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\,\delta w,$$

$$\int\int dx dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}=\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial y}}{\partial x}-\int\int dx dy\,\times$$

$$\times\,\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial x^{32}\partial y}\delta w}{\partial y}+\int\int dx dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\,\delta w,$$

и

$$\int\int dx dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}=\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\frac{\partial \delta w}{\partial x}}{\partial y}-$$

$$-\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\delta w}{\partial x}+\int\int dx dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\,\delta w,$$

$$\int\int dx dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}=\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial \delta w}{\partial y}}{\partial y}-\int\int dx dy\,\frac{\partial\,\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\delta w}{\partial y}+\int\int dx dy\,\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\,\delta w.$$

Сложим эти четыре равенства. Сумма левых частей даст (1/2) δQ.

Интегралы в правой части полученного равенства от элемента поверхности, умноженного на производные по x или y от частных производных, преобразуем по формулам (10) в интегралы по границе средней поверхности. В некоторые из этих интегралов входят производные $\partial\delta w/\partial x$ и $\partial\delta w/\partial y$. Выразив эти производные по формулам (11) через $\partial\delta w/\partial N$ и $\partial\delta w/\partial s$, проинтегрируем члены, содержащие $\partial\delta w/\partial s$, по частям по s. Внеинтегральные члены обратятся в нуль, так как интегрирование производится по замкнутой кривой, и мы получим

$$\delta Q = 2\int\int dxdy\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}\delta w + 2\int ds\left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi - \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)}{\partial s}\right\}\delta w$$
$$-2\int ds\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}\frac{\partial\delta w}{\partial N}. \qquad (16)$$

Кроме того,

$$\delta R = 2\int\int dxdy\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\right). \qquad (17)$$

Но если F и G — любые две функции от x и y, то

$$\int\int dxdyF\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) = \int\int dxdyG\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \int ds\,\frac{\partial F}{\partial N}G - \int dsF\frac{\partial G}{\partial N}.$$

Следовательно, выбрав

$$F = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad G = \delta w,$$

мы получим с учетом того, что, как следует из (11),

$$\frac{\partial F}{\partial N} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial F}{\partial y}\sin\varphi,$$

следующее выражение для δR:

$$\delta R = 2\int\int dxdy\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}\delta w + 2\int ds\left\{\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right\}\delta w - 2\int ds\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\frac{\partial\delta w}{\partial N}. \qquad (18)$$

Выражения (12), (16) и (18) подставим в уравнение (14). Левую часть этого уравнения после подстановки можно представить в виде суммы трех интегралов, из которых первый берется по самой средней поверхности, а два остальных — по ее границе (первый из этих двух интегралов содержит в подынтегральном выражении множитель δw, второй — множитель $\partial\delta w/\partial N$). Из принципов вариационного исчисления следует, что множители при δw и $\partial\delta w/\partial N$ должны обращаться в нуль, и мы получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Zdz+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Xzdz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Yzdz=\frac{4}{3}\varepsilon^3K\,\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) \quad (19)$$

и два граничных условия

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Z)\,dz+\frac{\partial}{\partial s}\left(\sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)\,zdz-\cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,zdz\right)+\cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}Xzdz+\sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}Yzdz=$$
$$=\frac{4}{3}\varepsilon^3K\left\{\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right)\right\}, \quad (20)$$

$$\cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)\,zdz+\sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,zdz=\frac{4}{3}\varepsilon^3K\left\{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}. \quad (21)$$

Уравнение (19) совпадает с дифференциальным уравнением в частных производных, которое вывел Пуассон, с точностью до того, что у Пуассона $\vartheta=1/2$, а у нас величина ϑ остается неопределенной. Три граничных условия Пуассона выражены соотношениями (20), (21) и

$$\sin\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(X)\,zdz-\cos\varphi\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(Y)\,zdz=-\frac{4}{3}\varepsilon^3K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi\sin\varphi\right). \quad (22)$$

Докажем теперь, что с точностью до аддитивной линейной функции от x и y, остающейся произвольной, перемещение w однозначно определяется уравнением (20) и граничными условиями (21) и (22). Отсюда следует, что уравнениям Пуассона можно удовлетворить лишь в частном случае, когда внешние силы такого рода, при котором соотношение (22) выполняется автоматически, если выполнено уравнение (19) и граничные условия (20) и (21).

Пусть w_1 и w_2 — две функции, удовлетворяющие, если их подставить вместо w, уравнению (19) и граничным условиям (20), (21). Тогда $w=w_1-w_2$ удовлетворяет уравнению (19) и граничным условиям (20), (21), если в них вместо левых частей подставить нуль. Докажем, что таким уравнениям удовлетворяет только линейная функция от x и y.

Рассмотрим два выражения для

$$\delta Q+\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\,\delta R.$$

Одно составим с помощью соотношений (15) и (17), другое — с помощью соотношений (16) и (18) и приравняем их. В полученном тождестве положим

$\delta w = iw$, где i — бесконечно малая постоянная. Отбрасывая множитель $2i$ в правой и левой части, получаем

$$\int\int dxdy \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\right\} =$$

$$= \int\int dxdy \frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\} w + \int ds \left\{\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\Big) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi \sin\varphi\right)\Big\} w - \int ds \left\{\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cos\varphi \sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right\}\frac{\partial w}{\partial N}.$$

Если w удовлетворяет уравнениям, в которые перешли уравнения (19) и граничные условия (20) и (21) при замене их левых частей нулями, то правая часть этого уравнения обращается в нуль, поэтому его левая часть также обращается в нуль. Но, так как $\vartheta > 0$, то левая часть состоит из суммы неотрицательных членов. Следовательно, для всех точек средней поверхности мембраны должны выполняться уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Этим уравнениям может удовлетворять только линейная функция от x и y.

§ 4. Уравнение (19) и граничные условия (20) и (21) предыдущего раздела применим теперь для вывода законов колебаний свободной круглой мембраны. Из (19), (20) и (21) для колебаний мембраны любой формы мы получаем дифференциальное уравнение в частных производных

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{2}{3}\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\varepsilon^2 K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = 0, \tag{1}$$

где ρ — плотность мембраны с граничными условиями

$$\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\left(\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(\cos^2\varphi - \right.$$

$$\left. - \sin^2\varphi) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos\varphi \sin\varphi\right) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\cos\varphi \sin\varphi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\sin^2\varphi = 0.$$

Уравнение (19) и граничные условия (20) и (21) предыдущего раздела переходят в уравнения (2) при подстановке $(X)=(Y)=(Z)=0$, $X=-\rho\partial^2 u/\partial t^2$, $Y=-\rho\partial^2 v/\partial t^2$, $Z=-\rho\partial^2 w/\partial t^2$, если учесть, что в силу принятых во втором разделе двух предположений производные $\partial^2 u/\partial t^2$ и $\partial^2 v/\partial t^2$ не могут быть бесконечно большими по сравнению с $\partial^2 w/\partial t^2$. К уравнению (1) и граничным условиям (2) необходимо присовокупить, что w и $\partial w/\partial t$ при $t=0$ переходят в две заданные функции от x и y. Тогда функция w будет однозначно определена.

Найдем сначала частное решение дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (2). Затем мы обобщим его так, чтобы оно удовлетворяло и дополнительным условиям при $t=0$.

Положим для кратности

$$a^2 = \frac{2}{3}\,\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\,\varepsilon^2\,\frac{K}{\rho}$$

и

$$w = u \sin(4\lambda^2 a t), \tag{3}$$

где u — некоторая функция от x и y; λ — константа, которые мы пока оставим неопределенными. Выражение (3) удовлетворяет уравнению (1), если u — решение следующего дифференциального уравнения:

$$16\lambda^4 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}, \tag{4}$$

которое сводится к двум уравнениям

$$4\lambda^2 v = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad 4\lambda^2 u = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \tag{5}$$

Если положить

$$u = S + D, \qquad v = S - D, \tag{6}$$

то для S и D мы получим дифференциальные уравнения

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \qquad -4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}.$$

Если вместо прямоугольных координат ввести полярные координаты r, ψ, то последние два уравнения преобразуются к виду

$$4\lambda^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2}, \qquad -4\lambda^2 D = \frac{\partial^2 D}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial D}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 D}{\partial \psi^2}.$$

Решения этих уравнений мы получим, положив

$$S = A \cos n\psi \cdot X, \qquad D = B \cos n\psi \cdot Y, \tag{7}$$

где A и B — произвольные постоянные; n — целое число; X и Y — две функции от r, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dX}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} + 4\lambda^2\right) X = 0, \qquad \frac{d^2 Y}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dY}{dr} - \left(\frac{n^2}{r^2} - 4\lambda^2\right) Y = 0. \tag{8}$$

Подставляя

$$x = \lambda r,$$

преобразуем их к виду

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dX}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} + 4\right) X = 0, \qquad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dY}{dx} - \left(\frac{n^2}{x^2} - 4\right) Y = 0. \tag{9}$$

Уравнения (9) имеют частные решения

$$X^{(n)}=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n}\left(1+\frac{x^2}{1\cdot n+1}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot n+1\cdot n+2}+\right.$$
$$\left.+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3}+\ldots\right),$$
$$Y^{(n)}=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n}\left(1-\frac{x^2}{1\cdot n+1}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot n+1\cdot n+2}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3}+\ldots\right) \tag{10}$$

и другие частные решения:

$$X^{(n)\prime}=X^{(n)}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{xX^{(n)}X^{(n)}},\qquad Y^{(n)\prime}=Y^{(n)}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{xY^{(n)}Y^{(n)}}, \tag{11}$$

где x_0 — произвольная конечная величина. Следовательно, общие решения уравнений (9) представлены в виде

$$X=\alpha X^{(n)}+\alpha' X^{(n)\prime},\qquad Y=\beta Y^{(n)}+\beta' Y^{(n)\prime}.$$

Из (11) следует, что $X^{(n)\prime}$ и $Y^{(n)\prime}$ при $x=0$ обращаются в бесконечность. Предположим, что мембрана имеет форму круга, а не кольца. Тогда при $=0$, т. е. при $x=0$, u и v, а также X и Y должны оставаться конечными, в силу чего α' и β' должны быть равны нулю. Постоянные α и β, не ограничивая общности, можно положить равными единице, поскольку в (7) мы ввели постоянные A и B, и поэтому вместо (7) можно взять

$$S=A\cos n\psi\cdot X^{(n)},\qquad D=B\cos n\psi\cdot Y^{(n)}, \tag{12}$$

где $X^{(n)}$ и $Y^{(n)}$ — частные решения (10). Заметим, что $Y^{(n)}$—та самая функция, для которой Бессель предложил обозначение I^n_{2x}.

Постараемся теперь выбрать постоянные A, B и λ так, чтобы удовлетворить условиям (2). Предполагается, что дуга s в уравнениях (2) возрастает в том же направлении, как и в соотношениях (11) предыдущего раздела. Все величины определены там так, что если ψ возрастает в одном направлении с s и начало отсчета s и ψ согласованы, т. е. $s=l\psi$, где l — радиус мембраны, то

$$\varphi=\psi+180°.$$

Если учесть это соотношение, то уравнения (2) при переходе от прямоугольных координат к полярным r, ψ переходят в уравнения

$$\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\psi}\right)=0, \tag{13}$$
$$\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=0.$$

При $r=l$ эти уравнения должны выполняться при любых ψ и при всех t. Поскольку функция w представима в виде (3), то должны выполняться уравне-

ния, получающиеся из уравнений (13) при замене w на u. Эти уравнения, если учесть, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}=4\lambda^2 v,$$

приводят к уравнениям

$$4\lambda^2\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial\psi^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}=0,\qquad 4\lambda^2\frac{\vartheta}{1+\vartheta}v+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=0.$$

Первое из уравнений (5) приводит к тому же результату.

Если вместо u и v подставить их выражения из (6) и (12), заменить r на x/λ, выразить вторые производные от $X^{(n)}$ и $Y^{(n)}$ из уравнений (9) через функции и их первые производные, а также ввести обозначение

$$\gamma=\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta},$$

то получатся уравнения

$$A\left\{n^2X^{(n)}-x(n^2-4\gamma x^2)\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\}+B\left\{n^2Y^{(n)}-x(n^2+4\gamma x^2)\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}=0, \quad (14)$$

$$A\left\{(n^2+4\gamma x^2)X^{(n)}-x\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\}+B\left\{(n^2-4\gamma x^2)Y^{(n)}-x\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}=0.$$

Эти уравнения должны выполняться при $r=l$, т. е. при $x=\lambda l$. Чтобы A и B были отличны от нуля, определитель уравнений должен быть равен нулю. Следовательно, при $x=\lambda l$ должно выполняться соотношение

$$8\gamma n^2x^2X^{(n)}-8\gamma n^2x^3\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)-(n^2(n^2-1)x+16\gamma^2x^5)\times$$
$$\times\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}-Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)+8\gamma x^4\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}=0. \quad (15)$$

Если из этого уравнения найти λ, а из двух уравнений (14) — отношение A и B, то условия (2) будут выполнены. Обозначим через $\lambda_{n\mu}$ корень уравнения (15), и пусть

$$U_{n\mu}=X^{(n)}\left\{(n^2-4\gamma x^2)Y^{(n)}-x\frac{dY^{(n)}}{dx}\right\}_{x=\lambda_{n\mu}l}-$$
$$-Y^{(n)}\left\{(n^2+4\gamma x^2)X^{(n)}-x\frac{dX^{(n)}}{dx}\right\}_{x=\lambda_{n\mu}l}. \quad (16)$$

Тогда уравнению (1) и условиям (2) будет удовлетворять

$$w=C_{n\mu}\sin(4\lambda_{n\mu}^2at)\cos n\psi U_{n\mu},$$

или

$$w=\{\cos(4\lambda_{n\mu}^2at)(A_{n\mu}\cos n\psi+B_{n\mu}\sin n\psi)+$$
$$+\sin(4\lambda_{n\mu}^2at)(C_{n\mu}\cos n\psi+D_{n\mu}\sin n\psi)\}U_{n\mu}, \quad (17)$$

где $A_{n\mu}$, $B_{n\mu}$, $C_{n\mu}$, $D_{n\eta}$ — произвольные постоянные.

Исследуем теперь уравнение (15) несколько подробнее и прежде всего разложим его левую часть в ряд по положительным степеням x. Нам понадобится произведение $X^{(n)}Y^{(n)}$. Найти его разложение в ряд можно, не производя непосредственно умножение бесконечных рядов (10). Действительно, дифференциальные уравнения (9), которым удовлетворяют $X^{(n)}$ и $Y^{(n)}$, позволяют найти линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка для $X^{(n)}Y^{(n)}$ и из него получить произведение с учетом того, что заранее известно относительно его разложения в ряд. Пусть

$$H = X^{(n)}Y^{(n)}.$$

Дифференцируя H четыре раза подряд, найдем четыре первые производные от H по x. С помощью уравнений (9) выразим производные второго и более высокого порядков от $X^{(n)}$ и $Y^{(n)}$ через сами эти функции и их первые производные. Мы получим пять уравнений, задающих произведение H и его первые четыре производные как линейные однородные функции от четырех величин:

$$X^{(n)} \cdot Y^{(n)}, \quad X^{(n)} \frac{dY^{(n)}}{dx}, \quad Y^{(n)} \frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{dX^{(n)}}{dx} \frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Первое из пяти полученных уравнений умножим на 1, остальные — по порядку на коэффициенты A_1, A_2, A_3, A_4, сложим все уравнения и зададим коэффициенты так, чтобы в сумме коэффициенты при четырех выписанных нами величинах обратились в нуль. В результате получится тождество

$$H + A_1 \frac{dH}{dx} + A_2 \frac{d^2H}{dx^2} + A_3 \frac{d^3H}{dx^3} + A_4 \frac{d^4H}{dx^4} = 0. \tag{18}$$

Уравнения, выражающие производные от $X^{(n)}$ и $Y^{(n)}$ второго или более высокого порядка через эти функции и их первые производные, запишем следующим образом:

$$\frac{d^2X^{(n)}}{dx^2} = a_2X^{(n)} + a'_2\frac{dX^{(n)}}{dx}, \qquad \frac{d^2Y^{(n)}}{dx^2} = b_2Y^{(n)} + b'_2\frac{dY^{(n)}}{dx},$$
$$\frac{d^3X^{(n)}}{dx^3} = a_3X^{(n)} + a'_3\frac{dX^{(n)}}{dx}, \qquad \frac{d^3Y^{(n)}}{dx^3} = b_3Y^{(n)} + b'_3\frac{dY^{(n)}}{dx},$$
$$\frac{d^4X^{(n)}}{dx^4} = a_4X^{(n)} + a'_4\frac{dX^{(n)}}{dx}, \qquad \frac{d^4Y^{(n)}}{dx^4} = b_4Y^{(n)} + b'_4\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Тогда для коэффициентов A мы получим уравнения

$$1 + (a_2 + b_2)A_2 + (a_3 + b_3)A_3 + (a_4 + b_4 + 6a_2b_2)A_4 = 0,$$
$$A_1 + a'_2A_2 + (a'_3 + 3b_2)A_3 + (a'_4 + 4b_3 + 6a'_2b_2)A_4 = 0,$$
$$A_1 + b'_2A_2 + (b'_3 + 3a_2)A_3 + (b'_4 + 4a_3 + 6a_2b'_2)A_4 = 0,$$
$$2A_2 + 3(a'_2 + b'_2)A_3 + (4a'_3 + 4b'_3 + 6a'_2b'_2)A_4 = 0.$$

Подставив в эти уравнения значения a и b, найденные из (9), решим их и полученные значения A_1, A_2, A_3, A_4 подставим в уравнение (18), после чего оно перейдет в уравнение

$$64H+\frac{4n^2-1}{x^3}\frac{dH}{dx}-\frac{4n^2-1}{x^2}\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{d^3H}{dx^3}+\frac{d^4H}{dx^4}=0.$$

Но из (10) следует, что

$$H=X^{(n)}Y^{(n)}=\frac{x^{2n}}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots n)^2}(1+B_1x^4+B_2x^8+B_3x^{12}+B_4x^{16}+\ldots). \quad (19)$$

Подставляя этот ряд в только что полученное дифференциальное уравнение, находим, что

$$B_k=-\frac{B_{k-1}}{k(n+k)(n+2k-1)(n+2k)},$$

откуда

$$B_k=\frac{(-1)^k}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(n+1)(n+2)\ldots(n+2k)}. \quad (20)$$

Чтобы составить уравнение (15), необходимо разложить в ряды выражения

$$X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}-Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}, \quad \frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Воспользуемся для этого уравнениями, тождественными уравнениям (9):

$$H=X^{(n)}Y^{(n)},$$

$$\frac{dH}{dx}=X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^2H}{dx^2}=\frac{2n^2}{x^2}X^{(n)}Y^{(n)}-\frac{1}{x}\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)+2\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx},$$

$$\frac{d^3H}{dx^3}=-\frac{6n^2}{x^3}X^{(n)}Y^{(n)}+\frac{4n^2+2}{x^2}\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)+$$
$$+8\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}-Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)-\frac{6}{x}\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}.$$

Решив эти уравнения, получим

$$X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}+Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}=\frac{dH}{dx},$$

$$8\left(X^{(n)}\frac{dY^{(n)}}{dx}-Y^{(n)}\frac{dX^{(n)}}{dx}\right)=\frac{d^3H}{dx^3}+\frac{3}{x}\frac{d^2H}{dx^2}-\frac{4n^2-1}{x^2}\frac{dH}{dx},$$

$$2\frac{dX^{(n)}}{dx}\frac{dY^{(n)}}{dx}=\frac{d^2H}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dH}{dx}-\frac{2n^2}{x^2}H.$$

С учетом разложений (19) и (20) мы заключаем, что выписанные нами три величины допускают разложения

$$\frac{2x^{2n-1}}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)^2}\left(n+\sum_{k=1}^{\infty}(n+2k)B_kx^{4k}\right),$$

$$\frac{4x^{2n-3}}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^2}\sum_{k=1}^{\infty} k(n+k)(n+2k)B_k x^{4k},$$

$$\frac{x^{2n-2}}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^2}\left(n^2+\sum_{k=1}^{\infty}(2(n+2k)^2-n^2)B_k x^{4k}\right)$$

(разложения приведены в том же порядке, что и сами величины). Следовательно, если отбросить множитель x^{2n+2}, то уравнение (15) будет иметь вид

$$(4\gamma-1)n^2(n-1)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{E_k}{M_k}x^{4k}=0, \qquad (21)$$

где

$$E_k=-n^2(n^2-1)+4\gamma(n+2k)(n+2k+1)(n(n-1)-2k+4\gamma k(n+k)),$$
$$M_k=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k(n+1)(n+2)\ldots(n+k)(n+1)(n+2)\ldots(n+2k+1).$$

Нетрудно видеть, что уравнение (21), корни которого, деленные на l, можно подставить вместо $\lambda_{n\mu}$, содержит только степени x, кратные 4. Отсюда следует, что если $l\lambda$ — корень этого уравнения, то $-l\lambda$, $l\lambda\sqrt{-1}$ и $-l\lambda\sqrt{-1}$ — также корни уравнения (21). Докажем, что четвертые степени всех корней уравнения (21) вещественны и положительны. Это будет означать, что в любой группе из четырех корней, одна из которых выписана выше, непременно найдется вещественный положительный корень.

Как уже отмечалось, ϑ — положительная величина. Следовательно, величина $\gamma=(1+2\vartheta)/(1+\vartheta)$ больше, чем 1. Отсюда мы заключаем, что E_k всегда больше нуля и, следовательно, члены в левой части уравнения (21) имеют чередующиеся знаки, в силу чего четвертая степень любого корня этого уравнения не может быть отрицательной. В том, что она не может быть и мнимой, можно убедиться следующим косвенным образом.

Пусть $l\lambda$ и $l\lambda'$ — два корня уравнения (21) и пусть для первого из них функция $U_{n\mu}$, определяемая соотношением (16), равна U, а для второго — U'. Можно показать, что тогда

$$(\lambda^4-\lambda'^4)\int_0^l UU'r\,dr=0. \qquad (22)$$

Будем считать, что равенство (22) доказано. Покажем, что число λ^4 не может быть мнимым. Пусть

$$\lambda=p+q\sqrt{-1}, \qquad U=P+Q\sqrt{-1}.$$

Тогда $(p-q\sqrt{-1})l$ — еще один корень уравнения (21). Пусть

$$\lambda'=p-q\sqrt{-1},$$

тогда

$$U' = P - Q\sqrt{-1}.$$

Соотношение (22) можно записать в виде

$$pq(p^2 - q^2)\int_0^l (P^2 + Q^2)\, r dr = 0.$$

Входящий в него интеграл не может обращаться в нуль, так как подынтегральное выражение равно сумме заведомо положительных величин. Следовательно, должно выполняться равенство

$$pq(p^2 - q^2) = 0,$$

а это есть условие того, что число λ^4 вещественно.

Докажем теперь, что уравнение (22) действительно выполняется. Так как выражение (17) для w удовлетворяет уравнению (1), то, если

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U = 4\lambda^2 V,$$

должны выполняться одновременно два уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U = 4\lambda^2 V, \\ &\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} - \frac{n^2}{r^2}V = 4\lambda^2 U. \end{aligned} \tag{23}$$

Но выражение (17) для w удовлетворяет условиям (2), или, что то же, (13). Следовательно, при $r=l$ должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} &\frac{1+2\vartheta}{1+\vartheta}\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U\right) - \frac{n^2}{r^2}\left(\frac{dU}{dr} - \frac{1}{r}U\right) = 0, \\ &\frac{\vartheta}{1+\vartheta}\left(\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} - \frac{n^2}{r^2}U\right) + \frac{d^2U}{dr^2} = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Уравнения (23) можно записать теперь в виде

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 V &= r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U, \\ 4\lambda^2 U &= r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n V. \end{aligned}$$

Подставляя V из первого уравнения во второе, получаем

$$16\lambda^4 U = r^{n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^{2n-1}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^{2n-1}}\frac{d}{dr}r^n U. \tag{25}$$

Аналогичным образом можно вывести и второе уравнение, которое получается из (25) при замене U и λ на U' и λ'. Подставляя выражение для $16\lambda^4 U$ из (25) в интеграл

$$16\lambda^4 \int UU'rdr$$

и производя четырехкратное интегрирование по частям, получаем интеграл

$$\int rdrU \cdot r^{n-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^{2n-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U',$$

равный

$$16\lambda'^4 \int UU'rdr.$$

Итак, мы приходим к уравнению

$$6(\lambda^4 - \lambda'^4) \int UU'rdr = \frac{1}{r^{n-1}} U' \left(\frac{d}{dr} r^{2n-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U\right) - \\ - \left(\frac{d}{dr} r^n U'\right)\left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U\right) + \left(\frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U'\right)\left(\frac{d}{dr} r^n U\right) - \\ - \left(\frac{d}{dr} r^{2n-1} \frac{d}{dr} \frac{1}{r^{2n-1}} \frac{d}{dr} r^n U'\right) \frac{1}{r^{n-1}} U. \qquad (26)$$

Можно показать, что при $r=0$ и при $r=1$ выражение в правой части (26) обращается в нуль. При $r=0$ оно обращается в нуль, так как U и U' имеют вид

$$cr^n + c_1 r^{n+2} + c_2 r^{n+4} + \ldots .$$

Чтобы убедиться в том, что при $r=l$ правая часть (26) также равна нулю,[1] обратимся к уравнениям (24), которые можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2U}{dr^2} = \frac{\vartheta}{1+2\vartheta}\left(\frac{n^2}{r^2} U - \frac{1}{r} \frac{dU}{dr}\right),$$

$$\frac{d^3U}{dr^3} = -\frac{3n^2}{r^3} U + \frac{n^2 + (n^2+1)(1+3\vartheta)}{(1+2\vartheta) r^2} \frac{dU}{dr}.$$

С помощью этих уравнений, и уравнений, возникающих при замене U на U', выразим вторые и третьи производные от U и U', которые появляются при выполнении дифференцирований, указанных в (26), через U, U' и их первые производные. Все члены в правой части (26) при этом взаимно уничтожаются. Отсюда следует, что уравнение (22) действительно выполняется.

До сих пор мы не учитывали условия, которым должно удовлетворять решение нашего дифференциального уравнения в частных производных при $t=0$. Попытаемся теперь так обобщить полученное решение (17), чтобы оно могло удовлетворять и этим условиям. Выражение, стоящее в (17) в правой части, просуммируем по μ и по n и полученную двойную сумму обозначим через w. При суммировании по μ можно учитывать только вещественные положительные

$\lambda_{n\mu}$. Учет отрицательных и мнимых $\lambda_{n\mu}$ не позволяет достичь большей общности выражения для w, так как если

$$U_{n\mu}=U \qquad \text{при } \lambda_{n\mu}=\lambda$$

и

$$U_{n\mu}=U' \qquad \text{при } \lambda_{n\mu}=\lambda',$$

то при том же r

$$U=U' \qquad \text{при } \lambda=-\lambda'$$

и

$$U=(-1)^{n+1}U' \qquad \text{при } \lambda=\lambda'\sqrt{-1}.$$

Условимся теперь понимать под

$$l\lambda_{n_0},\ l\lambda_{n_1},\ l\lambda_{n_2},\ \ldots,\ l\lambda_{n_\mu},\ \ldots$$

положительные вещественные корни уравнения (21), расположенные в порядке возрастания так, что $l\lambda_{n_0}$ — наименьший из корней, и пусть

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\{\cos(4\lambda_{n\mu}^2 at)(A_{n\mu}\cos n\psi+B_{n\mu}\sin n\psi)+ \\ +\sin(4\lambda_{n\mu}^2 at)(C_{n\mu}\cos n\psi+D_{n\mu}\sin n\psi)\}\,U_{n\mu}.$$

Постоянные A, B, C, D необходимо выбирать так, чтобы при $t=0$

$$w=F(r,\ \psi), \qquad \frac{\partial w}{\partial t}=\Phi(r,\ \psi),$$

где F и Φ — две заданные функции от r и ψ. Первое условие позволяет найти значения постоянных A и B, а значения C и D мы находим из второго условия. Обе пары постоянных мы вычисляем одним и тем же способом, поэтому достаточно показать, как можно найти постоянные A и B. Первое условие требует, чтобы

$$F(r,\ \psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}(A_{n\mu}\cos n\psi+B_{n\mu}\sin n\psi)\,U_{n\mu}.$$

Разложим функцию $F(r,\ \psi)$ по косинусам и синусам углов, кратных ψ:

$$F(r,\ \psi)=F_0(r)+F_1(r)\cos\psi+F_2(r)\cos 2\psi+\ldots+ \\ +F_1'(r)\sin\psi+F_2'(r)\sin 2\psi+\ldots,$$

и подставим это разложение вместо $F(r,\ \psi)$. Тогда

$$F_n(r)=\sum_{\mu=0}^{\infty}A_{n\mu}U_{n\mu}, \qquad F_n'(r)=\sum_{\mu=0}^{\infty}B_{n\mu}U_{n\mu}. \tag{27}$$

Функции $F_n(r)$ и $F_n'(r)$ можно считать известными. Следовательно, определение постоянных A и B сводится к задаче о разложении заданной функции от r

по функциям U_{n0}, U_{n1}, U_{n2} ... Если предположить, что такое разложение существует, то его коэффициенты можно найти по теореме, утверждение которой сводится к равенству (22). Из этого равенства следует, что если μ и μ' — два различных числа, то

$$\int_0^l U_{n\mu} U'_{n\mu} dr = 0,$$

поэтому из соотношений (27) получаем

$$A_{n\mu} \int_0^l U_{n\mu} U_{n\mu} r dr = \int_0^l F_n(r)\, U_{n\mu} r dr,$$

$$B_{n\mu} \int_0^l U_{n\mu} U_{n\mu} r dr = \int_0^l F'_n(r)\, U_{n\mu} r dr.$$

§ 5. Для сравнения теории с экспериментом важно рассмотреть такой случай, в котором колебания мембраны создают чистый тон. Отношения между частотами различных тонов, которые может издавать мембрана, и линиями узлов, возникающими при звучании каждого тона, служат основными пунктами для сравнения. Именно этим случаем мы и займемся. Перемещение w представимо в виде

$$w = \{\cos(4\lambda_{n\mu}^2 at)(A\cos n\psi + B\sin n\psi) + \\ + \sin(4\lambda_{n\mu}^2 at)(C\cos n\psi + D\sin n\psi)\}\, U_{n\mu}. \qquad (28)$$

Тон определяется величинами $\lambda_{n\mu}$: частота, т. е. число простых колебаний, совершаемых мембраной за единицу времени, равна

$$(4\lambda_{n\mu}^2 a)/\pi.$$

Линии узлов — это те линии, для которых $w=0$ при любых t. Принадлежащие им точки удовлетворяют либо уравнению

$$U_{n\mu} = 0, \qquad (29)$$

либо двум уравнениям

$$A\cos n\psi + B\sin n\psi = 0, \qquad C\cos n\psi + D\sin n\psi = 0. \qquad (30)$$

Уравнение (29) задает некоторые значения r в качестве своих корней. Число корней уравнения (29), которые меньше l, совпадает с числом окружностей, концентрических границе мембраны, в фигуре, образуемой линиями узлов. Число и размеры этих окружностей зависят лишь от тона и не зависят от значений коэффициентов A, B, C и D. Уравнения (30) не выполняются ни в одной точке, если не выполняется равенство

$$A : B = C : D.$$

Если $A : B \neq C : D$, то не существует других линий узлов, кроме окружностей, концентрических краю мембраны. Если же возникает пропорция $A : B =$

$=C:D$, то уравнение (30) задает n различных значений ψ, из которых любые два смежных значения отличаются на π/n. В этом случае к концентрическим окружностям добавляются линии узлов, совпадающие с диаметрами, которые делят край мембраны на равные части.

Все эти общие результаты теории, по существу, совпадают с тем, что известно из эксперимента. Как показывает опыт, линии узлов действительно имеют форму окружностей, концентрических краю мембраны, и диаметров, делящих край на равные части, если отвлечься от возмущений, связанных главным образом с тем, что реальная мембрана в отличие от рассматриваемой в теории не абсолютно свободна.

Однако опыт показывает также, что при некотором тоне, допускающем линии узлов в виде диаметров, эти диаметры иногда отсутствуют. Даже в тех случаях, когда диаметров нет, песок, рассыпанный тонким слоем по поверхности мембраны, собирается вдоль диаметров, но песчинки при движении мембраны не остаются в состоянии покоя, а колеблются.

Чтобы попытаться объяснить это интересное явление, необходимо проследить за движением какой-нибудь песчинки. Песчинка участвует в движении, сообщаемом ей мембраной, и в то же время падает, поэтому ее ускорение направлено то в одну, то в другую сторону, в то время как мембрана совершает движение, описываемое уравнением (28). Мы не будем останавливаться подробнее на анализе движения песчинок.

Хладни экспериментальным путем обнаружил, что частоты тонов, при которых линии узлов содержат одни и те же диаметры (т. е. тонов, соответствующих одним и тем же значениям n), за исключением самого низкого тона, описываются последовательностью квадратов четных или нечетных чисел в зависимости от того, четно или нечетно число диаметров. Докажем, что та же закономерность следует и из теории. Для этого преобразуем уравнение (21).

Для функции $Y^{(0)}$, задаваемой вторым из разложений (10), Пуассон [5] нашел разложение в следующий полусходящийся ряд:

$$Y^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left\{(\cos 2x+\sin 2x)\left(1-\frac{(1\cdot3)^2}{1\cdot2}\frac{1}{(16x)^2}+\frac{(1\cdot3\cdot5\cdot7)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\frac{1}{(16x)^4}\right)+\right.$$
$$\left.+(\sin 2x-\cos 2x)\left(\frac{1^2}{1}\frac{1}{16x}-\frac{(1\cdot3\cdot5)^2}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{(16x)^3}+\frac{(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\frac{1}{(16x)^5}-\ldots\right)\right\}.$$

Аналогичным образом можно получить и разложение

$$X^{(0)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\left\{1+\frac{1^2}{1}\frac{1}{16x}+\frac{(1\cdot3)^2}{1\cdot2}\frac{1}{(16x)^2}+\frac{(1\cdot3\cdot5)^2}{1\cdot2\cdot3}\frac{1}{(16x)^3}+\ldots\right\}.$$

Из уравнений (10) находим

$$Y^{(n+1)}=-\frac{1}{2}x^n\frac{d}{dx}\left(\frac{Y^{(n)}}{x^n}\right),\quad X^{(n+1)}=\frac{1}{2}x^n\frac{d}{dx}\left(\frac{X^{(n)}}{x^n}\right).$$

---

[5] *Poisson S. D.* // J. l'Ecole polytechn. 1823. C. 19. P. 349.

Полагая $n=0$ и подставляя вместо $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ их разложения, получаем ряды для $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$, из которых, в свою очередь, находим ряды для $X^{(2)}$, $Y^{(2)}$ и т. д. При произвольном n разложения имеют следующий вид:

$$Y^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left\{\left(\cos\left(2x-\frac{1}{2}n\pi\right)+\sin\left(2x-\frac{1}{2}n\pi\right)\right)\times\right.$$
$$\times\left(1-\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1\cdot 2}\frac{1}{(16x)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)(49-4n^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{1}{(16x)^4}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\sin\left(2x-\frac{1}{2}n\pi\right)-\cos\left(2x-\frac{1}{2}n\pi\right)\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{(1-4n^2)}{1}\frac{1}{16x}-\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{(16x)^3}+\ldots\right)\right\},$$

$$X^{(n)}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\left\{1+\frac{(1-4n^2)}{1}\frac{1}{16x}+\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)}{1\cdot 2}\frac{1}{(16x)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(1-4n^2)(9-4n^2)(25-4n^2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{(16x)^3}+\ldots\right\}.$$

Первый из этих двух рядов лишь незначительно отличается от ряда, приведенного в работе Якоби [6]. Подставив разложения для $Y^{(n)}$ и $X^{(n)}$ в уравнение (15), совпадающее с уравнением (21), мы сможем выразить $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{1}{2}n\pi\right)$ в виде отношения двух рядов, расположенных по степеням $(1/16x)$:

$$\operatorname{tg}\left(2x-\frac{1}{2}n\pi\right)=\frac{\frac{\mathfrak{B}}{x}+\frac{\mathfrak{C}}{(16x)^2}-\frac{\mathfrak{D}}{(16x)^3}+\ldots}{\mathfrak{A}+\frac{\mathfrak{B}}{16x}+\frac{\mathfrak{D}}{(16x)^3}+\ldots},\tag{31}$$

где

$$\mathfrak{A}=\gamma,\qquad \mathfrak{B}=\gamma(1-4n^2)-8,$$
$$\mathfrak{C}=\gamma(1-4n^2)(9-4n^2)+48(1+4n^2),$$
$$\mathfrak{D}=-\gamma 1/3\,((1-4n^2)(9-4n^2)(13-4n^2))+8(9+136n^2+80n^4).$$

При больших x правую часть (31) можно положить равной нулю. При этом мы получаем в качестве приближенных значений корней значения, принимаемые выражением

$$\pi(n+2h)/4$$

при подстановке вместо h целых чисел. Отсюда и следует обнаруженная Хладни закономерность, так как частоты тонов пропорциональны квадратам корней уравнения (31).

Кроме того, это уравнение показывает, что пропорциональность частот квадратам последовательных четных или нечетных чисел выполняется тем точнее, чем выше тон. Оно же позволяет с высокой точностью весьма легко

[6] *Jacobi C.* // Astron. Nachr. 1849. B. 28. S. 94.

находить все тоны, соответствующие одному и тому же значению n, за исключением самого низкого тона. Что же касается числа h в приближенном выражении для $l\lambda_{n\mu}$, то, как показывают вычисления, оно равно μ. Следовательно, $l\lambda_{n\mu}$ при больших μ можно считать приближенно равным $\pi(n+2\mu)/4$. Этот результат полностью согласуется с наблюдениями Хладни.

Чтобы найти значение n, соответствующее самому низкому тону, необходимо вычислить наименьший корень уравнения (21). Это уравнение можно преобразовать к виду

$$1-\frac{x^4}{A_1}+\frac{x^8}{A_2}-\frac{x^{12}}{A_3}+\ldots=0,$$

разделив его при $n=0$ и $n=1$ на x^4. Вычисления дают следующие значения для $\ln A_1$, $\ln A_2$, ...

При $\vartheta=1/2$, $\gamma=4/3$ (по Пуассону):

ln	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\ln A_1$	0,6642079	1,3480266	0,2650703	0,9732073
$\ln A_2$	2,5351132	3,5880591	2,0625798	3,1052465
A_3	5,0973650	6,4065347	4,5889514	5,8682055
A_4	8,149294	9,655978	7,6208431	9,083199
A_5	11,5834	13,2496	11,040182	12,653148
A_6	15,33	17,130	14,77604	16,51613
A_7		21,3	18,7780	20,6290
A_8			23,01	24,96
$\ln A_9$				29,48

При $\vartheta=1$, $\gamma=3/2$ (по Вертгейму):

ln	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$\ln A_1$	0,6812413	1,3521826	0,2242682	0,9393022
$\mathrm{n}\,A_2$	2,5563026	3,5940911	2,0189332	3,0664444
A_3	5,1204304	6,4136351	4,5462236	5,8279058
A_4	8,174058	9,663768	7,5783037	9,042324
A_5	11,6083	13,2578	10,998263	12,612037
A_6	15,35	17,138	14,73392	16,47493
A_7		21,3	18,736	20,5877
$\ln A_8$			22,97	24,92
$\ln A_9$				29,44

Для $\ln(\lambda_{n\mu}l)^4$ мы получаем отсюда значения

при $\vartheta=1/2$

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0	—	—	0,27837	1,00651
1	0,69367	1,41553	1,89117	2,24693
2	1,96308	2,34829		

при $\vartheta=1$

0	—	—	0,23638	0,97014
1	0,71168	1,42012	1,88997	2,24298
2	1,96712	2,35022		

В следующей таблице отношения тонов, найденные Хладни, сопоставлены с результатами вычислений. Указаны тоны, которые может издавать мембрана с наинизшим тоном C. В столбце Хл. указаны тоны, которые наблюдал Хладни, в столбце П. — тоны, вычисленные Пуассоном в предположении $\vartheta=1/2$, и в столбце В. — результаты вычислений Вертгейма, выполненные в предположении $\vartheta=1$. Все данные относятся к равномерному распределению температуры [7]. Каждый вычисленный тон обозначен ближайшим к нему тоном шкалы. Знаки + или — указывают, что вычисленный тон несколько выше или ниже ближайшего тона шкалы *.

μ	$n=0$			$n=1$			$n=2$			$n=3$		
	Хл.	П.	В.	Хл.	П.	В.	Хл.	П.	В.	Хл.	П.	В.
0	—	—	—	—	—	—	C	C	C	d	dis—	dis—
1	Gis	Gis+	A+	b	h—	c—	$\bar{\mathrm{g}}$	$\overline{\mathrm{gis}}$+	$\bar{\mathrm{a}}$—	$\bar{\bar{\mathrm{d}}}$.	$\overline{\overline{\mathrm{dis}}}$	$\overline{\overline{\overline{\mathrm{dis}}}}$+	$\bar{\bar{\bar{\mathrm{e}}}}$—
2	gis+	$\bar{\mathrm{b}}$—	$\bar{\bar{\mathrm{b}}}$+	$\bar{\bar{\mathrm{e}}}$+	$\bar{\bar{\bar{\mathrm{f}}}}$+	$\overline{\overline{\overline{\mathrm{fis}}}}$+						

Наблюдаемые тоны обнаруживают довольно значительные отклонения от вычисленных обоими способами. Предположение Пуассона ($\vartheta=1/2$) дает несколько лучшее согласие с экспериментально наблюдаемыми тонами, чем предположение Вертгейма ($\vartheta=1$), однако и в случае первой гипотезы отклонения слишком велики, для того чтобы лучшее согласие можно было бы интерпретировать как аргумент против гипотезы Вертгейма.

Сравним теперь некоторые численные результаты, которые дает теория относительно линий узлов, с соответствующими результатами наблюдений. Проф. Штрельке любезно предоставил мне данные некоторых измерений, произведенных им с необычайной точностью над двумя круглыми стеклянными пластинами. Эти пластины были обработаны столь же тщательно, как и квадратные мембраны, о которых он сообщал в своей работе. Одна из пластин имела диаметр около 6 дюймов и была толщиной в 1 линию, другая имела диаметр 7 дюймов и была толщиной в 1,1 линии. Подтверждением близости формы

[7] Хладни в своей «Акустике», из которой заимствованы данные, приведенные в столбце Хл., не говорит явно, что измерения производились при равномерном распределении температуры по мембране. Однако нет никаких сомнений в том, что распределение температуры было равномерным.

* A, C и Gis — ля, до и соль-бемоль большой октавы; b, c, d, dis, h — си, до, ре, ре-бемоль и си-бемоль малой октавы; $\bar{\mathrm{b}}$, $\overline{\mathrm{gis}}$, $\overline{\mathrm{fis}}$, $\bar{\mathrm{a}}$ — си-бемоль, соль-бемоль, фа-бемоль, ля первой октавы; $\bar{\bar{\mathrm{d}}}$, $\overline{\overline{\mathrm{dis}}}$, $\bar{\bar{\mathrm{e}}}$, $\bar{\bar{\mathrm{f}}}$, $\overline{\overline{\mathrm{fis}}}$ — ре, ре-бемоль, ми, фа, фа-бемоль второй октавы. — *Примеч. переводчика.*

пластин к идеальному диску и точности метода измерений служат малые расхождения в числах, полученных при измерении различных диаметров окружностей узлов без диаметров узлов на одной пластине:

	Лицевая сторона	Оборотная сторона той же пластины
	24,415	24,42
	24,43	24,44
	24,44	24,425
	24,425	24,43
	24,405	24,415
Среднее	24,423 линий	24,426

Столь же правильно, как и пластина I, ведет себя и другая семидюймовая пластина II. Сравним значения радиусов окружностей узлов на пластине I и II со значениями, полученными при вычислении по гипотезе Пуассона ($\vartheta = 1/2$) и Вертгейма ($\vartheta=1$).

n	μ	Наблюдения		Вычисления	
		I	II	П.	В.
0	1	0,6792	0,6782	0,68062	0,67941
1	1	0,7811	0,7802	0,78136	0,78088

Радиус окружности узлов, соответствующей тону ($n=0$, $\mu=1$), измерял также Савар. Для трех различных мембран он получил

$$l \cdot 0{,}6819; \quad l \cdot 0{,}6798; \quad l \cdot 0{,}6812.$$

Эти данные привел Пуассон в упомянутой нами работе по изучению колебаний круглой пластины. В предположении $\vartheta=1/2$ Пуассон вычислил для случая $n=0$ самый низкий тон и соответствующую ему окружность узлов.

Результаты вычислений в предположении Вертгейма лишь незначительно отличаются от полученных Пуассоном, но с данными наблюдений результаты Вертгейма согласуются все же несколько лучше, чем результаты Пуассона. Это отнюдь не свидетельствует против гипотезы Пуассона, так как полного согласия между теорией и опытом не следует ожидать, поскольку мембраны. над которыми производились опыты, не всегда точно соответствуют допущениям теории.

Проф. Штрельке сообщил мне также результаты измерений, произведенных им на мембранах, не столь близких к идеально круглому диску. Они приведены в следующей таблице вместе с результатами вычислений по гипотезе Пуассона ($\vartheta=1/2$) и по гипотезе Вертгейма ($\vartheta=1$).

Радиусы окружностей узлов *

n	μ	Наблюдения				Вычисления	
1	1	0,781	0,783	0,781	0,78	0,78136	0,78088
2	1	0,79	0,81	0,82		0,82194	0,82274
3	1	0,838	0,842			0,84523	0,84681
1	2	{ 0,488	0,492			0,49774	0,49715
		{ 0,869	0,869			0,87057	0,87015

* Радиус мембраны принят за единицу.

23.
О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ *

Хладни, открыв, что линии узлов колеблющейся мембраны становятся видимыми, если поверхность мембраны покрыть тонким слоем песка, привлек внимание математиков к проблеме колеблющихся пластин. Первую попытку решить эту проблему предприняла Софи Жермен. Приняв гипотезу относительно сил, с которыми упругая пластина сопротивляется деформации, Жермен с помощью Лагранжа вывела дифференциальные уравнения колебаний. Ей удалось проинтегрировать эти уравнения для случая прямоугольной мембраны и установить связь между высотой тона и соответствующими данному тону линиями узлов.

Полученные Жермен результаты находились в полном согласии с существовавшими экспериментальными данными. Это совпадение оказалось случайным, так как выведенные Жермен уравнения не были верными. Можно доказать, что эти уравнения противоречивы. Источник их противоречивости — в гипотезе, из которой исходила Жермен.

Вторую теорию колебаний мембраны построил на более прочной основе Пуассон. Общие уравнения равновесия и движения упругого тела произвольной формы были установлены Пуассоном и Навье. Исходя из этих уравнений, Пуассон вывел соответствующие уравнения для случая, когда тело представляет собой весьма тонкую пластинку. Пуассону удалось проинтегрировать свои уравнения в предположении, что пластинка круглая и при колебаниях все точки, равноудаленные от центра, находятся в одной и той же фазе. Пуассон обнаружил, что такая пластинка может издавать бесконечно много тонов, из которых самому низкому соответствует одна окружность узлов, следующему за ним второму тону — две окружности узлов, третьему тону — три окружности узлов и т. д. Пуассон вычислил радиусы окружностей узлов для двух самых низких тонов и получил хорошее согласие со значениями, найденными Саваром при измерении радиусов.

Однако теория колебаний пластинки Пуассона также нуждалась в уточнении. Я доказал, что в общем случае трем предложенным Пуассоном граничным

* Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 279—285. Перевод Ю. А. Данилова.

условиям невозможно удовлетворить одновременно, и вывел два новых граничных условия, которыми надлежало заменить условия Пуассона, после чего уже не составляло никакого труда вычислить колебания круглой пластинки в общем случае. Произвести такой расчет на основе теории Пуассона невозможно, так как вычисления наталкивались на противоречие в трех граничных условиях. Но в рассмотренном Пуассоном частном случае всем трем условиям удается удовлетворить одновременно, причем условия Пуассона эквивалентны выведенным мной двум граничным условиям.

Прежде чем приводить результаты моих вычислений, необходимо сделать следующее замечание. В уравнения, относящиеся к равновесию и движению упругого тела произвольной формы, входит величина, которую мы обозначим ϑ. Ранее в теоретической работе Пуассона и согласно наблюдениям Каньяра-Латура считалось, что $\vartheta=1/2$. Однако Вертгейм, анализируя свои эксперименты, пришел к заключению, что $\vartheta=1$. Поскольку ϑ входит и в уравнения колебаний пластинки, я использовал при вычислении тонов и линий узлов круглой мембраны оба значения ϑ. Оказалось, что различие между результатами двух расчетов невелико и убывает с повышением тона. Это позволило мне при вычислении высоких тонов придерживаться старой гипотезы относительно ϑ.

Линии узлов, соответствующие любому тону круглой мембраны, согласно теории, при любом значении ϑ состоят из окружностей, концентрических краю мембраны, и диаметров, делящих край на равные части. Каждому тону присуще определенное число диаметров и окружностей, образующих сеть узловых линий. Пусть n — число диаметров, μ — число окружностей. Тогда частоты тонов, издаваемые одной и той же мембраной, можно расположить в виде таблицы, у которой строки соответствуют различным значениям μ, а столбцы — различным значениям n.

Высота тонов, издаваемых мембраной, зависит от ее размеров, толщины и вещества, из которого она сделана, но интервалы между двумя соответствующими тонами не зависят от радиуса, толщины и материала и одинаковы для всех круглых мембран. Эти интервалы представлены в следующих двух таблицах. Первая таблица вычислена при $\vartheta=1/2$, вторая при $\vartheta=1$. В каждой таблице указано, сколько колебаний успевает совершить мембрана, издающая тот или иной тон, за то время, за которое она в основном тоне совершает одно колебание. Основным считается тон, при котором линии узлов состоят из двух взаимно перпендикулярных диаметров.

$\vartheta=1/2$

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0			1,0000	2,3124	4,0485	6,1982
1	1,6131	3,7032	6,4033	9,6445	13,3937	17,6304
2	6,9559	10,8383	15,3052	20,3249		
3	15,9031					

$\vartheta=1$

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
0			1,0000	2,3274
1	1,7284	3,9072	6,7111	10,0762
2	7,3344	11,4003		

Хладни в своей «Акустике» привел наблюдения над тонами, издаваемыми круглыми мембранами. Они соответствуют следующим частотам:

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
0			1,0	2,2	4,0	6,0—6,4
1	1,6	3,6	6,0	9,0—9,5	12,7	17,0
2	6,4$\pm$	10,1	14,3	19,0		
3	14,3—15,1					

Знак $+$ означает, что наблюдаемый тон выше. Наблюдаемые соотношения тонов несколько лучше согласуются с вычисленными при $\vartheta=1/2$, чем при $\vartheta=1$. Это позволяет надеяться на то, что более точные наблюдения помогут более определенно выбрать одну из двух гипотез.

Относительно данных о распределении тонов необходимо заметить следующее. Подобно тому как частоты тонов, издаваемых свободно колеблющимся стержнем, по мере повышения тона все более стремятся к квадратам нечетных чисел, частоты высших тонов круглой мембраны стремятся к квадратам чисел определенного типа, а именно к квадратам чисел вида $m+2\mu$. Это обстоятельство было обнаружено путем наблюдений Хладни и подтверждается теорией при обоих значениях ϑ.

Чтобы вычислить на основании приведенных выше данных абсолютную высоту тонов круглой мембраны, необходимо определить высоту основного тона. Последняя зависит от размеров и вещества мембраны. Если l — радиус мембраны, ε — половина ее толщины, q — модуль упругости и ρ — плотность вещества, то количество колебаний, совершаемых в основном тоне за единицу времени, равно

$$\text{при } \vartheta = 1/2 \qquad (\varepsilon/l^2)\sqrt{q/\rho}\, 1,04604,$$

а

$$\text{при } \vartheta = 1 \qquad (\varepsilon/l^2)\sqrt{q/\rho}\, 1,02357.$$

Экспериментально эти величины, насколько мне известно, не наблюдались.

Перейдем теперь к данным о радиусах окружностей узлов, соответствующих различным тонам, по наблюдениям и расчетам при двух предположениях: $\vartheta=1/2$ и $\vartheta=1$. Данные в приводимой ниже таблице расположены так же, как в таблицах высоты тонов. Радиус мембраны считается равным единице.

$\vartheta=1/2$

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	0,68062	0,78136	0,82194	0,84523	0,86095	0,87256
2	0,39151 0,84200	0,49774 0,87057	0,56043 0,88747	0,60365 0,89894		
3	0,25679 0,59147 0,89381					

$\vartheta=1$

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	0,67941	0,78088	0,82274	0,84681
2		0,49715 0,87015		

Приводимые ниже данные наблюдений произведены Штрельке, любезно предоставившим их в мое распоряжение. Проф. Штрельке проводил измерения на шести тщательно обработанных мембранах I—VI. Первые четыре мембраны изготовлены из стекла, две остальные — из металла. Диаметр и толщина мембран в парижских единицах составляли:

Мембрана	Толщина в линиях	Диаметр в дюймах	Мембрана	Толщина в линиях	Диаметр в дюймах
I	1	6	IV	2/3	7
II	1,1	7	V	2/3	5
III	2/3	7	VI	2/3	6

Радиусы окружностей узлов, измеренные на этих мембранах, выражены в долях радиуса мембраны:

Мембрана I

μ	$n=0$	$n=1$
1	0,6792	0,7811

Мембрана II

μ	$n=0$	$n=1$
1	0,6782	0,7802

Мембрана III

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	0,6780	0,7800	0,8210	0,8447	0,8601	0,8717
2	0,3915 0,8414	0,4977 0,8697	0,5605 0,8867	0,6038 0,8981		

Мембрана IV

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
1	0,6770	0,7792	0,8205	0,8445	0,8601
2	0,3911 0,8411	0,4971 0,8698	0,5608 0,8870	0,6043 0,8983	
3	0,2575 0,5921 0,8954				

Мембрана V

μ	$n=0$	$n=1$
1	0,6781	0,7796

Мембрана VI

μ	$n=0$	$n=1$	$n=2$
1	0,6783	0,7802	0,8213

Результаты измерений, произведенных на различных мембранах, необычайно хорошо согласуются между собой и с результатами вычислений как при $\vartheta=1/2$, так и при $\vartheta=1$. Измерения радиусов узловых окружностей не позволяют отдать предпочтение какой-нибудь одной из гипотез, поскольку значения, получаемые при $\vartheta=1/2$ и $\vartheta=1$, отличаются слишком мало.

24.
О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ДЕФОРМАЦИЙ, ПРЕТЕРПЕВАЕМЫХ ТЕЛОМ ПРИ МАГНИТНОЙ ИЛИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ *

Я позволю себе представить Академии некоторые приложения теории деформаций, которым подвергается тело при магнитной или диэлектрической поляризации, и буду придерживаться изложения этой теории в том виде, в каком она была представлена мной на заседании от 28 февраля 1884 г.[1], и использовать те же обозначения. В упомянутой работе рассматриваемое тело предполагалось твердым, упругим. В выведенных в ней формулах необходимо лишь положить постоянную k'' равной нулю, дабы она была применима к случаю, когда тело находится в жидкостном или парообразном состоянии. Положив $k''=0$, мы получим формулы, выведенные для жидкого тела Гельмгольцем в сообщении, представленном Академии 17 февраля 1881 г. [1], которые, в свою очередь, переходят в формулы, установленные еще раньше сэром В. Томсоном и Кл. Максвеллом, если постоянную k' положить равной нулю, что допустимо, когда жидкость рассматривается как несжимаемая, ибо фигура равновесия ее тогда не зависит от k'. К этому простейшему случаю сводятся опыты, описание которых было представлено Академии 5 апреля 1883 г. и 17 января 1884 г. проф. Квинке[2] [2]. В этих опытах Квинке определил диэлектрическую постоянную и постоянную, названную им диамагнитной, для большого числа жидкостей. Приводимые ниже рассуждения связаны со схемой, по которой проводились опыты Квинке.

1. Представим себе магнитное поле, создаваемое электрическим током, который можно включать и прерывать по желанию. В опытах Квинке такое поле создавалось мощными электромагнитами, плоские поверхности полюсов которых отстояли на расстоянии нескольких миллиметров друг от друга. В большей части пространства между поверхностями полюсов магнитная сила была почти постоянна, вблизи краев быстро спадала и на большом расстоянии вне межполюсного пространства была почти равна нулю.

Предположим, что в таком магнитном поле находятся соприкасающиеся друг с другом различные тела, как твердые, так и жидкие. Будем считать твердые тела жесткими, а жидкие — несжимаемыми, т. е. пренебрегать изменениями плотности, вызванными изменениями давления. Требуется вывести условия равновесия жидкостей. Будем считать при этом, что наряду с магнитной силой действуют также силы тяжести и капиллярные силы. Пусть индекс 1 относится к одной из жидкостей; p_1 — давление в точке этой жидкости, не зависящее от изменяющейся в бесконечно малых пределах плотности; φ_1 — полный магнитный потенциал; μ_1 — плотность; g — ускорение силы тяжести,

* Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderungen welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird // Ann. Phys. 1885. Bd. 25. S. 601—617. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] См. также: Ann. Phys. 1885. Bd. 24. S. 52—74.

[2] *Quincke G.* // Ann. Phys. Bd. 19. S. 705; Bd. 24. S. 347.

направление оси x совпадает с направлением силы тяжести. Тогда из выражения для силы A, приведенного на с. 148 моей работы [3], получаем

$$p_1 = \mu_1 g x + \frac{k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) + c_1, \tag{1}$$

где c_1 — некоторая постоянная. Аналогичное выражение справедливо для каждой из имеющихся жидкостей.

Для поверхности соприкосновения двух жидкостей 1 и 2 разность $p_1 - p_2$ имеет отличное от нуля значение, что обусловлено отчасти капиллярными, отчасти магнитными силами. Пусть r' и r'' — главные радиусы кривизны элемента поверхности соприкосновения, которые считаются положительными, если граничная поверхность жидкости 1 выпукла, n — нормаль к элементу поверхности соприкосновения, направленная внутрь первой жидкости, H — постоянная, зависящая от природы обеих жидкостей. Тогда

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) + \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)^2 - \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_1 - k_1'\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi} + k_2 - k_2'\right)\left(\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Это выражение совпадает с выражениями, приведенными на с. 147 работы [4] для A_x, A_y, . . ., если одну из осей координат направить по нормали n и воспользоваться тем, что на поверхности соприкосновения

$$\begin{gathered} \varphi_1 = \varphi_2, \\ \left(\frac{1}{4\pi} + k_1\right)\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \left(\frac{1}{4\pi} + k_2\right)\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}. \end{gathered} \tag{3}$$

Если в (2) вместо p_1 подставить правую часть (1), вычесть из нее аналогичное выражение для p_2 и исключить с помощью (3) φ_2, то получим

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 = (\mu_2 - \mu_1) g x + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right) - \frac{2\pi(k_2 - k_1)^2}{1 + 4\pi k_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \\ + \frac{k_2 + k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Если три тела различного рода сталкиваются вдоль прямой, то на части этой прямой действуют особые, обусловленные капиллярностью силы, которые должны находиться в равновесии между собой. Если граничная линия поверхности соприкосновения двух жидкостей попадает на наружную поверхность твердого тела, не имеющего острых ребер, то условие равновесия состоит в том, что поверхность раздела двух жидкостей должна пересекать наружнюю поверхность твердого тела под определенным углом. Этот угол должен быть одним и тем же независимо от того, действуют или не действуют магнитные силы.

2. Может представиться случай, когда при включении магнитного поля равновесие достигается за счет надлежащего изменения давления без каких-

либо изменений отношений геометрических размеров тел. Если имеются только две жидкости (1 и 2) и δc_1, δc_2 — приращения, испытываемые постоянными c_1 и c_2 при включении магнитного поля и сохранении равновесия, то, как следует из (4), на поверхности соприкосновения должно выполняться равенство

$$\delta c_1 - \delta c_2 = -\frac{2\pi (k_2 - k_1)^2}{1 + 4\pi k_2}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \quad (5)$$

Предположим теперь, что k_1 и k_2 можно рассматривать как бесконечно малые. Для исследованных Квинке жидкостей это предположение выполняется. Наибольшее значение k имел водный раствор хлорида железа при плотности 1,51, для которого по измерениям Квинке [3] $k=65\cdot 10^{-6}$, если считать, что для атмосферного воздуха $k=0$. Помимо жидкостей 1 и 2, в магнитном поле могут находиться также твердые поляризуемые тела, для которых постоянная k также бесконечно мала. Соотношение (5) упрощается прежде всего за счет того, что первым членом в правой части можно пренебречь по сравнению со вторым.

Кроме того, вместо φ_1 следует подставить значение, которое имел бы потенциал, если бы в магнитном поле всюду постоянная k была бы равна нулю, или (что эквивалентно) если бы атмосферный воздух заполнял все пространство, занятое магнитным полем. Если это значение потенциала обозначить через φ, то упрощенное выражение (5) приняло бы вид

$$\delta c_1 - \delta c_2 = \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right).$$

Чтобы могло выполняться условие, справедливое для поверхности, разделяющей жидкости 1 и 2, магнитная сила на этой поверхности должна иметь постоянную величину.

Жидкость 1, так же как и жидкость 2, должна простираться до того места, где магнитные силы, когда они возникают, обладают исчезающе малой интенсивностью. Из (1) следует, что δc_1 и δc_2 — приращения давления при включении магнитного поля и сохранении равновесия. Наконец, может представиться случай, когда изменение давления δc_2 равно нулю. Тогда изменение давления

$$\delta c_1 = \frac{k_2 - k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right). \quad (6)$$

По этой формуле обсчитывал свои опыты Квинке. Выполнения положенных в основу ее предположений он добивался двумя различными способами. При одной методике он брал стеклянную U-образную трубку, частично заполненную исследуемой жидкостью, и помещал одно колено между полюсами электромагнита, а другое располагал снаружи межполюсного зазора. Исследуемой жидкости при такой схеме опыта соответствует индекс 1, а атмосферному воздуху — индекс 2. При другой методике Квинке заполнял исследуемой жидкостью большую часть пространства между расположенными горизонтально

[3] Квинке вычислял по своим измерениям величину, обозначенную им через r. С введенным нами k она связана соотношением $k=r2g$.

поверхностями полюсов. Остальное пространство занимал плоский воздушный пузырь, соприкасавшийся с поверхностями обоих полюсов и сообщавшийся с находившимся вне межполюсного зазора манометром. В этом случае исследуемой жидкости соответствует индекс 2, а атмосферному воздуху — индекс 1.

3. Приведенные выше теоретические соображения остаются в силе и в том случае, если вместо магнитной действует электрическая сила, и Квинке с помощью опытов, совершенно аналогичных только что упомянутым мной опытам с магнитом, определил также диэлектрические постоянные различных изолирующих жидкостей.

Между двумя горизонтальными пластинами конденсатора, помещенными в сосуд с исследуемой жидкостью, Квинке вводил плоский воздушный пузырь, который соприкасался с обеими пластинами и через трубку, выходное отверстие которой находилось в верхней пластине, сообщался с манометром, находившимся вне сосуда. Если конденсатор был заряжен, то манометр показывал увеличение давления. Выражение (6) остается в силе и в этом случае, хотя величины k_1 и k_2 нельзя считать бесконечно малыми, если только толщина воздушного пузыря (и, следовательно, расстояние между пластинами конденсатора) бесконечно мало по сравнению с его горизонтальными размерами.

Пусть $x=0$ и $x=\alpha$ — уравнения внутренних поверхностей двух пластин конденсатора, $\varphi=0$ и $\varphi=P$ — значения потенциала на них, когда конденсатор заряжен. Предположим, что все поверхности, ограничивающие рассматриваемые гетерогенные тела, имеют форму поверхностей вращения, общая ось которых совпадает с осью x. Современные средства анализа не позволяют установить, как ведет себя φ как функция от x, y, z вблизи края воздушного пузыря, однако известно следующее: φ всюду есть функция от x и $\sqrt{y^2+z^2}$; при $x=0$ и $x=\alpha$ (на поверхностях пластин конденсатора) $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial z$ обращаются в нуль, а на расстоянии от края пузыря, достаточно большом по сравнению с α, как в самом пузыре, так и в окружающей жидкости

$$\varphi = Px/\alpha. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь бесконечно малый объем пространства, ограниченный: плоскостями $x=0$ и $x=\alpha$; частью плоскости xy, в которой $y>0$; плоскостью, проходящей через ось x, образующей бесконечно малый угол ϑ и заключенный между положительными частями осей y и z; двумя цилиндрическими поверхностями радиусов β_1 и β_2, описанными вокруг оси x.

Эти радиусы должны быть выбраны так, чтобы первая цилиндрическая поверхность в воздухе, вторая — во внешней жидкости находились в такой области, в которой φ изменяется по закону (7). Разность $\beta_2-\beta_1$ при этом должна быть бесконечно большой по сравнению с α, но бесконечно малой по сравнению со значениями β_1 и β_2.

Следует заметить, что сумма составляющих вдоль оси y сил, действующих на массу, находящуюся внутри указанного пространства, обращается в нуль. Это позволяет выразить электрические силы через действующие на наружной поверхности силы давления, составляющие которых можно обозначить через A_x, B_x, ...

На плоскостях $x=0$ и $x=\alpha$ производная $\partial\varphi/\partial y$ обращается в нуль, и так как всегда

$$B_z = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

то те части плоскостей $x=0$ и $x=\alpha$, которые ограничивают рассматриваемое пространство, не дают вклада в интересующую нас сумму.

Вклад цилиндрических поверхностей с радиусами, обозначенными через β_1 и β_2 (если учитывать только величины старшего порядка и относить индекс 1 к воздуху, а индекс 2 — к окружающей жидкости), равен

$$\alpha\beta_1\vartheta\,\frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2}\,\frac{P^2}{\alpha^2}. \tag{8}$$

Часть плоскости xy, ограничивающая рассматриваемое пространство, не дает вклада в вычисляемую нами сумму, так как во всех случаях

$$B_z = -\left(\frac{1}{4\pi} + k\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

а на плоскости xy производная $\partial\varphi/\partial z$ обращается в нуль.

Последняя из поверхностей, ограничивающих рассматриваемое пространство, имеет величину $\alpha\,(\beta_2-\beta_1)$, а составляющая вдоль оси y давления, действующего на единицу этой поверхности, равна $C_z\vartheta$, где C_z надлежит вычислять в предположении, что $z=0$. Величина C_z по порядку величины равна P^2/α^2, поэтому вклад последней поверхности в сумму, о которой идет речь, бесконечно мал по сравнению с (8).

Итак, условие равновесия, которое требовалось вывести, имеет следующий вид:

$$\alpha\beta_1\vartheta\,\frac{k_1 - k_2 - k_1' + k_2'}{2}\,\frac{P^2}{\alpha^2} + \beta_1\vartheta\int_0^\alpha (p_1 - p_2)\,dx = 0.$$

Если подставить вместо p_1 и p_2 их выражения из (1), то из уравнения, которое при этом получится (в предположении, что электрические силы не действуют, δc_1 и δc_2 имеют такой же смысл, как и при обсуждении магнитных опытов Квинке, и $\delta c_2=0$) следует, что

$$\delta c_1 = \frac{k_2 - k_1}{2}\,\frac{P^2}{\alpha^2}$$

Кроме того, для δc_1 остается в силе выражение (6).

4. В зазор между пластинами своего конденсатора, разделенными изолирующей жидкостью, Квинке вводил воздушный пузырь, соприкасавшийся только с верхней пластиной. Если конденсатор был заряжен, то пузырь растягивался в направлении силовых линий и сжимался в перпендикулярных направлениях.

Это явление не наблюдалось на воздушном пузыре, помещенном между полюсами электромагнита, и висящие капли различных магнитных жидкостей также не обнаруживали никакой деформации при возбуждении магнетизма. Мы рассмотрим теоретически схему опыта, аналогичную описанной выше и легко поддающуюся расчету.

Пусть пространство, коль скоро оно входит в рассмотрение, заполнено двумя жидкостями 1 и 2, разделенными в отсутствие электрических или магнитных сил сферической поверхностью радиуса R. Чтобы поверхность раздела имела такую форму, сила тяжести не должна действовать. Если возбуждаются электрические или магнитные силы, то они порождают потенциал, изменяющийся во внешней жидкости (жидкости 2) на большом расстоянии от жидкости 1 по закону

$$\varphi_2 = -a_2 x, \tag{9}$$

где a_2 — некоторая постоянная. Требуется определить форму, принимаемую граничной поверхностью обеих жидкостей. Для этой поверхности из соотношения (4) следует условие

$$\delta c_1 = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}-\frac{2}{R}\right)-\frac{2\pi(k_2-k_1)^2}{1+4\pi k_2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)^2+ \\ +\frac{k_2-k_1}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right). \tag{10}$$

Жидкость 1 имеет центр, именно в этой точке лежит начало координат. Поверхность раздела, которую требуется найти, есть поверхность вращения с осью, совмещенной с осью x, поэтому ее сечение плоскостью xy описывается уравнением

$$\pm\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)=\frac{1}{y}\,\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}+\frac{1}{dy}\,d\,\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Положив

$$x=\rho\cos\vartheta, \qquad y=\rho\sin\vartheta,$$

приняв ϑ за независимую переменную и обозначив

$$\frac{d\rho}{d\vartheta}=\rho', \qquad \frac{d^2\rho}{d\vartheta^2}=\rho'',$$

преобразуем это уравнение к виду

$$\pm\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)=\frac{\rho'\cos\vartheta-\rho\sin\vartheta}{\rho\sin\vartheta\sqrt{\rho'^2+\rho^2}}+\frac{\rho''\rho-2\rho'^2-\rho^2}{(\rho'^2+\rho^2)^{3/2}}.$$

Пусть теперь

$$\rho=R(1+u)$$

и u — бесконечно малая величина. Тогда, устранив двузначность в выборе знаков условием обращения u в нуль при $r'=r''=R$, получим

$$\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}-\frac{2}{R}=-\frac{1}{R}\left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+\operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{du}{d\vartheta}+2u\right)=-\frac{1}{R}\left((1-\mu^2)\frac{d^2u}{d\mu^2}-2\mu\frac{du}{d\mu}+2u\right), \tag{11}$$

где $\mu=\cos\vartheta$.

Функции φ_1 и φ_2 определяются из дифференциального уравнения $\Delta\varphi=0$, которому они должны удовлетворять, условия (9) и условий (3). Последние

(поскольку u, по предположению, бесконечно мало) должны выполняться при $\rho = R$. Отсюда получаем

$$\varphi_1 = -a_1 \rho \mu, \quad \varphi_2 = -\left(a_2 \rho + \frac{b_2 R^3}{\rho^2}\right) \mu,$$

где

$$a_1 = \frac{3(1 + 4\pi k_2)}{3 + 4\pi(k_1 + 2k_2)} a_2, \qquad b_2 = \frac{4\pi(k_2 - k_1)}{3 + 4\pi(k_1 + 2k_2)} a_2$$

и

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)^2 = a_1^2 \mu^2, \qquad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)^2 = a_1^2.$$

Подставляя эти значения, а также выражение (11) в условие (10), приходим к уравнению

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 u}{d\mu^2} - 2\mu \frac{du}{d\mu} + 2u = A - B\mu^2,$$

где

$$A = -\frac{2R}{H}\left(\delta c_1 + \frac{k - k_2}{2} a_1^2\right), \qquad B = \frac{R}{H} \frac{4\pi (k_1 - k_2)^2}{1 + 4\pi k_2} a_1^2.$$

Если бы A и B были равны нулю, то это наше уравнение было бы дифференциальным уравнением для сферических функций первого порядка от одного аргумента. Частное решение полученного уравнения имеет вид

$$u = \frac{A}{2} - \frac{B}{4}(1 - \mu^2).$$

Общее решение мы найдем, прибавив к частному решению выражения

$$\mu \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \mu \ln [(1 + \mu)/(1 - \mu)] - 1,$$

предварительно умноженные на произвольные постоянные. Но эти постоянные в нашем случае следует выбрать равными нулю, так как u при $\mu = +1$ и $\mu = -1$ должно оставаться конечным и принимать одно и то же значение — *одно и то же*, так как начало координат совмещено с центром жидкости 1. Предположение о несжимаемости жидкости 1 приводит к соотношению между постоянными A и B: действительно, из него следует, что

$$\int_{-1}^{+1} u \, d\mu = 0, \quad \text{т. е.} \quad A = \frac{1}{3} B,$$

и, таким образом,

$$u = \frac{B}{4}\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Это означает, что жидкость 1 испытывает растяжение в

$$\frac{B}{6}=\frac{R}{3H}\,\frac{2\pi(k_1-k_2)^2}{1+4\pi k_2}\,a_1^2$$

раз вдоль силовых линий и вдвое меньше сжатие в перпендикулярных направлениях. Эти растяжения и сжатия пропорциональны *квадрату* разности k_1-k_2, чем и объясняется, почему они наблюдаемы в электрическом поле (где разность k_1-k_2 достигает большой величины) и становятся ненаблюдаемыми в магнитном поле, где разность k_1-k_2 необычайно мала.

5. Вычислим, наконец, деформацию, испытываемую железным шаром, если его намагничивать постоянной магнитной силой.

В этом случае на большом расстоянии от шара

$$\varphi=-Jx,$$

J — интенсивность намагничивающей силы, направленной вдоль оси x. Для окружающего воздуха мы положили $k=0$, а знак k отнесен к железу. Тогда внутри шара

$$\varphi=-\frac{J}{1+\frac{4\pi}{3}k}\,x.$$

Отсюда следует, что силы, обозначенные в моей работе [4] через A, B, C, обращаются в нуль, а обозначенные через $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ силы давления, если начало координат совпадает с центром шара, радиус которого обозначен через R, принимают значения

$$\begin{aligned}
\bar{A}&=\frac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2R^3}\left(2\pi k^2x^3+\frac{k-k'-k''}{2}R^2x\right),\\
\bar{B}&=\frac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2R^3}\left(2\pi k^2x^2y+\frac{k-k'}{2}R^2y\right),\\
\bar{C}&=\frac{J^2}{\left(1+\frac{4\pi}{3}k\right)^2R^3}\left(2\pi k^2x^2z+\frac{k-k'}{2}R^2z\right).
\end{aligned}\tag{12}$$

Если обозначить через u, v, w компоненты отдачи, испытываемой шаром вследствие намагничения материальной точки с координатами x, y, z, и положить

$$\begin{aligned}
X_x&=-2K\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\Theta\sigma\right), & Y_z&=Z_y=-K\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
Y_y&=-2K\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\Theta\sigma\right), & Z_x&=X_z=-K\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),\\
Z_z&=-2K\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\Theta\sigma\right), & X_y&=Y_x=-K\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned}\tag{13}$$

[4] *Kirchhoff G.* // Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1884. Febr. S. 148.

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

то вследствие того, что силы A, B, C равны нулю, получим

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

а при $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$R\bar{A} = -(xX_x + yX_y + zX_z),$$
$$R\bar{B} = -(xY_x + yY_y + zY_z), \tag{15}$$
$$R\bar{C} = -(xZ_x + yZ_y + zZ_z).$$

Из уравнений (12)—(15) требуется найти u, v, w. Выражения для этих компонент, так же как и выражения (12) для $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, можно разложить на три части, первая из которых содержит множитель $2\pi k^2$, вторая — множитель $(k-k')/2$ и третья — множитель $-k''/2$. Таким образом, u, v, w можно представить в виде

$$u = \frac{J^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 u_1 + \frac{k-k'}{2}u_2 - \frac{k''}{2}u_3\right),$$
$$v = \frac{J^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 v_1 + \frac{k-k'}{2}v_2 - \frac{k''}{2}v_3\right), \tag{16}$$
$$w = \frac{J^2}{\left(1 + \frac{4\pi}{3}k\right)^2}\left(2\pi k^2 w_1 + \frac{k-k'}{2}w_2 - \frac{k''}{2}w_3\right).$$

Функции u_1, v_1, w_1, так же как u_2, v_2, w_2 или u_3, v_3, w_3, должны удовлетворять уравнениям, которые получаются из уравнений, выведенных для u, v, w, если выражения (12) заменить либо

$$\bar{A} = \frac{x^3}{R^3}, \quad \bar{B} = \frac{x^3 y}{R^3}, \quad \bar{C} = \frac{x^2 z}{R^3}, \tag{17}$$

либо

$$\bar{A} = \frac{x}{R}, \quad \bar{B} = \frac{y}{R}, \quad \bar{C} = \frac{z}{R}, \tag{18}$$

либо

$$\bar{A} = \frac{x}{R}, \quad \bar{B} = 0, \quad \bar{C} = 0. \tag{19}$$

Условиям на u_1, v_1, w_1 можно удовлетворить, приняв, что

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1x^3 + b_1(y^2+z^2)x + c_1R^2x, \\ v_1 &= a_1'x^2y + b_1'(y^2+z^2)y + c_1'R^2y, \\ w_1 &= a_1'x^2z + b_1'(y^2+z^2)z + c_1'R^2z, \end{aligned} \tag{20}$$

если подходящим образом выбрать шесть постоянных a_1, b_1, c_1, a_1', b_1', c_1'. Приняв (20), получим из (13)

$$\begin{aligned} \sigma &= (3a_1+2a_1')x^2 + (b_1+4b_1')(y^2+z^2) + (c_1+2c_1')R^2, \\ X_x &= -2K(3a_1x^2 + b_1(y^2+z^2) + c_1R^2 + \Theta\sigma), \\ Y_y &= -2K(a_1'x^2 + b_1'(3y^2+z^2) + c_1'R^2 + \Theta\sigma), \\ Z_z &= -2K(a_1'x^2 + b_1'(y^2+3z^2) + c_1'R^2 + \Theta\sigma), \\ Y_z &= Z_y = -4Kb_1'yz, \qquad Z_x = X_z = -2K(a_1'+b_1)zx, \\ X_y &= Y_x = -2K(a_1'+b_1)xy. \end{aligned}$$

Уравнения (14) при этом сводятся к двум соотношениям между введенными постоянными:

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_1' + b_1 + \Theta(3a_1+2a_1') &= 0, \\ a_1' + b_1 + 8b_1' + 2\Theta(b_1+4b_1') &= 0. \end{aligned}$$

Из (15) с учетом (17), если в выражения для X_x, Y_y, Z_z вместо R^2 подставить $x^2+y^2+z^2$, получим

$$\begin{aligned} 3a_1 + c_1 + \Theta(3a_1+2a_1'+c_1+2c_1') &= 1/2KR^2, \\ a_1' + 2b_1 + c_1 + \Theta(b_1+4b_1'+c_1+2c_1') &= 0, \\ 2a_1' + b_1 + c_1' + \Theta(3a_1+2a_1'+c_1+2c_1') &= 1/2KR^2, \\ 3b_1' + c_1' + \Theta(b_1+4b_1'+c_1+c_1') &= 0. \end{aligned}$$

Итак, для шести неизвестных мы имеем шесть уравнений. Они допускают следующее решение:

$$\begin{gathered} b_1 = (7+8\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}, \quad a_1' = -(7+6\Theta)\frac{a_1}{4\Theta}, \quad b_1' = -2\Theta\frac{a_1}{4\Theta}, \\ c_1 = -\frac{7+31\Theta+32\Theta^2}{1+3\Theta}\frac{a_1}{4\Theta}, \quad c_1' = \frac{6\Theta+16\Theta^2}{1+3\Theta}\frac{a_1}{4\Theta} \end{gathered} \tag{21}$$

и

$$1/KR^2 = -(7+19\Theta)a_1/4\Theta.$$

Положив

$$u_2 = a_2x, \qquad v_2 = a_2y, \qquad w_2 = a_2z, \tag{22}$$

получим из (13)

$$\begin{gathered} \sigma = 3a_2, \\ X_x = Y_y = Z_z = -2K(1+3\Theta)a_2, \qquad Y_z = Z_x = X_y = 0, \end{gathered}$$

при этом уравнения (14) выполняются автоматически, а из (15) с помощью (18) находим

$$a_2 = 1/2K(1+3\Theta). \tag{23}$$

Наконец, положив

$$u_3 = a_3 x, \quad v_3 = b_3 y, \quad w_3 = b_3 z, \tag{24}$$

придем к

$$\sigma = a_3 + 2b_3,$$
$$X_x = -2K(a_3 + \Theta(a_3 + 2b_3)),$$
$$Y_y = Z_z = -2K(b_3 + \Theta(a_3 + 2b_3)), \quad Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

И в этом случае уравнения (14) выполняются автоматически, а из (15) с учетом (19) находим

$$a_3 = (1+2\Theta)/2K(1+3\Theta), \quad b_3 = -\Theta/2K(1+3\Theta). \tag{25}$$

Подставляя в (16) выражения (20)—(25), получаем решение поставленной задачи.

Чтобы найти численные значения компонент отдачи u, v, w, необходимо сначала знать величину k. В теории, которая положена в основу настоящей работы, k считается постоянной, однако известно, что в действительности эта величина подвержена значительным изменениям. По-видимому, при произвольной форме железного тела и произвольно заданных намагничивающих силах мы окажемся ближе к действительности, если предположим, что k — функция аргумента

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2},$$

вид которой подлежит определению из наблюдений. Если этот аргумент обозначить через $\mathfrak{K}$ и выбрать за единицу $г^{1/2}\,см^{-1/2}с^{-1}$, т. е. величину, в десять раз большую единицы, выбранной Гауссом для магнитных сил, то из измерений Столетова [5] следует, что k возрастает от 21,5 до 174, когда $\mathfrak{K}$ возрастает от 0,43 до 3,2, и убывает до 42,1 при дальнейшем возрастании $\mathfrak{K}$ до 31.

Для железного шара, находящегося под действием постоянной намагничивающей силы J, формулы, выведенные в предположении, что k — постоянная, верны даже при учете изменяемости k, только значение k следует выбирать различным в зависимости от значения J. Соответствующее значение k находится из связи между k и $\mathfrak{K}$ и соотношения

$$\mathfrak{K} = \frac{J}{1 + \frac{4\pi}{3}k}.$$

При J=39,1 мы получили бы k=21,4; при J=2340 k=175 и при J=5450 k=42,1.

[5] *Stoletow A. G.* // Ann. Phys. 1872. Bd 146. S. 461.

Относительно значений k' и k'' ничего неизвестно. Можно предположить, однако, что они не больше k, и считать, что сила J заключена между наименьшим и наибольшим из приведенных выше значений. Тогда для вычисления компонент отдачи u, v, w, задаваемых выражениями (16), более точные значения k' и k'', а также k не требуются. Величину k можно считать бесконечно малой, тогда

$$u=\frac{9}{8\pi}J^2u_1^2,\qquad v=\frac{9}{8\pi}J^2v_1,\qquad w=\frac{9}{8\pi}J^2w_1. \tag{26}$$

Если E — модуль упругости железа, то

$$E=2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}.$$

Полагая вслед за Пуассоном

$$\Theta=\frac{1}{2},$$

получаем из (21)

$$a_1=-\frac{5}{33}\frac{1}{ER^2},\qquad b_1=-\frac{5}{6}\frac{1}{ER^2},\qquad c_1=\frac{61}{66}\frac{1}{ER^2},$$

$$a_1'=\frac{25}{33}\frac{1}{ER^2},\qquad b_1'=\frac{5}{66}\frac{1}{ER^2},\qquad c_1'=-\frac{7}{33}\frac{1}{ER^2}.$$

Таким образом, (20) и (21) приводят к выражениям

$$u=\frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}(-10x^3-55(y^2+z^2)x+61R^2x),$$

$$v=\frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}(50x^2y+5(y^2+z^2)y-14R^2y),$$

$$w=\frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}(50x^2z+5(y^2+z^2)z-14R^2z).$$

Для коэффициента объемного расширения σ выражение имеет вид

$$\sigma=\frac{3}{176\pi}\frac{J^2}{ER^2}(70x^2-35(y^2+z^2)-33R^2).$$

Радиус шара, направление которого совпадает с направлением намагничивающей силы, испытывает удлинение

$$\frac{153}{176\pi}\frac{J^2}{E}R,$$

а радиус, перпендикулярный этой силе, — сокращение

$$\frac{27}{176\pi}\frac{J^2}{E}R.$$

Магнитное поле, как предполагалось, создается электрическим током, текущим по спирали, которая охватывает шар и имеет такую длину, что магнит-

ную силу тока в пространстве, занимаемом шаром, можно считать постоянной. Если n — число витков, приходящихся на 1 см вдоль оси спирали, i — сила тока, выраженная в амперах, то

$$J = \frac{4\pi}{10} ni \cdot \text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{-1/2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Если вместо модуля упругости железа подставить величину

$$E = 1{,}88 \cdot 10^{12} \text{ г} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},$$

то удлинение радиуса шара, параллельного оси спирали, составит

$$n^2 i^2 \cdot 2{,}32 \cdot 10^{-13} R.$$

Еще в 1847 г. Джоуль [6] измерил удлинения железных стержней, намагничиваемых в спирали, — удлинения, наибольшие из которых составили 1,4 миллионных длины. Выполнить аналогичные измерения на шаре не представляется возможным из-за малости деформаций.

---

[6] *Joule J. P.* // Phil. Mag. 1847. Vol. 30. P. 76; Vol. 30. P. 225.

VI

РАЗНЫЕ РАБОТЫ

25. О ДВИЖЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ *

В своем «Трактате по натуральной философии» [1] Томсон и Тэт [[1]] рассмотрели задачу о движении тела вращения в жидкости. К числу условий, при которых они решили эту задачу, относились, в частности, следующие: тело не вращается относительно своей оси, а сама ось не выходит из некоторой неподвижной плоскости. Я обнаружил, что задача разрешима и без ограничений, введенных Томсоном и Тэтом, и так же, как и в случае ограничений, сводится к эллиптическим интегралам.

При выводе дифференциальных уравнений движения необходимо принять следующие допущения. Твердое тело произвольной формы с произвольно распределенной массой находится в несжимаемой однородной жидкости, ограниченной поверхностью тела и бесконечно удаленной замкнутой неподвижной поверхностью. Трения в жидкости нет. На тело действуют силы, обладающие потенциалом, который зависит только от положения тела. На части жидкости никакие силы не действуют. Вихревых движений в жидкости не существует. Скорости всюду непрерывно зависят от координат точки. Это предположение позволяет исключить случай, когда из поверхности тела исходит поверхность, которая, подобно поверхности струи, движущейся в той же жидкости, разделяет части жидкости с различными скоростями.

Наконец, состояние движения системы возникает из состояния покоя под действием сил, приложенных к телу. Это предположение ограничивает задачу в случае, когда пространство, заполненное жидкостью, многосвязно, например в случае тела, имеющего форму кольца.

Интегрирование дифференциальных уравнений при таких допущениях становится возможным, если, кроме того, предположить, что действующие на тело силы равны нулю, поверхность тела имеет форму поверхности вращения и распределение массы симметрично относительно оси вращения.

§ 1. Дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости выводятся из принципа Гамильтона. Пусть Ω — потенциал действующих на тело сил, T — живая сила всей системы, t — время. Тогда из принципа Гамильтона следует, что

$$\delta \int (\Omega + T)\, dt = 0. \tag{1}$$

Пусть x, y, z — координаты точки тела относительно скрепленной с ним системы координат; ξ, η, ζ — координаты той же точки в системе координат, неподвижной относительно пространства, и

* Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 376—403. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] *Thomson W., Tait P. G.* Treatise on natural philosophy. Oxford, 1867. P. 264.

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \qquad \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$
$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z.$$

Двенадцать величин α, β, γ зависят от времени t. Найти эти функции и составляет нашу задачу. Пусть далее

$$u = \alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt},$$
$$v = \alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt},$$
$$w = \alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt},$$
$$p = \alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt},$$
$$q = \alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt},$$
$$r = \alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt},$$

т. е. обозначим через u, v, w скорости начала координат x, y, z по направлениям осей x, y, z, через p, q, r — угловые скорости тела относительно осей x, y, z. Тогда живая сила тела есть *однородная* функция второй степени от u, v, w, p, q, r с постоянными коэффициентами. Требуется доказать, что при принятых нами предположениях живая сила жидкости также является однородной функцией второй степени от тех же переменных с постоянными коэффициентами.

Для этого обозначим через x, y, z координаты точки пространства, занимаемого в момент времени t жидкостью, относительно системы координат, жестко скрепленной с телом в том положении, которое оно занимает в момент времени t. В силу принятых нами предположений компоненты скорости в момент времени t в рассматриваемой точке равны $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$, где φ — потенциал скорости, который во всей области, занимаемой жидкостью, является непрерывной и однозначной функцией от x, y, z и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Если N — нормаль к элементу поверхности, то для всех элементов поверхности, ограничивающей жидкость на бесконечности, выполняется условие $\partial\varphi/\partial N = 0$, а для каждого элемента поверхности тела производная $\partial\varphi/\partial N$ равна компоненте скорости прилегающей к элементу части тела в направлении нормали N.

Если движение тела задано, т. е. известны u, v, w, p, q, r, то по известной теореме потенциал φ определен с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Следовательно, с точностью до этой постоянной φ — функция от u, v, w, p, q, r, и живая сила жидкости есть также функция этих шести переменных. В том, что живая сила жидкости есть однородная функция второй степени, мы убедимся, если потенциал φ, по доказанному, будет линейной однородной

функцией от u, v, w, p, q, r. Правильность последнего утверждения доказывают следующие соображения.

Компоненты скорости точки тела относительно осей ξ, η, ζ равны соответственно

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}.$$

Относительно осей x, y, z компоненты скорости равны

$$\alpha_1 \frac{d\xi}{dt} + \beta_1 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\zeta}{dt},$$

$$\alpha_2 \frac{d\xi}{dt} + \beta_2 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\zeta}{dt},$$

$$\alpha_3 \frac{d\xi}{dt} + \beta_3 \frac{d\eta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\zeta}{dt},$$

или

$$u + ry - qz, \qquad v + pz - rx, \qquad w + qx - py, \tag{2}$$

как следует из уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\alpha_1}{dt} x + \frac{d\alpha_2}{dt} y + \frac{d\alpha_3}{dt} z,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\beta_1}{dt} x + \frac{d\beta_2}{dt} y + \frac{d\beta_3}{dt} z,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} + \frac{d\gamma_1}{dt} x + \frac{d\gamma_2}{dt} y + \frac{d\gamma_3}{dt} z$$

и из дифференциальных уравнений, задающих u, v, w, p, q, r, и соотношений между α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3. Условие, которому потенциал φ должен удовлетворять на поверхности тела, имеет, таким образом, следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = (u + ry - qz)\cos(N, x) + (v + pz - rx)\cos(N, y) + (w + qx - py)\cos(N, z).$$

Всем условиям для φ можно удовлетворить, положив

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 \tag{3}$$

и выбрав функции φ_1, φ_2, ..., φ_6 так, чтобы каждая из них удовлетворяла всем условиям, наложенным на φ, за исключением того, которое относится к поверхности тела, где должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial N} &= \cos(N, x), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial N} &= z\cos(N, y) - y\cos(N, z), \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial N} &= \cos(N, y), & \frac{\partial \varphi_5}{\partial N} &= x\cos(N, z) - z\cos(N, x), \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial N} &= \cos(N, z), & \frac{\partial \varphi_6}{\partial N} &= y\cos(N, x) - x\cos(N, y). \end{aligned} \tag{4}$$

Функции φ_1, φ_2, ..., φ_6 не зависят от u, v, w, p, q, r, поэтому φ можно выбрать линейной однородной функцией от этих величин. Кроме того, φ_1,

$\varphi_2, \ldots, \varphi_6$, помимо x, y, z, зависят только от формы тела. Отсюда следует, что живая сила жидкости есть однородная функция второй степени от u, v, w, p, q, r с коэффициентами, зависящими от формы тела и плотности жидкости.

§ 2. В силу принятых нами предположений живая сила тела и жидкости, обозначенная в уравнении (1) через T, есть однородная функция второй степени от u, v, w, p, q, r с постоянными коэффициентами. По предположению, Ω есть функция от координат α, β, γ и косинусов α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3. Между 18 переменными, от которых зависит $\Omega+T$, существуют 12 соотношений, задаваемых условиями: 6 дифференциальных уравнений для u, v, w, p, q, r и 6 соотношений между 9 косинусами α_1, β_1, ... По правилам вариационного исчисления, чтобы разложить уравнение (1) в ряд, $\Omega+T$ необходимо дополнить взятыми с неопределенными коэффициентами выражениями, которые должны обратиться в нуль в силу наложенных условий, и, если полученную сумму обозначить через S, найти вариацию

$$\delta \int S\, dt = 0$$

в предположении, что переменные и коэффициенты являются функциями, не зависящими от t. Вместе с 12 условиями 18 уравнений, возникающих из уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \frac{ds}{dt}}\right),$$

если вместо S подставить разложение в ряд по перечисленным нами 18 переменным, дают требуемое разложение.

Ниже приведены условия и соответствующие коэффициенты.

Условия	Коэффициенты
$\alpha_1 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma}{dt} - u = 0$	U
$\alpha_2 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma}{dt} - v = 0$	V
$\alpha_3 \frac{d\alpha}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma}{dt} - w = 0$	W
$\alpha_2 \frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_3}{dt} - p = 0$	P
$\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt} - q = 0$	Q
$\alpha_1 \frac{d\alpha_2}{dt} + \beta_1 \frac{d\beta_2}{dt} + \gamma_1 \frac{d\gamma_2}{dt} - r = 0$	R
$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\lambda_{11}$
$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\lambda_{22}$
$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - 1 = 0$	$\frac{1}{2}\lambda_{33}$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0 \qquad \lambda_{23}=\lambda_{32}\\
&\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0 \qquad \lambda_{31}=\lambda_{13}\\
&\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \qquad \lambda_{12}=\lambda_{21}.
\end{aligned}
$$

Они приводят к следующим 18 уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial u}=U, \quad \frac{\partial T}{\partial p}=P, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}=\frac{d}{dt}(\alpha_1 U+\alpha_2 V+\alpha_3 W),\\
&\frac{\partial T}{\partial v}=V, \quad \frac{\partial T}{\partial q}=Q, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}=\frac{d}{dt}(\beta_1 U+\beta_2 V+\beta_3 W),\\
&\frac{\partial T}{\partial w}=W, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=R, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}=\frac{d}{dt}(\gamma_1 U+\gamma_2 V+\gamma_3 W),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_1}+U\frac{d\alpha}{dt}+R\frac{d\alpha_2}{dt}+\lambda_{11}\alpha_1+\lambda_{12}\alpha_2+\lambda_{13}\alpha_3=\frac{d}{dt}(\alpha_3 Q),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_1}+U\frac{d\beta}{dt}+R\frac{d\beta_2}{dt}+\lambda_{11}\beta_1+\lambda_{12}\beta_2+\lambda_{13}\beta_3=\frac{d}{dt}(\beta_3 Q),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_1}+U\frac{d\gamma}{dt}+R\frac{d\gamma_2}{dt}+\lambda_{11}\gamma_1+\lambda_{12}\gamma_2+\lambda_{13}\gamma_3=\frac{d}{dt}(\gamma_3 Q),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_2}+V\frac{d\alpha}{dt}+P\frac{d\alpha_3}{dt}+\lambda_{21}\alpha_1+\lambda_{22}\alpha_2+\lambda_{23}\alpha_3=\frac{d}{dt}(\alpha_1 R),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_2}+V\frac{d\beta}{dt}+P\frac{d\beta_3}{dt}+\lambda_{21}\beta_1+\lambda_{22}\beta_2+\lambda_{23}\beta_3=\frac{d}{dt}(\beta_1 R),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_2}+V\frac{d\gamma}{dt}+P\frac{d\gamma_3}{dt}+\lambda_{21}\gamma_1+\lambda_{22}\gamma_2+\lambda_{23}\gamma_3=\frac{d}{dt}(\gamma_1 R),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_3}+W\frac{d\alpha}{dt}+Q\frac{d\alpha_1}{dt}+\lambda_{31}\alpha_1+\lambda_{32}\alpha_2+\lambda_{33}\alpha_3=\frac{d}{dt}(\alpha_2 P),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_3}+W\frac{d\beta}{dt}+Q\frac{d\beta_1}{dt}+\lambda_{31}\beta_1+\lambda_{32}\beta_2+\lambda_{33}\beta_3=\frac{d}{dt}(\beta_2 P),\\
&\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_3}+W\frac{d\gamma}{dt}+Q\frac{d\gamma_1}{dt}+\lambda_{31}\gamma_1+\lambda_{32}\gamma_2+\lambda_{33}\gamma_3=\frac{d}{dt}(\gamma_2 P).
\end{aligned}
$$

Функции V, U, W, P, Q, R, найденные из первых 6 уравнений, подставим в остальные уравнения. При этом 3 следующих уравнения сразу же принимают вид, годный для их использования в дальнейшем, а из остальных 9 уравнений необходимо предварительно исключить коэффициенты λ. Эти 3 уравнения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha},\\
&\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \beta},\\
&\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u}+\gamma_2\frac{\partial T}{\partial v}+\gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}.
\end{aligned}
\tag{5a}
$$

В правых частях этих уравнений стоят суммы компонент сил, действующих на тело, по направлениям осей ξ, η, ζ.

Если уравнения (5a) умножить соответственно либо на α_1, β_1, γ_1, либо на α_2, β_2, γ_2, либо на α_3, β_3, γ_3 и каждый раз сложить, то с учетом соотношений между этими 9 косинусами и величинами p, q, r получим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} + \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} + \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma},\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} + \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}.
\end{aligned} \tag{5b}$$

Чтобы исключить величины λ из 9 уравнений, в которые они входят, можно умножить эти уравнения соответственно либо на 0, γ_1, $-\beta_1$, 0, γ_2, $-\beta_2$, 0, γ_3, $-\beta_3$, либо на $-\gamma_1$, 0, α_1, $-\gamma_2$, 0, α_2, $-\gamma_3$, 0, α_3, либо на β_1, $-\alpha_1$, 0, β_2, $-\alpha_2$, 0, β_3, $-\alpha_3$, 0 и каждый раз сложить. Введем для краткости обозначения

$$\begin{aligned}
M_\zeta &= \gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} - \beta\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma} + \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} - \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1} + \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} - \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2} + \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} - \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3},\\
M_\eta &= \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma} - \gamma\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} + \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3},\\
M_\zeta &= \beta\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} + \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} - \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} + \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3} - \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3},
\end{aligned}$$

т. е. обозначим через M_ξ, M_η, M_ζ моменты действующих на тело сил относительно осей ξ, η, ζ и предположим, что, повернув оси x, y, z, их можно сделать параллельными осям ζ, η, ζ так, что

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \beta_1 &= \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \gamma_1 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\\
\alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3,\\
\alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.
\end{aligned}$$

Тогда указанным выше способом после некоторых преобразований получим с учетом уравнений (5a)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{(\beta_1\gamma - \gamma_1\beta)\frac{\partial T}{\partial u} + (\beta_2\gamma - \gamma_2\beta)\frac{\partial T}{\partial v} + (\beta_3\gamma - \gamma_3\beta)\frac{\partial T}{\partial w} + \right.\\
&\qquad\left. + \alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right\} = M_\zeta,\\
&\frac{d}{dt}\left\{(\gamma_1\alpha - \alpha_1\gamma)\frac{\partial T}{\partial u} + (\gamma_2\alpha - \alpha_2\gamma)\frac{\partial T}{\partial v} + (\gamma_3\alpha - \alpha_3\gamma)\frac{\partial T}{\partial w} + \right.\\
&\qquad\left. + \beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right\} = M_\eta,\\
&\frac{d}{dt}\left\{(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1)\frac{\partial T}{\partial u} + (\alpha_2\beta - \alpha\beta_2)\frac{\partial T}{\partial v} + (\alpha_3\beta - \beta_3\alpha)\frac{\partial T}{\partial w} + \right.\\
&\qquad\left. + \gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right\} = M_\zeta.
\end{aligned} \tag{6a}$$

Умножая 9 уравнений, в которые входят λ, либо на 0, 0, 0, α_3, β_3, γ_3, $-\alpha_2$, $-\beta_2$, $-\gamma_2$, либо на $-\alpha_3$, $-\beta_3$, $-\gamma_3$, 0, 0, 0, α_1, β_1, γ_1, либо на α_2, β_2, γ_2, $-\alpha_1$, $-\beta_1$, $-\gamma_1$, 0, 0, 0 и суммируя каждый раз, мы исключаем λ и приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3} - \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} + \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} - \\
&\qquad - \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} + \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} + \alpha_3\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} - \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_3} + \\
&\qquad + \beta_3\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} - \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_3} + \gamma_3\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_3}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_1\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_2} - \alpha_2\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_1} + \\
&\qquad + \beta_1\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_2} - \beta_2\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_1} + \gamma_1\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_1}.
\end{aligned} \tag{6b}$$

§ 3. Предположим теперь, что на тело не действуют никакие силы и, следовательно, потенциал Ω можно положить равным нулю. Уравнения (5в) и (6в) принимают тогда следующий простой вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Три общих интеграла этих уравнений мы находим, умножая их соответственно либо на u, v, w, p, q, r, либо на $\partial T/\partial u$, $\partial T/\partial v$, $\partial T/\partial w$, 0, 0, 0, либо на $\partial T/\partial p$, $\partial T/\partial q$, $\partial T/\partial r$, $\partial T/\partial u$, $\partial T/\partial v$, $\partial T/\partial w$ и каждый раз суммируя.

Если учесть, что

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}$$

и

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt},$$

то первый набор множителей дает

$$2T = L,$$

а два остальных —

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M,$$
$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N, \tag{8}$$

где L, M и N — произвольные постоянные.

Шесть других интегральных соотношений нашей задачи получаются из уравнений (5а) и (6а). Если в этих уравнениях положить, как мы предположили,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma}, \quad M_\xi, \quad M_\eta, \quad M_\zeta$$

равными нулю, то из них будет следовать, что

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial w} = A,\\ &\beta_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial w} = B,\\ &\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial w} = C, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \tilde{A} + \beta C - \gamma B,\\ &\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \tilde{B} + \gamma A - \alpha C,\\ &\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} = \tilde{C} + \alpha B - \beta A, \end{aligned} \tag{10}$$

где A, B, C, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ — произвольные постоянные.

Второе и третье соотношения (8) следуют из уравнений (9) и (10), поэтому постоянные M и N выражаются через постоянные A, B, C, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$. Действительно, возводя в квадрат правые и левые части уравнений (9) и суммируя или умножая уравнения (9) на уравнения (10) и также суммируя, мы получаем с учетом соотношений (8)

$$A^2 + B^2 + C^2 = M, \qquad A\tilde{A} + B\tilde{B} + C\tilde{C} = N. \tag{11}$$

§ 4. Прежде чем вводить упрощающие предположения относительно формы тела и распределения массы в нем, рассмотрим одно частное решение приведенных выше дифференциальных уравнений, справедливое при тех же предположениях, как и выведенные в предыдущих разделах уравнения.

Уравнениям (7) можно удовлетворить, положив $p=0$, $q=0$, $r=0$ и выбрав u, v, w равными постоянными, которые относятся между собой как

$$u:v:w=\frac{\partial T}{\partial u}:\frac{\partial T}{\partial v}:\frac{\partial T}{\partial w}.$$

Если учесть, что при $p=0$, $q=0$, $r=0$ живая сила системы T есть однородная функция второй степени от u, v, w, причем существенно положительная, то, как нетрудно видеть, нахождение отношений $u:v:w$ эквивалентно нахождению главных осей некоторого эллипсоида. Отсюда следует, что для любого тела в самом общем случае существуют три и только три взаимно перпендикулярных направления, в которых оно может двигаться в жидкости, не вращаясь.

§ 5. Число постоянных, входящих в выражение для T, в общем случае равно 21. Выясним, как уменьшается число постоянных в тех случаях, когда тело обладает определенной симметрией. Для этого рассмотрим сначала ту часть живой силы всей системы T, которая обусловлена жидкостью. Удвоив эту часть, запишем ее в виде

$$a_{11}u^2+2a_{12}uv+2a_{13}uw+2a_{14}up+2a_{15}uq+2a_{16}ur+a_{22}v^2+$$
$$+2a_{23}vw+2a_{24}vp+2a_{25}vq+2a_{26}vr+a_{33}w^2+\ldots.$$

Если плотность жидкости обозначить через ρ, то это выражение приводится к виду

$$\rho\iiint dxdydz\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\},$$

где интегрирование производится по объему, занимаемому жидкостью в момент времени t, а φ означает введенную в п. 1 функцию от x, y, z. Если вместо φ подставить выражение (3), то для коэффициентов a получатся следующие выражения:

$$a_{11}=\rho\iiint dxdydz\left\{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)^2\right\},$$

$$a_{12}=\rho\iiint dxdydz\left\{\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right\},$$

. . . . ,

или, что то же, если dS — элемент поверхности тела, а N — нормаль к dS, направленная внутрь жидкости,

$$a_{11}=-\rho\int dS\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial N},$$

$$a_{12}=-\rho\int dS\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial N}, \qquad (12)$$

. . . .

Предположим теперь, что поверхность тела симметрична относительно плоскости xz, т. е. если точка с координатами x, y, z принадлежит поверхности тела, то ей принадлежит и точка x, $-y$, z. О двух таких точках мы будем говорить, что они соответствуют друг другу. Из уравнений (4) следует, что в двух

соответственных точках значения $\partial\varphi_1/\partial N$, $\partial\varphi_3/\partial N$, $\partial\varphi_5/\partial N$ совпадают, а $\partial\varphi_2/\partial N$, $\partial\varphi_4/\partial N$, $\partial\varphi_6/\partial N$ равны по величине, но противоположны по знаку.

Это означает, что в любых двух соответственных точках пространства, заполненного жидкостью, а также в любых двух соответственных точках поверхности тела функции φ_1, φ_3, φ_5 равны, а функции φ_2, φ_4, φ_6 при подходящем выборе входящих в них аддитивных постоянных имеют равные по величине, но противоположные по значению значения. В свою очередь, если учесть уравнения (12), это означает, что те a, у которых один индекс принадлежит множеству 1, 3, 5, а другой — множеству 2, 4, 6, обращаются в нуль.

Если обозначить через dm массу элемента тела с координатами x, y, z, то, учитывая смысл выражений (2), удвоенную живую силу тела можно представить в виде

$$\int dm\,\{(u+ry-qz)^2+(v+pz-rx)^2+(w+qx-py)^2\},$$

или

$$\int dm\,\{u^2+v^2+w^2+(y^2+z^2)\,p^2+(z^2+x^2)\,q^2+(x^2+y^2)\,r^2+2x\,(wq-vr)+ \\ +2y\,(ur-wp)+2z\,(vp-uq)-2yzqr-2zxrp-2xypq\}.$$

Если распределение массы симметрично относительно плоскости xz, то члены с множителями

$$ur-wp, \quad qr, \quad pq$$

обратятся в нуль. Если выражение для удвоенной живой силы тела записать в общем виде

$$b_{11}u^2+2b_{12}uv+2b_{13}uw+2b_{14}up+\ldots+b_{22}v^2+2b_{23}vw+\ldots,$$

то при распределении массы, симметричном относительно плоскости xz, в нуль обращаются те b, у которых один индекс принадлежит множеству 1, 3, 5, а другой — множеству 2, 4, 6.

Следовательно, если в общем случае мы положим

$$2T=c_{11}u^2+2c_{12}uv+2c_{13}uw+2c_{14}up+\ldots c_{22}v^2+2c_{23}vw+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

то в нуль обратятся те c, у которых один индекс принадлежит множеству 1, 3, 5, а другой — множеству 2, 4, 6, при условии, что тело, как по форме, так и по распределению массы, симметрично относительно плоскости xz.

Если тело обладает такого рода симметрией относительно плоскости yx или zx, то вместо множеств 1, 3, 5 и 2, 4, 6 выступают соответственно множества 2, 1, 6 и 3, 5, 4 и множества 3, 2, 4 и 1, 6, 5.

Если тело симметрично относительно трех координатных плоскостей, то, как явствует из приведенных выше соображений, выражение для $2T$ содержит только квадраты величин u, v, w, x, y, z.

Предположим теперь, что тело и по своей форме, и по распределению массы представляет собой тело вращения, ось которого совпадает с осью x. Такое

тело обладает симметрией относительно плоскости xy и относительно плоскости xz, поэтому

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}v^2 + c_{33}w^2 + c_{44}p^2 + c_{55}q^2 + c_{66}r^2 + 2c_{26}vr + 2c_{35}wq.$$

Но между входящими в это выражение постоянными существуют некоторые соотношения. Чтобы найти их, введем наряду с системой координат x, y, z еще одну систему координат x', y', z', неподвижную относительно тела. Пусть u', v', w', p', q', r', c'_{11}, c'_{12}, ... означают в новой системе то же, что u, v, w, p, q, r, c_{11}, c_{12}, ... в системе координат x, y, z. Пусть обе системы координат имеют общее начало и одну и ту же ось x, так что координаты x, y, z и x', y', z' одной и той же точки связаны соотношениями

$$x = x', \quad y = y' \cos \vartheta + z' \sin \vartheta, \quad z = -y' \sin \vartheta + z' \cos \vartheta.$$

Тогда по смыслу выражений (2) должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} u + ry - qz = u' + r'y' - q'z', \\ v + pz - rx = (v' + p'z' - z'x') \cos \vartheta + (w' + q'x' - p'y') \sin \vartheta, \\ w + qz - py = -(v' + p'z' - r'x') \sin \vartheta + (w' + q'x' - p'y') \cos \vartheta, \end{gathered}$$

откуда

$$\begin{aligned} u &= u', & p &= p', \\ v &= v' \cos \vartheta + w' \sin \vartheta, & q &= q' \cos \vartheta + r' \sin \vartheta, \\ w &= -v' \sin \vartheta + w' \cos \vartheta, & r &= -q' \sin \vartheta + r' \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Относительно плоскостей $x'y'$ и $x'z'$ существует такая же симметрия, как относительно плоскостей xy и xz, поэтому

$$2T = c'_{11}u'^2 + c'_{22}v'^2 + c'_{33}w'^2 + c'_{44}p'^2 + c'_{55}q'^2 + c'_{66}r'^2 + 2c'_{26}v'r' + 2c'_{35}w'q'.$$

Если приравнять оба выражения для $2T$ и выразить u, v, w, p, q, r через u', v', w', p', q', r', то, приравняв коэффициенты при соответствующих членах, получим

$$c_{22} = c_{33}, \quad c_{55} = c_{66}, \quad c_{26} + c_{35} = 0$$

и выражения, означающие, что величины c' равны соответствующим величинам c. Таким образом, в рассматриваемом случае

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) + 2c_6(vr - wq).$$

При подходящем выборе начала координат на оси x это выражение упрощается. Чтобы доказать это, введем, как и прежде, наряду с системой координат x, y, z новую систему координат x', y', z', выбранную так, что для любой точки

$$x = x' + a, \quad y = y', \quad z = z'.$$

В обозначениях, аналогичных тем, которыми мы пользовались выше, имеем

$$u + ry - qz = u' + r'y' - q'z',$$
$$v + pz - rx = v' + p'z' - r'x',$$
$$w + qx - py = w' + q'x' - p'y',$$

а также

$$u = u', \qquad p = p',$$
$$v = v' + r'a, \qquad q = q',$$
$$w = w' - q'a, \qquad r = r'$$

$$c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2) + 2c_{26}(vr - wq) =$$
$$= c'_{11}u'^2 + c'_{22}(v'^2 + w'^2) + c'_{44}p'^2 + c'_{55}(q'^2 + r'^2) + 2c'_{26}(v'r' - w'q'),$$

откуда

$$c_{11} = c'_{11}, \quad c_{22} = c'_{22}, \quad c_{44} = c'_{44}, \quad c_{55} = c'_{55} - 2c'_{26}a + c'_{22}a^2, \quad c_{26} = c'_{26} - c'_{22}a.$$

Из последнего соотношения видно, что, выбрав подходящим образом a, мы можем обратить c_{26} в нуль и что если

$$c_{26} = 0,$$

то

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}(v^2 + w^2) + c_{44}p^2 + c_{55}(q^2 + r^2). \tag{13}$$

Следует заметить, что это соотношение, как видно из его вывода, выполняется и в том случае, если тело не является телом вращения, коль скоро оно симметрично относительно одной или нескольких пар взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через ось x, например для правильной однородной призмы или правильной однородной пирамиды с поперечным сечением в форме квадрата или правильного шестиугольника при подходящем выборе оси x. Все требования, наложенные при выводе соотношения (13) на форму тела и распределение массы, выполняются и в этом случае.

§ 6. Задаваемое соотношением (13) выражение для T подставим в уравнения (7). Четвертое из них при такой подстановке перейдет в

$$dp/dt = 0, \quad \text{т. е.} \quad p = \text{const},$$

а остальные примут следующий вид:

$$c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{22}(vr - uq),$$
$$c_{22}\frac{dv}{dt} = c_{11}ur - c_{22}wp, \tag{14}$$
$$c_{22}\frac{dw}{dt} = -c_{11}uq + c_{22}vp,$$

$$c_{55}\frac{dq}{dt}=(c_{11}-c_{22})\,uw+(c_{44}-c_{55})\,pr,$$

$$c_{55}\frac{dr}{dt}=-(c_{11}-c_{22})\,uv-(c_{44}-c_{55})\,pr.$$

Вместо переменных v, w, q, r введем новые переменные s, σ, φ, ψ, такие, что

$$v=s\cos\varphi,\qquad q=\sigma\cos(\varphi+\psi),$$
$$w=s\sin\varphi,\qquad r=\sigma\sin(\varphi+\psi), \tag{15}$$

и, следовательно,

$$v^2+w^2=s^2,\qquad q^2+r^2=\sigma^2,$$
$$vq+wr=s\sigma\cos\psi,\qquad vr-wq=s\sigma\sin\psi.$$

Первое уравнение (14) перейдет в уравнение

$$c_{11}\frac{du}{dt}=-c_{22}s\sigma\sin\psi, \tag{16}$$

и так как

$$s^2d\varphi=-wdv+vdw,$$

то из второго и третьего уравнений получаем

$$c_{22}\frac{d\varphi}{dt}=-c_{11}\frac{u\sigma}{s}\cos\psi+c_{22}p. \tag{17}$$

Три интегральных соотношения (8) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} c_{11}u^2+c_{22}s^2+c_{44}p^2+c_{55}\sigma^2&=L,\\ c_{11}^2u^2+{}^{2}_{22}cs^2&=M,\\ c_{11}c_{44}up+c_{22}c_{55}s\sigma\cos\psi&=N, \end{aligned} \tag{18}$$

или

$$s=\sqrt{f-f'u^2},\qquad \sigma=\sqrt{g-g'u^2},\qquad s\sigma\cos\psi=h-h'u, \tag{19}$$

где f, g, h, f', g', h' означают постоянные, зависящие определенным образом от L, M, N, p и величин c. Отсюда мы получаем

$$s\sigma\sin\psi=\sqrt{(f-f'u^2)(g-g'u^2)-(h-h'u)^2},$$

а уравнения (16) и (17) дают поэтому

$$c_{22}dt=-c_{11}\frac{du}{\sqrt{(f-f'u^2)(g-g'u^2)-(h-h'u)^2}} \tag{20}$$

и

$$c_{22}^2 d\varphi = c_{11} \frac{c_{11}u\,(h - h'u) - c_{22}p\,(f - f'u^2)}{(f - f'u^2)\sqrt{(f - f'u^2)(g - g'u^2) - (h - h'u)^2}}\,du.$$

Два последних уравнения позволяют выразить t и φ с помощью эллиптических интегралов как функции от u, а u и φ — с помощью эллиптических интегралов как функции от t. Установив эти зависимости и используя соотношения (19) и (15), мы выразим все неизвестные, входящие в (14), как функции от t.

§ 7. Если для тела произвольной формы, движущегося в жидкости, найти u, v, w, p, q, r из уравнений (7) в виде функций от t, то для вычисления собственных неизвестных задачи — координат α, β, γ и косинусов α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 всегда достаточно взять квадратуры.

Две из произвольных постоянных A, B и C, входящих в уравнения (9), например B и C, не уменьшая общности рассматриваемого движения, можно положить равными нулю, т. е. рассматривать движение только вдоль оси ξ. Действительно, если рассматривать $\partial T/\partial u$, $\partial T/\partial v$, $\partial T/\partial w$ как компоненты скорости вдоль осей x, y, z, то из соотношений (9) видно, что компоненты скорости вдоль осей ξ, η, ζ равны постоянным A, B, C. Если ось ξ выбрать в направлении скорости, то $B=0$ и $C=0$. Кроме того, из (11) получаем

$$A^2 = M.$$

Предположим, что ось ξ выбрана именно таким образом. Умножая соотношения (9) соответственно либо на α_1, β_1, γ_1, либо на α_2, β_2, γ_2, либо на α_3, β_3, γ_3 и каждый раз суммируя, получаем

$$\alpha_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial u}, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial v}, \qquad \alpha_3 = \frac{1}{A}\frac{\partial T}{\partial w}.$$

Чтобы найти выражения для остальных косинусов, положим

$$\alpha_1 = \cos\vartheta, \qquad \alpha_2 = -\sin\Phi\sin\vartheta, \qquad \alpha_3 = \cos\Phi\sin\vartheta,$$
$$\beta_1 = \sin\Psi\sin\vartheta, \qquad \beta_2 = \cos\Phi\sin\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\vartheta,$$
$$\beta_3 = \sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\vartheta,$$
$$\gamma_1 = -\cos\Psi\sin\vartheta, \qquad \gamma_2 = \cos\Phi\sin\Psi - \sin\Phi\cos\Psi\cos\vartheta,$$
$$\gamma_3 = \sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\vartheta.$$

Углы ϑ и Φ мы найдем по углам α_1, α_2, α_3. Остается найти только Ψ. Но

$$\operatorname{tg}\Psi = -\beta_1/\gamma_1,$$

поэтому с помощью определяющих соотношений для p, q, r:

$$\frac{d\beta_1}{dt} = \beta_3 q - \beta_2 r, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_3 q - \gamma_2 r,$$

находим

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\alpha_2 q + \alpha_3 r}{\alpha_2^2 + \alpha_3^2},$$

или

$$\frac{d\Psi}{dt} = -A\frac{q\frac{\partial T}{\partial v} + r\frac{\partial T}{\partial w}}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2}. \tag{21}$$

Чтобы найти координаты β и γ, воспользуемся соотношениями (10). Положив в двух последних соотношениях $\tilde{B} = 0$ и $\tilde{C} = 0$, мы получим, что положение оси ξ определяется координатами

$$\gamma = \frac{1}{A}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$\beta = -\frac{1}{A}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

Первое из соотношений (10) приводит к последнему из соотношений (8). Наконец, ординату α мы находим из уравнения

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{A}\left(u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w}\right). \tag{22}$$

В рассмотренном нами в предыдущем разделе случае, когда тело является телом вращения, можно положить

$$\cos\vartheta = \frac{1}{A}c_{11}u, \qquad \sin\vartheta = -\frac{1}{A}c_{22}s, \qquad \Phi = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

Уравнение (21) переходит при этом в

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{A}{c_{22}}\frac{h - h'u}{f - f'u^2},$$

а уравнение (22) — в

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{A}\left(c_{22}f + (c_{11} - c_{22}f')\,u^2\right),$$

или, поскольку из (18) и (19) следует, что

$$f = \frac{A^2}{c_{22}^2}, \qquad f' = \frac{c_{11}^2}{c_{22}^2},$$

в уравнение

$$\frac{d\alpha}{dt}=\frac{A}{c_{22}}\left(1-c_{11}(c_{11}-c_{22})\frac{u^2}{A^2}\right). \tag{23}$$

Подставив сюда выражение для dt из (20), мы выразим Ψ и α в виде эллиптических интегралов от u.

§ 8. Если отбросить постоянные h и h', вводимые соотношениями (19), или, что приводит к тому же результату, положив постоянные p и N равными нулю, то мы придем к упомянутому в начале работы случаю, рассмотренному Томсоном и Тэтом. Величина φ равна при этом произвольной постоянной. Если ее положить равной нулю, т. е. при заданном начальном движении рассматривать только направление оси y, то

$$w=0, \quad q=0, \quad \Phi=\pi/2.$$

Кроме того, Ψ также равна произвольной постоянной. Если ось η выбрать так, чтобы Ψ стала равной $\pi/2$, то

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\cos\vartheta, && \beta_1=\sin\vartheta, && \gamma_1=0,\\
&\alpha_2=-\sin\vartheta, && \beta_2=\cos\vartheta, && \gamma_2=0,\\
&\alpha_3=0, && \beta_3=0, && \gamma_3=1,
\end{aligned}$$

$$\cos\vartheta=\frac{1}{A}c_{11}u, \qquad \sin\vartheta=-\frac{1}{A}c_{22}v.$$

Наконец,

$$\gamma=0, \qquad \beta=-\frac{1}{A}c_{55}r,$$

а величину α находим из уравнения (23).

В этом случае уравнения, выведенные в двух предыдущих разделах, удается проанализировать и найти неизвестные задачи как эллиптические функции времени. Однако к той же цели гораздо проще приводят соображения, возникающие в связи с теми дифференциальными уравнениями, которые выполняются в рассматриваемом случае.

Подставляя в уравнения (14)

$$w=0, \qquad p=0, \qquad q=0,$$

преобразуем их к виду

$$c_{11}\frac{du}{dt}=-c_{22}vr, \qquad c_{22}\frac{dv}{dt}=-c_{11}ur, \qquad c_{55}\frac{dr}{dt}=-(c_{11}-c_{22})uv.$$

Сравнивая их с тождественными уравнениями

$$\frac{d\sin\operatorname{am}\lambda t}{dt}=\lambda\cos\operatorname{am}\lambda t\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$

$$\frac{d\cos\operatorname{am}\lambda t}{dt}=-\lambda\sin\operatorname{am}\lambda t\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$

$$\frac{d\Delta\,\mathrm{am}\,\lambda t}{dt} = -\lambda \varkappa^2 \sin \mathrm{am}\,\lambda t \cos \mathrm{am}\,\lambda t,$$

где $\varkappa$ — модуль эллиптических функций, видим, что при надлежащем выборе начала отсчета времени и постоянных величины u, v, r должны принимать значения

$$l \sin \mathrm{am}\,\lambda t, \qquad m \cos \mathrm{am}\,\lambda t, \qquad n\Delta\,\mathrm{am}\,\lambda t.$$

Эти значения можно распределить между величинами u, v, r так, что все постоянные будут вещественными, а модуль $\varkappa$ — правильной дробью. Для этого следует выбрать за исходные соотношения

$$c_{11}u^2 + c_{22}v^2 + c_{55}r^2 = L, \qquad c_{11}^2u^2 + c_{22}^2v^2 = M,$$

в которые при принятых нами предположениях переходят соотношения (18) (эти соотношения — интегралы рассматриваемых дифференциальных уравнений). Будем считать, что наши цели достигнуты. Если учесть, что $\cos^2 \mathrm{am}$ и $\Delta^2 \mathrm{am}$ убывают при возрастании $\sin^2 \mathrm{am}$, то из второго соотношения следует, что одна из двух величин u и v должна выражаться через $\sin \mathrm{am}$: из этого соотношения видно, что при возрастании одной из величин u и v другая убывает, и наоборот. Из этих соотношений получаем

$$\begin{aligned} c_{11}(c_{22} - c_{11})\,u^2 + c_{22}c_{55}r^2 &= \mathrm{const}, \\ c_{22}(c_{11} - c_{22})\,v^2 + c_{11}c_{55}r^2 &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как c_{11}, c_{22}, c_{55} — теперь положительные величины, то из того же свойства эллиптических функций заключаем, что при $c_{22} > c_{11}$ через $\sin \mathrm{am}$ должна выражаться величина u, а при $c_{11} > c_{22}$ — величина v. Каждый из этих случаев, в свою очередь, подразделяется на два подслучая.

Если u выражается через $\sin \mathrm{am}$ и, следовательно, $c_{22} > c_{11}$, то v можно выразить через $\cos \mathrm{am}$, r — через $\Delta \mathrm{am}$. При этом существенно, что $\cos^2 \mathrm{am}$ при некотором значении вещественного аргумента обращается в нуль, а $\Delta^2 \mathrm{am}$ в нуль не обращается. Если обозначить через v_1 и r_1 значения, принимаемые величинами v и r в произвольно выбранный момент времени t, то в силу соотношений (24)

$$-c_{22}(c_{22} - c_{11})\,v^2 + c_{11}c_{55}r^2 = -c_{22}(c_{22} - c_{11})\,v_1^2 + c_{11}c_{55}r_1^2.$$

Следовательно, v^2 может обращаться в нуль, а r^2 в нуль обращаться не может, коль скоро выражение в правой части этого равенства положительно. Если же оно отрицательно, то v^2 не может обращаться в нуль, а r^2 обращается в нуль. В первом случае через $\cos \mathrm{am}$ выражается v, во втором — r.

Аналогичные соображения применимы и в том случае, если $c_{11} > c_{22}$.

Приведем формулы, позволяющие представить неизвестные рассматриваемой задачи в виде вещественных функций времени, для всех четырех случаев. Через u_0, v_0, r_0 обозначим значения u, v, r при $t=0$. Одна из величин u_0, v_0 равна нулю, другая и r_0 равны m и n, так как при нулевом значении аргумента $\sin \mathrm{am} = 0$ и $\cos \mathrm{am} = \Delta \mathrm{am} = 1$.

Случай I

При $c_{22} > c_{11}$ и $c_{11}c_{55}r_1^2 > c_{22}(c_{22} - c_{11})v_1^2$

$$u = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11}l = -c_{22}v_0 r_0/\lambda,$$

$$v = v_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22}v_0 = -c_{11}lr_0/\lambda,$$

$$r = r_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55}r_0 = -(c_{22} - c_{11})\, lv_0/\lambda\varkappa^2,$$

$$\varkappa^2 = c_{22}(c_{22} - c_{11})\, v_0^2/c_{11}c_{55}r_0^2, \quad \lambda = r_0,$$

$$l = -\frac{c_{22}}{c_{11}} v_0, \qquad A = c_{22}v_0,$$

$$\vartheta = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{am} \lambda t, \qquad \beta = -\frac{c_{55}r_0}{c_{22}v_0} \Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\alpha = \frac{v_0}{r_0}\left\{\left(1 + \frac{c_{55}r_0^2}{c_{22}v_0^2}\right)\lambda t - \frac{c_{55}r_0^2}{c_{22}v_0^2} E(\lambda t)\right\},$$

где

$$E(u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} u\, du$$

и предполагается, что $\alpha = 0$ при $t = 0$.

Случай 2

При $c_{22} > c_{11}$ и $c_{22}(c_{22} - c_{11})v_1^2 > c_{11}c_{55}r_1^2$

$$u = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11}l = -\frac{c_{22}v_0r_0}{\lambda},$$

$$v = v_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22}v_0 = -\frac{c_{11}v_0r_0}{\lambda\varkappa^2},$$

$$r = r_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55}r_0 = -\frac{(c_{22} - c_{11})\, lv_0}{\lambda},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{11}c_{55}r_0^2}{c_{22}(c_{22} - c_{11})\, v_0^2}, \qquad \lambda = \frac{r_0}{\varkappa}, \qquad l = -\varkappa\frac{c_{22}}{c_{11}} v_0, \qquad A = c_{22}v_0,$$

$$\cos\vartheta = -\varkappa \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad \sin\vartheta = -\Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\beta = -\frac{c_{55}r_0}{c_{22}v_0} \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{c_{22}c_{55}}{c_{11}(c_{22} - c_{11})}}\left(\lambda t - \frac{c_{22} - c_{11}}{c_{22}} E(\lambda t)\right).$$

Случай 3

При $c_{11} > c_{22}$ и $c_{22}c_{55}r_1^2 > c_{11}(c_{11} - c_{22})u_1^2$

$$u = u_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11}u_0 = \frac{c_{22}lr_0}{\lambda},$$

$$v = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22} l = \frac{c_{11} u_0 r_0}{\lambda},$$

$$r = r_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = \frac{(c_{11} - c_{22}) u_0 l}{\lambda \varkappa^2},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_0^2}{c_{22} c_{55} r_0^2}, \qquad \lambda = r_0, \qquad l = \frac{c_{11}}{c_{22}} u_0, \qquad A = c_{11} u_0,$$

$$\vartheta = -\operatorname{am} \lambda t, \qquad \beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{11} u_0} \Delta \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\alpha = \frac{u_0}{r_0} \left\{ \left(1 + \frac{c_{55} r_0^2}{c_{11} u_0}\right) \lambda t - \frac{c_{55} r_0^2}{c_{11} u_0} E(\lambda t) \right\}.$$

Случай 4

При $c_{11} > c_{22}$ и $c_{11}(c_{11} - c_{22}) u_1^2 > c_{22} c_{55} r_1^2$

$$u = u_0 \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{11} u_0 = \frac{c_{22} l r_0}{\lambda \varkappa^2},$$

$$v = l \sin \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{22} l = \frac{c_{11} u_0 r_0}{\lambda},$$

$$r = r_0 \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad c_{55} r_0 = \frac{(c_{11} - c_{22}) u_0 l}{\lambda},$$

$$\varkappa^2 = \frac{c_{22} c_{55} r_0^2}{c_{11}(c_{11} - c_{55}) u_0^2}, \qquad \lambda = \frac{r_0}{\varkappa}, \qquad l = \varkappa \frac{c_{11} u_0}{u_{22}}, \qquad A = c_{11} u_0,$$

$$\cos \vartheta = \Delta \operatorname{am} \lambda t, \qquad \sin \vartheta = -\varkappa \sin \operatorname{am} \lambda t,$$

$$\beta = -\frac{c_{55} r_0}{c_{11} u_0} \cos \operatorname{am} \lambda t, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{c_{11} c_{55}}{c_{22}(c_{11} - c_{22})}} \left\{ \lambda t - \frac{c_{11} - c_{22}}{c_{11}} E(\lambda t) \right\}.$$

§ 9. Нельзя не упомянуть еще об одном частном случае рассматриваемой задачи.

Полная система дифференциальных уравнений, возникающая из (14) при подстановке новых переменных (15) и приведенная выше лишь частично, имеет следующий вид:

$$c_{11} \frac{du}{dt} = -c_{22} s \sigma \sin \psi,$$

$$c_{22} \frac{ds}{dt} = c_{11} u \sigma \sin \psi,$$

$$c_{55} \frac{d\sigma}{dt} = -(c_{11} - c_{22}) u s \sin \psi,$$

$$c_{22} \frac{d\varphi}{dt} = -c_{11} u \frac{\sigma}{s} \cos \psi + c_{22} p,$$

$$c_{22} c_{55} \frac{d\psi}{dt} = u \cos \psi \left(c_{11} c_{55} \frac{\sigma}{s} - c_{22}(c_{11} - c_{22}) \frac{s}{\sigma} \right) - c_{22} c_{44} p.$$

Частное решение этой системы мы получим, положив $\psi=0$; u, s, σ — равными постоянным, удовлетворяющим соотношению

$$u\left(c_{11}c_{55}\frac{\sigma}{s}-c_{22}(c_{11}-c_{22})\frac{s}{\sigma}\right)=c_{22}c_{44}p,$$

и

$$\varphi=\left(p-\frac{c_{11}u\sigma}{c_{22}s}\right)t.$$

Тогда

$$A=\sqrt{c_{11}^2u^2+c_{22}^2s^2},$$

$$\cos\vartheta=\frac{c_{11}u}{A},\qquad \sin\vartheta=-\frac{c_{22}s}{A},$$

$$\Phi=\frac{\pi}{2}+\varphi,\qquad \Psi=-\frac{A\sigma}{c_{22}s}t,\qquad \alpha=\frac{1}{A}(c_{11}u^2+c_{22}s^2)t,$$

$$\beta=\frac{1}{A^2}(c_{11}c_{55}u\sigma-c_{22}c_{44}sp)\cos\Psi,$$

$$\gamma=\frac{1}{A^2}(c_{11}c_{55}u\sigma-c_{22}c_{44}sp)\sin\Psi.$$

Из выражений для α, β, γ следует, что начальная точка x, y, z — движется с постоянной по величине скоростью по винтовой линии, ось которой совпадает с осью ξ. Если R — радиус поверхности цилиндра, на которой лежит винтовая линия, то

$$R=\pm\frac{1}{A^2}(c_{11}c_{55}u\sigma-c_{22}c_{44}sp),$$

или в силу соотношения между u, s, p, σ

$$R=\pm\frac{1}{A^2}c_{22}(c_{11}-c_{22})\frac{us^2}{\sigma}.$$

Таким образом, компонента скорости этой точки, перпендикулярная оси ξ, равна

$$\pm\frac{1}{A}(c_{11}-c_{22})us.$$

Если μ — тангенс угла, образуемого направлением элемента винтовой линии с направлением оси ξ, то

$$\pm\mu=\frac{(c_{11}-c_{22})us}{c_{11}u^2+c_{22}s^2}.$$

Если μ принимает заданное значение, то это уравнение позволяет определить отношение $u:s$. При

$$\mu^2<\frac{(c_{11}-c_{22})^2}{4c_{11}c_{22}}$$

это уравнение имеет два вещественных корня.

Если задан радиус R, то выведенное для него уравнение позволяет найти отношение $\sigma : s$. Принятое нами соотношение между u, s, p, σ позволяет найти отношение $p : u$, поэтому отношения четырех величин u, s, p, σ определены. Эти отношения можно вычислить прямо, если задана скорость, с которой точка описывает винтовую линию. Вещественность их значений определяется неравенством, которое должно выполняться для того, чтобы отношение $s : u$ было вещественным.

Приведенные в этом разделе результаты выведены из дифференциальных уравнений (14). Их можно также получить из приведенных в п. 6 интегральных соотношений. Для этого необходимо установить соотношения между постоянными, которые должны выполняться для того, чтобы уравнение для u, возникающее, если приравнять нулю выражение, стоящее под знаком радикала в (20), имело два совпадающих корня, равных начальному значению u.

26.
ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОТЫ И НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ *

В своей работе «О количествах механической энергии, содержащейся в жидкости. . .» [1] Томсон сформулировал весьма полезную теорему, которая следует из двух утверждений, положенных в основу механической теории теплоты. Я намереваюсь вывести эту теорему в несколько иной форме и применить ее к явлениям, которые, насколько мне известно, не рассматривались ранее с точки зрения механической теории теплоты, а именно к абсорбции газов и растворению соли в воде.

Если какое-нибудь тело перевести из одного состояния в другое так, что при этом изменятся температура тела и давление, при котором оно находится, то тело будет отдавать положительное или отрицательное количество тепла и совершать положительную или отрицательную внешнюю работу. Сумма совершенной телом внешней работы, умноженной на механический эквивалент тепла, и отданного телом количества тепла назовем *величиной действия* [[1]], соответствующей рассматриваемому переходу.

Если живая сила видимого движения в конечном состоянии столь же велика, как и в начальном состоянии, то из первого начала механической теории теплоты следует, что величина действия не зависит от пути, по которому совершается переход, и обусловлена лишь начальным и конечным состоянием.

Пусть переход из одного состояния в другое происходит так, что живая сила видимого движения всегда бесконечно мала и в любой момент времени состояние тела однозначно определяется текущими значениями двух независимых переменных, которые можно произвольно уменьшать или увеличивать, изменяя температуру и давление. В качестве одной из таких переменных вы-

* Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben // Ges. Abhandl. Leipzig: Johann Ambrosius Barth, 1882. S. 454—485. Перевод Ю. А. Данилова.

[1] *Thomson W.* // Phil. Mag. 1855. Vol. 9 (4). P. 523.

берем саму температуру, измеряемую с помощью воздушного термометра, состоящего из идеального газа. Эту температуру обозначим t. Вторую переменную выберем позже и обозначим ее x.

Пусть v — объем тела, p — давление и

$$Xdx + Tdt,$$

где v, p, X и T — функции от x и t, — количество тепла, которое необходимо подвести к телу извне для того, чтобы переменная x возросла на dx, а переменная t — на dt. Если полное количество тепла обозначить через dQ, а механический эквивалент тепла — через k, то величина действия, соответствующая процессу, при котором x увеличивается на dx и t на dt, равна

$$pdv - kdQ.$$

Если тело совершает циклический процесс, т. е. если x и t изменяются так, что, приняв переменные за координаты точки, мы получим замкнутую кривую, то соответствующая ему величина действия равна нулю: если x и t рассматривать как координаты точки, то интеграл

$$\int pdv - kdQ,$$

взятый по любой замкнутой кривой, равен нулю. Так как этот интеграл можно представить в виде

$$\int \left(p\frac{\partial v}{\partial x} - kX\right)dx + \left(p\frac{\partial v}{\partial t} - kT\right)dt,$$

то из равенства его нулю по любому замкнутому контуру следует, что

$$p\frac{\partial v}{\partial x} - kX = \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad p\frac{\partial v}{\partial t} - kT = \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{1}$$

что W — некоторая функция от x и t.

Если бы эта функция была известна, то указать величину действия, соответствующую переходу тела из одного состояния в другое, было бы весьма легко, так как она равна разности

$$W_2 - W_1,$$

где W_2 и W_1 — значения функции W в конечном и начальном состоянии, поэтому я буду называть *W функцией действия для рассматриваемого тела.* Функцию — W Томсон назвал *механической энергией тела в данном состоянии.*

Второе начало механической теории теплоты определяет функцию действия с точностью до аддитивной постоянной, если p и v заданы как функции от x и t и, кроме того, T при одном значении x задана как функция от t.

Если обозначить через — a температуру абсолютного нуля (около —273 °C), то в силу теоремы механической теории теплоты, о которой мы уже упоминали [2, 3], для каждого циклического процесса, совершаемого телом,

---

[2] *Clausius R.* // Ann. Phys. 1854. Bd. 93. S. 481.

[3] *Thomson W.* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1857. Vol. 21, pt I. P. 126.

$$\int \frac{dQ}{a+t} = 0.$$

Подставив в это уравнение вместо dQ его выражение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{X}{a+t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{a+t}\right),$$

а подставив вместо X и T их выражения из уравнений (1), придем к уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (a+t)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + p\frac{\partial v}{\partial x},$$

или, что то же,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = (a+t)^2\left(\frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{dx}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Если обозначить через x_0 произвольно выбранное значение x, а через W_0 — функцию от t, в которую переходит при $x=x_0$ функция W, то из этого уравнения следует, что

$$W = W_0 + (a+t)^2 \int_{x_0}^{x} dx \left(\frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{dx}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad (2)$$

где t при интегрировании надлежит рассматривать как константу.

Пусть p_0, v_0, T_0 — функции от t, в которые переходят p, v, T при $x=x_0$. Тогда из второго уравнения (1) при x_0, не зависящем от t, следует, что

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = p_0\frac{dv_0}{dt} - kT_0,$$

откуда, интегрируя, получаем

$$W_0 = \int^{t} dt\left(p_0\frac{dv_0}{dt} - kT_0\right), \qquad (3)$$

где нижний предел интеграла произволен. Если (3) подставить в (2), то W будет определена с точностью до аддитивной постоянной, остающейся произвольной, как функция от p, v и T_0.

В соотношениях (2) и (3) содержится утверждение, которое я намеревался вывести и теперь буду применять к некоторым частным случаям.

Функция действия для единичной массы воды в различных состояниях

Прежде всего необходимо вывести функцию действия для единичной массы воды в различных состояниях, поскольку знание ее необходимо для исследований, указанных во введении к этой работе.

Предположим сначала, что давление, под которым находится масса воды, больше, чем давление водяного пара в максимуме плотности при существую-

щей температуре. Температура в точке таяния льда не должна падать. Тогда вся масса воды остается капельной жидкостью. В этом случае надлежит выбрать $x=p$. Общее уравнение для W переходит в следующее:

$$W = p_0 v_0 - k \int_0^t T_0 dt + \int_{p_0}^{p} dp \left((a+t) \frac{\partial v}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial p} \right) + \text{const},$$

где p_0 — произвольно выбранное постоянное давление; T_0 — удельная теплоемкость воды при постоянном давлении p_0; v_0 — объем единичной массы воды при том же давлении (T_0 и v_0 — функции от t).

Температуру t можно отсчитывать по стоградусной термометрической шкале, а за единицу количества тепла примем количество тепла, которое необходимо сообщить единичной массе воды, чтобы нагреть ее от 0 до 1 °С. В выражении для W следует пренебречь членами, бесконечно малыми по сравнению с механическим эквивалентом этого количества тепла. Если давление достаточно велико (а мы предполагаем, что это так), то при составлении выражения для W вполне допустимо пренебречь сжимаемостью воды и считать, что v не зависит от p. В результате мы получим выражение

$$W = p_0 v - k \int_0^t T_0 dt + (a+t) \frac{dv}{dt} (p - p_0) + \text{const}.$$

Зависимостью объема от температуры также можно пренебречь без сколько-нибудь заметной погрешности и положить

$$W = -k \int_0^t T_0 dt + \text{const}.$$

Если произвольную постоянную в этом выражении выбрать равной нулю и обозначить удельную теплоемкость воды через c, то для единичной массы воды, пока она остается капельной жидкостью, справедливо выражение

$$W = -k \int_0^t c\, dt. \tag{4}$$

Если речь идет о какой-то иной капельной жидкости или о твердом теле, то аналогичным образом можно положить

$$W = -k \int_0^t c' dt, \tag{5}$$

где c' — теплоемкость тела. В таком виде я буду записывать произведение массы и удельной теплоемкости.

Если давление, под которым находится масса воды, все более уменьшается, то в тот момент, когда оно становится равным давлению пара в максимуме плот-

ности при существующей температуре, происходит парообразование. При этом массу пара можно увеличивать или уменьшать как угодно, изменяя давление на бесконечно малую величину [2]. Пусть x в (2) означает массу образовавшегося пара. Тогда p не зависит от x, и (2) переходит поэтому в соотношение

$$W = W_0 + (a+t)^2 (v - v_0) \frac{d\left(\frac{p}{a+t}\right)}{dt}.$$

Величина x_0, от которой зависят W_0 и v_0, может быть выбрана произвольно, поэтому положим ее равной нулю. Тогда X_0 совпадает с W, задаваемым соотношением (4), а объем v_0 будет равен объему единичной массы капельно-жидкой воды. Если этот объем обозначить через s, объем единичной массы пара в максимуме плотности при температуре t — через σ и давление этого пара — через π_1, то [3]

$$W = -k \int_0^t c\,dt - (a+t)^2 (\sigma - s)\, x \frac{d\left(\frac{\pi_1}{a+t}\right)}{dt}. \tag{6}$$

Это соотношение выполняется до тех пор, пока вся вода не превратится в пар, т. е. пока не будет достигнуто равенство $x=1$. Достигнув $x=1$, давление можно понижать дальше. В этом случае, положив в (2) и в (3) $x=v$, получим

$$W = -k \int_0^t T_0\,dt - (a+t)^2 \int_{v_0}^{v} dv \frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t}. \tag{7}$$

В этом соотношении следует положить $v_0=\nu$, где ν — величина столь большого объема, что при v, принадлежащих достаточно малой окрестности ν, пар при существующих значениях t ведет себя, как идеальный газ, т. е. подчиняется закону Мариотта, с коэффициентом расширения $1/a$ и постоянной теплоемкостью. Величина T_0 есть удельная теплоемкость при постоянном объеме пара в таком состоянии разрежения. Если обозначить через γ удельную теплоемкость, а через π — функцию от v и t, описывающую давление пара не в максимуме плотности, то

$$W = K - k\gamma t + (a+t)^2 \int_v^{\nu} dv \frac{\partial\left(\frac{\pi}{a+t}\right)}{\partial t}, \tag{8}$$

где K — постоянная. Значение ее нетрудно найти, если учесть, что выражение (8) при $v=\sigma$ должно совпасть с выражением (6) при $x=1$. Постоянная K оказывается равной

$$K = k\left(\gamma t - \int_0^t c\,dt\right) - (a+t)^2\left\{(\sigma - s)\frac{d\left(\frac{\pi_1}{a+t}\right)}{dt} + \int_\sigma^v dv\,\frac{\partial\left(\frac{\pi}{a+t}\right)}{\partial t}\right\}, \qquad (9)$$

где t может принимать любое значение.

Если объем v столь велик, что пар ведет себя как идеальный газ, то

$$\pi = R(a+t)/v,$$

где R — постоянная. Интеграл по v в (8) обращается в нуль, и

$$W = K - k\gamma t. \qquad (10)$$

Таким образом, если вспомнить соотношение (4), то K можно определить как величину действия для перехода единичной массы воды от 0° в пар при той же температуре и разрежении, при котором пар ведет себя как идеальный газ [4].

Выражение (9) для K можно преобразовать и к другому виду, приводящему к интересным следствиям.

Реньо определил количество тепла λ, которое необходимо подвести к единичной массе воды, чтобы нагреть ее от температуры 0 до температуры t и при этой температуре превратить в пар с максимальной плотностью. Совершаемая при таком процессе внешняя работа равна

$$\pi_1(\sigma - s),$$

поэтому ему соответствует величина действия

$$\pi_1(\sigma - s) - k\lambda.$$

Та же величина действия есть значение, принимаемое выражением (6) для W при $x=1$, так как функция действия для капельно жидкой воды при 0 °С обращается в нуль. Следовательно, выражение (9) для K можно записать в виде

$$K = k(\gamma t - \lambda) + (\sigma - s)\pi_1 - (a+t)^2\int_\sigma^v dv\,\frac{\partial\left(\frac{\pi}{a+t}\right)}{\partial t}.$$

Клаузиус [4] показал, что отклонения от закона Мариотта для водяного пара в максимуме плотности при температурах в окрестности 0 очень незначительны. Следовательно, при этих низких температурах водяной пар вплоть до конденсации ведет себя почти как идеальный газ, и поэтому интеграл, входящий в выражение для K, очень мал. Пренебрегая также интегралом и s по сравнению с σ, получаем

$$K = k(\gamma t - \lambda) + \sigma\pi_1.$$

[4] *Clausius R.* // Ann. Phys. 1850. Bd. 79. S. 516.

Если это выражение продифференцировать по t и учесть, что для водяного пара, который вплоть до самой конденсации ведет себя как идеальный газ:

$$\sigma\pi_1 = R(a + t),$$

то получится уравнение

$$\gamma + (R/k) = d\lambda/dt.$$

По теореме, доказанной Клаузиусом [5], выражение, стоящее в левой части, есть не что иное, как удельная теплоемкость при постоянном давлении достаточно разреженного водяного пара. Таким образом, эта удельная теплоемкость есть значение, принимаемое производной $d\lambda/dt$ при низких температурах. Отсюда следует, что при низких температурах эта производная постоянна.

Но, как показал Реньо,

$$\lambda = 606{,}5 + 0{,}305\, t,$$

поэтому производная $d\lambda/dt$ постоянна не только при низких, но и при любых температурах, и равна 0,305. Однако это численное значение сильно отличается от значения, найденного Реньо прямыми измерениями удельной теплоемкости водяного пара при постоянном давлении [6, 7], а именно от 0,475. Расхождение может быть обусловлено либо тем, что водяной пар, над которым Реньо производил измерения, был слишком близок к конденсации, чтобы обладать такой же теплоемкостью, как сильно разреженный пар, либо тем, что при низких температурах пар в окрестности точки конденсации ведет себя иначе, чем идеальный газ [8].

Для любого идеального газа функцию действия можно представить в виде, аналогичном выражению (10) для достаточно разреженного водяного пара. Для других газов соответствующее выражение имеет вид

$$W = -k\gamma' t + \text{const}, \tag{11}$$

где γ_1 — теплоемкость газа при постоянном объеме.

Поглощение газа в воде

Исследуем теперь поглощение идеального газа в воде при следующих предположениях.

1) Давление, создаваемое смесью пара и газа, всегда равно сумме давлений, создаваемых при той же температуре и том же объеме только паром и только газом.

Если при повышении давления часть пара конденсируется и образовавшаяся вода абсорбирует часть газа, то:

---

[5] *Clausius R.* // Ann. Phys. 1850. Bd 79. S. 393.

[6] *Regnault V.* // C. r. Acad. sci. 1853. T. 36. P. 676.

[7] *Regnault V.* // Ann. Phys. 1853. Bd. 89. S. 348.

[8] На то, что коэффициент 0,305 должен быть удельной теплоемкостью при постоянном давлении, если пар ведет себя как идеальный газ, указывал еще Рэнкин (*Rankine W.* // Ann. Phys. Bd. 81. S. 176).

2) давление пара столь же велико, как если бы газа совсем не было и

3) масса газа, абсорбированного единичной массой воды, пропорциональна давлению газа, находящегося над жидкостью.

Как показывают опыты Реньо [9, 10], изучившего поведение пара в пространстве, заполненном воздухом, и Бунзена [11] по абсорбции газов, эти предположения заведомо выполняются для газов, лишь в небольших количествах абсорбируемых водой. Верны ли результаты, получаемые на основе этих предположений, для газов, поглощаемых водой в таких количествах, как аммиак или сернистый газ, пока не ясно.

Представим себе, что мы имеем смесь, состоящую из одной массы пара и массы g газа. Исследуем функцию действия такой смеси.

Если давление не превышает некоторой величины, то пар не конденсируется. В этом случае положим в (2) и (3) $x=v$ и получим для W выражение (7). Величина p в (7) состоит из двух частей. Одна из них есть π, под этим обозначением надо понимать величину, задаваемую соотношением (8), другая — давление газа, т. е.

$$gR'(a+t)/v,$$

где R' — постоянная, зависящая от природы газа. Таким образом,

$$p=\pi+gR'(a+t)/v.$$

Значение v_0 в (7) следует выбрать равным ν, где объем ν столь велик, что при v, принимающем значения из окрестности ν, смесь пара и газа при существующей температуре ведет себя как идеальный газ. Тогда T_0 означает теплоемкость смеси при постоянном объеме в указанном состоянии разрежения. Если, как прежде, обозначить через γ удельную теплоемкость водяного пара, а через γ' — удельную теплоемкость газа при постоянном объеме, то

$$T_0=\gamma+g\gamma'.$$

Действительно, представим себе, что смесь пара и газа получена следующим образом. Газ и пар порознь доводятся до давления, которое они создавали бы, находясь в смеси, после чего приводятся в соприкосновение и диффундируют. При такой диффузии, если она происходит при постоянной температуре, не совершается внешней работы и не отдается тепло. Следовательно, не происходит и никакого изменения теплоемкости.

Полагая произвольную постоянную в (7) равной нулю, получаем

$$W=-k(\gamma+g\gamma')t+(a+t)^2\int_v^{\nu} dv\,\frac{\partial\left(\frac{\pi}{a+t}\right)}{\partial t}. \qquad (12)$$

При уменьшении v это соотношение остается в силе до тех пор, пока водяной пар не достигнет максимума плотности, т. е. до $v=\sigma$, если под σ понимать ту же

[9] *Regnault V.* // C. r. Acad. sci. 1854. T. 39. P. 345.
[10] *Regnault V.* // Ann. Phys. 1854. Bd. 93. S. 552.
[11] *Bunsen R.* // Gasometrische Methoden. Braunschweig, 1857.

величину, что и прежде. При дальнейшем уменьшении объема все большее количество пара конденсируется и образующаяся при конденсации вода поглощает все больше газа, пока весь пар не превратится в воду и весь газ не окажется поглощенным ею. Чтобы найти функцию действия для этого периода, под x в общем выражении для функции действия необходимо понимать массу газа, поглощенную образовавшейся водой [5].

Тогда задача сводится к тому, чтобы представить p и v как функции от x и t. Для этого необходимо ввести некоторые новые обозначения. Для удобства я приведу рядом с каждым обозначением определение соответствующей величины. Итак,

π_1 — давление водяного пара в максимуме плотности при температуре t_1,
p' — давление неабсорбированного газа,
v' — объем смеси газа и пара,
v'' — объем образовавшейся жидкости,
σ — объем единичной массы пара в максимуме плотности при температуре t,
$R'(a+t)/p'$ — объем единичной массы газа при температуре t и давлении p',
y — масса пара, сконденсировавшегося в воду,
s — объем единичной массы воды, насыщенной при температуре t газом под давлением p', при температуре t и давлении p,
α — коэффициент абсорбции газа водой при температуре t [12].

Выполняются следующие соотношения:

$$p=\pi_1+p', \quad v=v'+v'', \quad v'=(1-y)\sigma=(g-x)R'(a+t)/p',$$
$$v''=ys, \quad x=\alpha y p'.$$

Из них, как нетрудно видеть, следует, что

$$p'=\frac{x}{\alpha}+\frac{(g-x)R'(a+t)}{\sigma}, \qquad \frac{1}{y}=1+\frac{\alpha(g-x)R'(a+t)}{x\sigma},$$

или, если обозначить для краткости

$$\alpha R'(a+t)=\beta,$$

то

$$p=\pi_1+R'(a+t)\left(\frac{x}{\beta}+\frac{g-x}{\sigma}\right), \qquad v=\sigma\frac{xs+(g-x)\beta}{x\sigma+(g-x)\beta}. \tag{13}$$

Величины π_1, σ, β — функции от t. Величина s, строго говоря, является функцией не только от t, но и от x, она зависит от p' и p. Приближенно ее можно считать постоянной и интерпретировать как объем единичной массы воды, не содержащей газа, при любой температуре, поскольку, как будет показано, полагая $s=0$, мы допускаем лишь незначительную погрешность.

Если выражения (13) для p и v подставить непосредственно в (2), то такая подстановка потребовала бы весьма громоздких вычислений. Чтобы избежать их, преобразуем предварительно соотношение (2).

---

[12] В понятие «коэффициент абсорбции» мы вкладываем несколько иной смысл, чем Бунзен. Смысл α отчетливо виден из приводимого ниже соотношения.

Пусть p и v — любые заданные функции от x и t. Исключим x из двух уравнений, задающих p и v как функции от x и t, и выразим p через v и t. Функцию от v и t, которая при этом получится, обозначим через (p).

Равенство

$$p = (p)$$

выполняется тождественно, если учесть уравнение, задающее v как функцию от x и t, поэтому

$$\frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{(p)}{a+t}\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{(p)}{a+t}\right)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{(p)}{a+t}\right)}{\partial t},$$

откуда, в свою очередь, следует, что

$$\frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{(p)}{a+t}\right)}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Кроме того, поскольку при

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx = dv,$$

соотношение (2) можно записать в виде

$$W = W_0 - (a+t)^2\int_{v_0}^{v} dv\,\frac{\partial\frac{(p)}{a+t}}{\partial t},$$

откуда, интегрируя, считая, как прежде, $t=\mathrm{const}$, получим окончательно

$$W = W_0 - (a+t)^2\left(\frac{p_0}{a+t}\frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{p}{a+t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\int_{v_0}^{v}\frac{(p)}{a+t}dv\right).$$

Из (13) находим

$$\frac{(p)}{a+t} = \frac{\pi_1}{a+t} + gR'\frac{\sigma - s}{v(\sigma-\beta)+\sigma(\beta-s)}.$$

После подстановки этого выражения в выражение для W входящий в последнее интеграл берется без труда.

Необходимо лишь найти значение, принимаемое W при $x=g$, т. е. в тот момент, когда весь пар сконденсировался, а весь газ абсорбировался. Это значение функции действия W обозначим через W_1. Величину x_0 выберем равной нулю. Тогда, как следует из (13),

$$v_0 = \sigma, \qquad \frac{p_0}{a+t} = \frac{\pi_1}{a+t} + \frac{gR'}{\sigma}.$$

Кроме того, $v=s$ при $x=g$. Наконец, поскольку из выражения для $(p)/(a+t)$ следует, что

$$\int_{\sigma}^{s} \frac{(p)}{a+t}\,dv = -\frac{\pi_1}{a+t}(\sigma - s) - gR'\,\frac{\sigma - s}{\sigma - \beta}\ln\frac{\sigma}{\beta},$$

то

$$W_1 - W_0 = -(a+t)^2\left[\left(\frac{\pi_1}{a+t} + \frac{gR'}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi_1}{a+t}(\sigma - s) + gR'\,\frac{\sigma - s}{\sigma - \beta}\ln\frac{\sigma}{\beta}\right)\right].$$

При нашем выборе x_0 величина W_0 должна совпадать со значением, которое принимает W, задаваемое выражением (12) при $v=\sigma$, т. е.

$$W_0 = -k(\gamma + g\gamma')\,t + (a+t)^2\int_{\sigma}^{v} dv\,\frac{\partial\left(\frac{\pi}{a+t}\right)}{\partial t}.$$

Складывая два последних выражения и соотношение (9), получаем

$$W_1 = -K - k\left(g\gamma' t + \int_0^t c\,dt\right) + gR'(a+t)^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma - s}{\sigma - \beta}\ln\frac{\sigma}{\beta} - \ln\sigma\right).$$

Последний член этого выражения можно привести к значительно более простому виду. Прежде всего заметим, что величина s мала по сравнению с σ и ею можно пренебречь. Но β также очень мала по сравнению с σ. Если обозначить через b величину, названную Бунзеном коэффициентом абсорбции, то, приняв за единицу объема объем единичной массы воды, получим

$$\beta = b\left(1 + \frac{1}{a}\,t\right).$$

По данным Бунзена, при температуре 0 °С для аммиака $\beta=1049{,}6$. При той же температуре $\sigma=205550$, если, следуя Клаузиусу, принять, что плотность насыщенного водяного пара при 0 °С составляет 0,662 от плотности атмосферного воздуха при той же температуре и том же давлении. Для самого аммиака β составляет столь малую долю от σ, что, приняв β за бесконечно малую по сравнению с σ, мы допустим весьма незначительную погрешность. Эта погрешность пренебрежимо мала для газов, которые абсорбируются водой значительно меньше, чем аммиак. Но если s и β в выражении для W_1 бесконечно малы по сравнению с σ, то

$$W_1 = -K - k\left(g\gamma' t + \int_0^t c\,dt\right) - gR'(a+t)^2\,\frac{d\ln\beta}{dt}. \qquad (14)$$

Это выражение позволяет прежде всего вычислить изменение теплоемкости, обусловленное абсорбцией. Действительно, W_1 по своему физическому смыслу

тождественно выражению (5) для W, если под c' понимать теплоемкость единичной массы воды, абсорбировавшей массу газа g. Дифференцируя, получаем

$$c' = c + g\gamma' + g\frac{R'}{k}\frac{d}{dt}\left((a+t)^2\frac{d\ln\beta}{dt}\right). \tag{15}$$

Соотношение (14) позволяет найти количество тепла, которое отдает единичная масса воды, абсорбируя при постоянной температуре массу газа g.

Представим себе следующий опыт. Масса газа приводится в соприкосновение с водой. Давление p и температура t поддерживаются постоянными за счет уменьшения объема по мере поглощения газа водой и выделения при абсорбции тепла. Пусть Q — количество тепла, выделившегося при поглощении всей массы газа g.

Внешняя работа, совершаемая при таком процессе, равна взятому со знаком минус произведению давления на первоначальный объем газа, т. е.

$$-gR'(a+t).$$

Следовательно, соответствующая процессу величина действия равна

$$kQ - gR'(a+t).$$

Абсорбция осуществляется следующим образом.

1) Масса воды при постоянной температуре превращается в пар, плотность которого настолько мала, что он ведет себя, как идеальный газ.

2) Давление газа также при постоянной температуре доводится до давления, под которым находится водяной пар.

3) Пар и газ приводятся в соприкосновение, после чего они начинают диффундировать друг в друга.

4) Смесь пара и газа сжимают при постоянной температуре до тех пор, пока весь пар не сконденсируется, а весь газ не абсорбируется.

Величина действия для первой части процесса, как видно из соотношений (4) и (10), составляет

$$k\int_0^t c\,dt + K - k\gamma t$$

для второй части процесса, как следует из (11), она равна нулю, для третьей части также равна нулю и, наконец, для четвертой части процесса, как видно из (12) и (14), равна [6]

$$k\left(\gamma t - \int_0^t c\,dt\right) - K - gR'(a+t)^2\frac{d\ln\beta}{dt}.$$

Таким образом, величина действия для всего процесса равна

$$-gR'(a+t)^2\frac{d\ln\beta}{dt}.$$

Поскольку величина действия для перехода тела из одного состояния в другое не зависит от пути, по которому совершается переход, то

$$Q = -g\frac{R'}{k}(a+t)^2\frac{d\ln\left(\frac{\beta}{a+t}\right)}{dt},$$

или, если ввести величину b, названную Бунзеном коэффициентом абсорбции,

$$Q = -g\frac{R'}{k}(a+t)^2\frac{d\ln b}{dt}.\quad (16)$$ [13]

Имеются экспериментальные данные, позволяющие утверждать, что соотношение (16) выполняется для абсорбции аммиака и сернистого газа в воде. Фавр и Зильберман измерили количество тепла, выделяющегося при абсорбции единичных масс этих газов, а Бунзен определил их коэффициенты абсорбции. По данным Фавра и Зильбермана, для единичной массы аммиака

$$Q = 514{,}3,$$

а для единичной массы сернистого газа

$$Q = 120{,}4.$$

Температуры, при которых Q имеют указанные значения, в работе не приведены [14].

По Бунзену, для аммиака

$$b = 1049{,}63 - 29{,}496t + 0{,}67687t^2 - 0{,}0095621t^3,$$

а для сернистого газа

$$b = 79{,}789 - 2{,}6077t + 0{,}2935t^2$$ [15].

Если предположить, что механический эквивалент единицы теплоты равен работе, которую необходимо затратить против силы тяжести, чтобы поднять единичную массу на высоту 423,5 м, и обозначить плотность газа по сравнению с его плотностью при атмосферном давлении через δ, то

$$R'/k = 0{,}0691\,(1/\delta).$$

Для аммиака $\delta = 0{,}58957$, для сернистого газа $\delta = 2{,}21122$. Наконец, $a = 273$. Подставив эти численные данные в (16), получим для единичной массы аммиака

---

[13] Выражения (15) и (16) можно получить, по существу, из аналогичных приведенным, но гораздо более простых соотношений, если отвлечься от того, что порция газа, находящаяся в соприкосновении с водой, содержит водяной пар.

[14] *Favre P. A., Silbermann J. T. H.* Recherches sur les quantités de chaleur dégagées dans les actions chimiques et moléculaires. Paris, 1853. P. 145.

[15] В цитированной выше работе Бунзена, из которой заимствована эта формула, под таблицами, приведенными в конце работы, по ошибке вместо таблицы, вычисленной по этой формуле, напечатана другая таблица.

$$\text{при } 0\,^\circ\text{C} \quad Q = 245,$$
$$\text{при } 20\,^\circ\text{C} \quad Q = 214,$$

а для единичной массы сернистого газа

$$\text{при } 0\,^\circ\text{C} \quad Q = 76{,}1,$$
$$\text{при } 20\,^\circ\text{C} \quad Q = 97{,}7.$$

Большое различие между этими величинами и значениями, полученными Фавром и Зильберманом, свидетельствует о том, что аммиак и сернистый газ не удовлетворяют предположениям, положенным в основу развитой нами теории и изложенным в начале этого раздела.

Соотношение (16) позволяет без труда вычислять количество тепла, выделяющегося при насыщении воды газом. Действительно, если масса газа g насыщает единичную массу воды при давлении p, то

$$g = p\alpha,$$

или

$$g = pb/R'a,$$

и, следовательно,

$$Q = -\frac{pa}{k}\left(1 + \frac{1}{a}t\right)^2 \frac{db}{dt}.$$

Если за единицу давления принять атмосферное давление, то последнее соотношение примет вид

$$Q = -6{,}659p\left(1 + \frac{1}{a}t\right)^2 \frac{db}{dt}.$$

Для углекислоты, по Бунзену,

$$b = 1{,}7967 - 0{,}07761t + 0{,}0016244t^2.$$

Отсюда следует, что количество тепла, выделяющегося при насыщении единичной массы воды углекислотой при температуре 0 °С и атмосферном давлении, равно 0,517. Если пренебречь весьма незначительными изменениями теплоемкости, происходящими вследствие абсорбции, то можно заключить, что повышение температуры, претерпеваемое водой в указанных условиях, составляет 0,517 °С.

Растворение соли в воде

Соображения, аналогичные тем, которые были выдвинуты нами при рассмотрении абсорбции газа, применимы и к растворению соли в воде и позволяют получить выражения для теплоемкости раствора и количества тепла, выделяющегося при образовании раствора.

Представим себе единичную массу соли, находящуюся в соприкосновении с массой m водяного пара при давлении, меньшем давления пара над насыщен-

ным раствором соли в максимуме плотности. Требуется найти функцию действия для такого тела в различных состояниях, в которые оно может быть переведено повышением давления.

Пусть μ_1 — давление водяного пара в максимуме плотности над насыщенным раствором соли при температуре t. Тогда при условии, что давление p меньше μ_1, соль не растворяется, и из (5) и (10) мы получаем

$$W = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'dt\right), \tag{17}$$

где γ, как и прежде, — удельная теплоемкость водяного пара при постоянном объеме, c' — удельная теплоемкость твердой соли, а произвольная постоянная, входящая в общее выражение для W, выбрана равной нулю. В основе выражения (17) лежит предположение, что плотность водяного пара над солью очень мала и пар поэтому ведет себя как идеальный газ. Это предположение выполняется тем точнее, чем больше сила, с которой соль притягивает водяной пар.

Если $p=\mu_1$, то пар начинает конденсироваться, образуется вода и растворяет часть соли. Бесконечно малыми изменениями давления массу несконденсированного пара можно увеличить или уменьшить. Если под x в (2) и в (3) понимать массу конденсированного пара и положить $x_0=0$, то, пользуясь теми же рассуждениями, что и при выводе соотношения (6), мы получим [7]

$$W = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'dt\right) - (a+t)^2 (v - v_0)\frac{d\left(\frac{\mu_1}{a+t}\right)}{dt}.$$

Мы предполагали, что пар до конца предыдущего периода ведет себя как идеальный газ. С тем же основанием можно предположить, что и на протяжении рассматриваемого периода пар также ведет себя как идеальный газ. Отсюда следует, что если сохранить за R его прежнее значение и пренебречь весьма малыми изменениями объема, претерпеваемыми солью при растворении, то

$$v_0 - v = xR\,(a+t)/\mu_1$$

и

$$W = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c'dt\right) + xR\,(a+t)^2\frac{d\ln\frac{\mu_1}{a+t}}{dt}. \tag{18}$$

Это соотношение выполняется вплоть до того момента, когда растворится вся соль, если масса m воды больше той, которая требуется, чтобы растворить единичную массу соли. Если же масса m меньше, то соотношение (18) выполняется вплоть до того момента, когда сконденсируется весь пар, т. е. будет достигнуто равенство $x=m$.

Рассмотрим сначала более подробно второй из этих двух различных случаев. Если обозначить через W_1 функцию действия для состояния, в котором весь пар исчезает, то в рассматриваемом случае

$$W_1 = -k\left(m\gamma t + \int_0^t c' dt\right) + mR(a+t)^2 \frac{d\ln\left(\frac{\mu_1}{a+t}\right)}{dt}. \tag{19}$$

Если C — теплоемкость возникшего описанным выше образом тела, состоящего отчасти из твердой соли, отчасти из насыщенного раствора, то в силу (5)

$$W_1 = -k\int_0^t C dt,$$

откуда

$$C = c' + m\gamma - m\frac{R}{k}\frac{d}{dt}\left((a+t)^2 \frac{d\ln\left(\frac{\mu_1}{a+t}\right)}{dt}\right). \tag{20}$$

Задаваемая соотношением (20) величина C, которую я называю теплоемкостью тела, состоящего из твердой соли и насыщенного раствора, равна количеству тепла, которое необходимо сообщить этому телу, чтобы нагреть его на 1°. При таком нагревании либо растворится часть твердой соли, либо осаждается часть растворенной соли, вследствие чего в теле выделяется или поглощается тепло. Это выделившееся или поглотившееся тепло составляет существенную часть C.

Соотношение (19) позволяет вычислять количество тепла, выделяющегося при растворении в массе воды m такого количества соли, какое только может в ней раствориться.

Будем считать, что масса воды m налита на соль и температура поддерживается постоянной за счет отвода тепла, выделяющегося при растворении. Пусть Q — количество тепла, отведенного к моменту насыщения воды солью. Если пренебречь изменениями объема, происходящими при этом, то величина действия для рассматриваемого процесса равна kQ. Но растворение можно производить и по следующей схеме.

1) Превратить воду при температуре, поддерживаемой постоянной, в пар, давление которого меньше μ_1.

2) После того как пар приведен в соприкосновение с солью, сжимать его при той же температуре до тех пор, пока он весь не конденсируется и не перейдет в солевой раствор.

Как видно из (4) и (10), величина действия для первой части операции составляет

$$m\left(k\int_0^t c dt + K - k\gamma t\right),$$

а для второй, как следует из (17) и (19), —

$$mR(a+t)^2 \frac{d\ln\left(\frac{\mu_1}{a+t}\right)}{dt}.$$

Из теоремы о том, что величина действия для перехода тела из одного состояния в другое не зависит от пути перехода, получаем

$$Q = m\left(\int_0^t c\,dt - \gamma t + \frac{K}{k} + \frac{R}{k}(a+t)^2 \frac{d\ln\left(\frac{\mu_1}{a+t}\right)}{dt}\right). \qquad (21)$$

Выражение для Q сильно упрощается, если предположить, что водяной пар, находящийся в соприкосновении с чистой водой, вплоть до конденсации ведет себя как идеальный газ. Как мы уже отмечали, это предположение недалеко от истины по крайней мере при температурах вблизи 0 °C. Приняв такое предположение и отбросив в (9) s как величину, малую по сравнению с σ, получим [8]

$$K = k\left(\gamma t - \int_0^t c\,dt\right) - (a+t)^2 R \frac{d\ln\left(\frac{\pi_1}{a+t}\right)}{dt}, \qquad (22)$$

откуда

$$Q = m\frac{R}{k}(a+t)^2 \frac{d\ln\left(\frac{\mu_1}{\pi_1}\right)}{dt}. \qquad (23)$$

Соотношение (22) позволяет преобразовать равенство (20). Умножив (22) на m/k, продифференцировав по t и прибавив к (20), получим [9]

$$C = c' + cm - m\frac{R}{k}\frac{d}{dt}\left((a+t)^2 \frac{d\ln\frac{\pi_1}{\mu_1}}{dt}\right).$$

Как известно, при растворении одних солей теплота выделяется, при растворении других — поглощается. Как показывает выражение (23), первое происходит в том случае, когда отношение μ_1/π_1 с увеличением температуры возрастает, а второе — в противном случае.

Если масса воды m больше той, которая необходима для растворения единичной массы соли, то соотношение (18) выполняется не до $x=m$, а лишь до $x=\alpha$, где α — масса воды, необходимой при температуре t для растворения единичной массы соли. При x, бóльших α, давление p перестает зависеть только от t, а зависит от t и x. Функцию этих двух переменных, описывающую давление, обозначим через μ. Если масса воды не слишком велика, то плотность пара над солевым раствором остается столь малой, что пар можно рассматривать как идеальный газ. Если обозначить через f объем раствора, то

$$v = f + (m-x)R(a+t)/\mu.$$

В этом соотношении величину f без особой погрешности можно считать постоянной. Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial t} = R(m-x)\frac{\partial\left(\frac{a+t}{\mu}\right)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = R(m-x)\frac{\partial\left(\frac{a+t}{\mu}\right)}{\partial x} - \frac{R(a+t)}{\mu}$$

и

$$\frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial\left(\frac{p}{a+t}\right)}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}=R\frac{\partial \ln\left(\frac{\mu}{a+t}\right)}{\partial t}.$$

С учетом соотношения (2) получаем

$$W=W_0+R(a+t)^2\int\limits_{x_0}^{x}dx\frac{\partial \ln\left(\frac{\mu}{a+t}\right)}{\partial t}.$$

Если положить $x_0=\alpha$, то W_0 становится равной значению, принимаемому W в (18) при $x=\alpha$. Если обозначим снова через W_1 значение, принимаемое W при $x=m$, то [10]

$$W_1=-k\left(m\gamma t+\int\limits_0^t c'dt\right)+R(a+t)^2\left[\alpha\frac{\partial \ln\left(\frac{\mu_1}{a+t}\right)}{\partial t}+\int\limits_{\alpha}^{m}dx\frac{\partial \ln\left(\frac{\mu}{a+t}\right)}{\partial x}\right].$$

Функция μ определена лишь при $x>\alpha$. Если μ задать при $x\leqslant\alpha$, то последнее выражение запишется несколько проще:

$$W_1=-h\left(m\gamma t+\int\limits_0^t c'dt\right)+R(a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^m dx\ln\left(\frac{\mu}{a+t}\right).$$

Это соотношение позволяет вычислять теплоемкость солевого раствора, образовавшегося из единичной массы соли и массы воды m, и количество тепла, выделяющегося при составлении раствора. Если C — теплоемкость, а Q — количество выделившегося тепла, то, как показывают соображения, полностью аналогичные тем, которые мы использовали при выводе соотношений (20) и (21),

$$C=c'+m\gamma-\frac{R}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left((a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^m dx\ln\left(\frac{\mu}{a+t}\right)\right),$$

$$Q=m\left(\int\limits_0^t cdt-\gamma t+\frac{K}{k}\right)+\frac{R}{k}(a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^m dx\ln\left(\frac{\mu}{a+t}\right).$$

Если снова предположить, что водяной пар, находящийся в соприкосновении с чистой водой, вплоть до конденсации ведет себя как идеальный газ, то получаются следующие приближенные выражения:

$$C=c'+mc-\frac{R}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left((a+t)^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^m dx\ln\frac{\mu}{\pi_1}\right),$$

$$Q = \frac{R}{k}(a+t)^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^m dx \ln \frac{\mu}{\pi_1}.$$

Второе из этих соотношений позволяет сравнить теорию с одним результатом, найденным Бабо экспериментально.

Как показывает опыт, при добавлении воды к достаточно разбавленному солевому раствору не происходит сколько-нибудь заметного выделения тепла. Если такое разведение достигнуто, то из выражения для Q следует, что

$$\frac{\partial \ln\left(\frac{\mu}{\pi_1}\right)}{\partial t} = 0\,[^{11}],$$

т. е. μ/π_1 (отношение упругости водяного пара над раствором к его упругости над чистой водой при той же температуре) не зависит от t.

Бабо [16] сформулировал общую теорему о том, что отношение μ/π_1 при самых различных температурах остается почти неизменным.

Однако опыты, на основании которых он пришел к такому заключению, производились в основном с разбавленными растворами, поэтому Бабо пришлось оговорить, при каких условиях его теорема верна, а именно: раствор должен быть разбавлен настолько, чтобы добавление воды не вызывало изменения температуры. Если же добавление воды сопровождается повышением температуры, то отношение μ/π_1 возрастает с повышением и убывает с понижением температуры.

Позволю себе присовокупить следующее замечание. При измерении количеств тепла, выделяющегося в химических процессах, обычно экспериментаторы не обращают внимания на температуру, при которой происходит процесс, в то время как из первого начала механической теории теплоты с необходимостью следует, что количества тепла изменяются в зависимости от температуры, если химический процесс сопровождается изменением теплоемкости. Последнее же происходит не всегда, но, как правило, имеет место. Поясним сказанное на простом примере.

Поместим единичную массу гремучего газа при температуре t в некое ограниченное пространство с прочными стенками и произведем взрыв, например, с помощью электрической искры. Пусть Q — количество тепла, которое необходимо отнять у образовавшегося водяного пара, чтобы температура вернулась к исходной.

Пусть Q_1 — количество тепла, выделяющегося в аналогичном опыте с тем лишь различием, что температура гремучего газа перед взрывом равна t_1 и после взрыва водяной пар охлаждается до температуры t_1. Пусть для простоты объем гремучего газа выбран столь большим, что водяной пар при таком объеме и температурах, при которых он находится, ведет себя как идеальный газ. Тогда, как нетрудно показать, Q и Q_1 должны отличаться.

---

[16] *Babo C. H. Lr* // Verhandl. Berichte. Gesell. Beförd. Naturwiss. Freiburg. 1857. Januar. S. 282.

Величина действия при переходе гремучего газа при температуре t в водяной пар при той же температуре и том же объеме, при которых происходил первый из двух наших мысленных опытов, равна kQ, так как внешняя работа не производится.

Представим себе теперь, что тот же переход происходит следующим образом:

1) Температура гремучего газа доводится до t.

2) Производится взрыв гремучего газа и от образовавшегося газа тепло отводится до тех пор, пока его температура не станет равной t_1.

3) Температура водяного пара доводится до t_1.

Если обозначить через γ' удельную теплоемкость гремучего газа, через γ — удельную теплоемкость водяного пара при постоянном давлении, то, поскольку ни одна из перечисленных стадий не сопровождается изменением объема, величина действия составляет

для первой стадии — $k\gamma' (t_1-t)$,

для второй стадии kQ_1,

для третьей стадии $k\gamma (t_1-t)$.

Из первого начала механической теории теплоты следует, что сумма этих трех величин должна быть равна kQ, т. е.

$$Q_1 = Q + (\gamma' - \gamma)(t_1 - t).$$

Но поскольку теперь удельная теплоемкость γ' отлична от γ, то и количество тепла Q_1 не равно Q.

Аналогичные рассуждения применимы к любому химическому процессу, при котором внешняя работа либо вообще не производится, либо пренебрежимо мала и удельная теплоемкость не изменяется.

В каждом таком процессе количество выделяющегося тепла, т. е. количество тепла, которое необходимо отвести во время или после процесса, чтобы вновь установилась начальная температура, зависит от этой температуры. Именно это количество выделяющегося тепла, а не тепла, образующегося в ходе процесса, измеряется в опытах (в том виде, как они поставлены) по изучению тепловых эффектов при химических процессах.

Впрочем, количества тепла в случае, приведенном нами в качестве примера, отличаются сравнительно мало, однако нельзя считать, что так происходит всегда.

Чтобы вычислить эти различия в нашем примере, воспользуемся следующими данными. Удельная теплоемкость гремучего газа при постоянном давлении составляет 0,5722. Отсюда с помощью уже упоминавшейся теоремы Клаузиуса и приведенного выше механического эквивалента, заключаем, что теплоемкость единичной массы гремучего газа γ' (т. е. удельная теплоемкость гремучего газа при постоянном объеме) равна 0,4056.

Если предположить, что удельная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении, как нашел Реньо, равна 0,475, то для γ (т. е. удельной теплоемкости водяного пара при постоянном объеме) тем же способом получается значение 0,3639. Если же предположить, что удельная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении равна, как мы нашли, 0,305, то $\gamma=0,194$. Таким образом, первое из двух предположений приводит к

$$Q_1 = Q + 0{,}0417\,(t_1 - t),$$

а второе — к

$$Q_1 = 0{,}212\,(t_1 - t).$$

Наш результат можно выразить иначе. Пусть τ — повышение температуры, вызванное взрывом гремучего газа, температура которого до взрыва равна t, а τ_1— повышение температуры для случая, когда температура гремучего газа перед возгоранием равна t_1. Тогда

$$\tau = Q/\gamma, \qquad \tau_1 = Q_1/\gamma,$$

и поэтому

$$\tau_1 = \tau + ((\gamma'/\gamma) - 1))\,(t_1 - t).$$

Таким образом, при одном предположении относительно удельной теплоемкости водяного пара

$$\tau_1 = \tau + 0{,}115\,(t_1 - t),$$

при другом —

$$\tau_1 = \tau + 1{,}091\,(t_1 - t).$$

Если бы второе предположение было правильным, то температура водяного пара после горения вследствие повышения температуры гремучего газа должна была бы возрасти на величину, вдвое большую той, на которую повысилась температура гремучего газа.

27.
К ТЕОРИИ ДИФФУЗИИ ГАЗОВ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ *

1. В своей работе «О равновесии и движении, в особенности диффузии, газовых смесей» [1] Стефан [1] вывел для диффузии двух газов через пористую перегородку следующие уравнения:

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_2 v_1 - p_1 v_2) + \frac{a p_0}{k_1} v_1 = 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{1}{k}(p_1 v_2 - p_2 v_1) + \frac{a p_0}{k_2} v_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0. \qquad (2)$$

Они относятся к движению обоих газов в направлении оси x внутри перегородки, или «диафрагмы». Здесь p_1 — давление, под которым находилось бы в момент времени t количество первого газа в единице объема в точке с коорди-

* Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand // Ann. Phys. 1884. Bd. 21. S. 563—572. Перевод Ю. А. Данилова по изданию: *G. Kirchhoff*. Ges. Abhandl. Nachtrag. Herausgegeber von L. Boltzmann. Leipzig: Johann Ambrosius Barth. 1891. S. 78—91.

[1] *Stefan J.* // Wien. Ber. 1871. Bd. 63. S. 63.

натой x, если бы этот объем был занят только первым газом. Если P_1 — парциальное давление первого газа вне диафрагмы, то на поверхности диафрагмы $p_1=\alpha P_1$. Коэффициент α означает долю объема пористого тела, занимаемую порами. Предполагается, что внутри пористого тела не происходит конденсация газа. Через v_1 обозначен измеренный при произвольно выбранном нормальном давлении p_0 и температуре опыта объем количества газа, проникшего к моменту времени t через единичную площадку, перпендикулярную оси x в точке с координатой x, по ту сторону, которая обращена в сторону возрастания x. Аналогичный смысл имеют величины p_2 и v_2 для второго газа. Коэффициенты диффузии первого и второго газов в диафрагме обозначены k_1 и k_2, k — коэффициент взаимной диффузии двух газов при нормальном давлении p_0.

К этим дифференциальным уравнениям в частных производных необходимо добавить некоторые условия на поверхностях диафрагмы. Предположим, что эти поверхности совпадают с плоскостями $x=0$ и $x=\Delta$. По обе стороны поверхности находятся замкнутые объемы — камеры, в каждой из которых оба газа равномерно перемешаны. Камера, примыкающая к поверхности $x=0$, имеет объем V', объем другой камеры равен V''. Каждая из камер измеряется длиной трубы, имеющей равный с ней объем и поперечное сечение, равное поперечному сечению диафрагмы. Если обозначить через P_1', P_2', P_1'', P_2'' парциальные сечения двух газов в двух камерах в момент времени t, то

при $x=0$

$$v_1=-\frac{1}{p_0}\frac{d(V'P_1')}{dt}, \qquad p_1=\alpha P_1',$$

$$v_2=-\frac{1}{p_0}\frac{d(V'P_2')}{dt}, \qquad p_2=\alpha P_2', \tag{3}$$

при $x=\Delta$

$$v_1=\frac{1}{p_0}\frac{d(V''P_1'')}{dt}, \qquad p_1=\alpha P_1'',$$

$$v_2=\frac{1}{p_0}\frac{d(V''P_2'')}{dt}, \qquad p_2=\alpha P_2''.$$

Пусть

$$P_1'+P_2'=P', \qquad P_1''+P_2''=P'',$$

тогда P' — полное давление в первой камере, P'' — полное давление во второй камере. В опытах по диффузии, описанных Бунзеном в его «Газометрических методах», P' и P'' постоянны. В рассматриваемом нами случае постоянны V' и V''.

Кроме того, выполняются соотношения, означающие, что начальное распределение газа должно быть задано.

2. Положив $p_2=0$ и $v_2=0$, мы придем к более простому случаю диффузии одного газа через пористую перегородку. Уравнения (1) и (2) переходят при этом в уравнения

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\alpha p_0}{k_1}v_1=0, \qquad \frac{1}{p_0}\frac{\partial p_1}{\partial t}+\frac{\partial v_1}{\partial x}=0, \tag{4}$$

а уравнения (3) — в соотношения:

при $x=0$

$$v_1=-\frac{1}{p_0}\frac{d(V'P_1')}{dt}, \qquad p_1=\alpha P_1', \tag{5}$$

при $x=\Delta$

$$v_1=\frac{1}{p_0}\frac{d(V''P_1'')}{dt}, \qquad p_1=\alpha P_1''.$$

Если P_1' и P_2'', т. е. давления в обоих камерах поддерживаются постоянными, то этим уравнениям можно удовлетворить в предположении, что p_1 и v_1 не зависят от времени, т. е. что процесс в диафрагме стационарен. В этом случае v_1 не зависит и от x, поэтому

$$p_1=\mathrm{const}-\frac{\alpha p_0}{k_1}v_1x. \tag{6}$$

Стационарное состояние может возникать лишь сразу же после начала диффузии, когда начальное распределение газа описывается соотношением (6). Если же начальное распределение имеет иной вид, то при тех условиях, в которых обычно проводятся эксперименты, влияние начального распределения очень быстро ослабевает и состояние течения лишь весьма незначительно отличается от стационарного.

Если постоянны не давления P_1', P_2', а объемы V', V'', то стационарное состояние (помимо состояния покоя), строго говоря, невозможно. Но приближенно в любой момент времени течение в диафрагме можно считать совпадающим с таким стационарным течением, которое установилось бы, если бы давления P_1', P_2'' достаточно долго сохраняли свои мгновенные значения. При постоянных V' и V'' из уравнений (4) и соотношения (6) с помощью условий (5) также следует, что

$$\frac{d(P_1'-P_2'')}{dt}=-\frac{k_1}{V\Delta}(P_1'-P_1''),$$

где

$$\frac{1}{V'}+\frac{1}{V''}=\frac{1}{V}. \tag{7}$$

Таким образом,

$$P_1'-P_1''=Be^{-k_1t/V\Delta}, \tag{8}$$

где B — постоянная, равная начальному значению разности $P_1'-P_1''$.

Погрешность соотношения (8) удается оценить теоретически, так как при постоянных V' и V'' уравнения (4) с условиями (5) допускают точное решение, для которого давление p_1 при $t=0$ совпадает с произвольно заданной функцией координаты x.

Полагая

$$a^2=\frac{k_1}{\alpha}, \qquad b'=\frac{\alpha}{V'}, \qquad b''=\frac{\alpha}{V''} \tag{9}$$

и исключая v_1 из уравнений (4), получаем

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \tag{10}$$

а условия (5) порождают граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = a^2 b' \frac{\partial p_1}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\text{при } x = \Delta \quad \frac{\partial p_1}{\partial t} = -a^2 b'' \frac{\partial p_1}{\partial x},$$

которые можно записать и в таком виде:

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = b' \frac{\partial p_1}{\partial x},$$

$$\text{при } x = \Delta \quad \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -b'' \frac{\partial p_1}{\partial x}.$$

Рассматриваемая краевая задача легко сводится к известной задаче теплопроводности. Действительно, если обозначить

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \vartheta, \tag{12}$$

то уравнение (10) и граничные условия можно записать в виде:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2},$$

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = b' \vartheta,$$

$$\text{при } x = \Delta \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -b'' \vartheta,$$

а это — не что иное, как уравнение и граничные условия, которым должна удовлетворять температура ϑ в теле, ограниченном плоскостями $x=0$ и $x=\Delta$ и отдающее через них свое тепло окружающей среде, находящейся при нулевой температуре (среды, примыкающие к торцам, обладают различной теплопроводностью). Уравнению теплопроводности и граничным условиям удовлетворяет

$$\vartheta = \sum A_n X_n e^{-(\lambda_n^2 a^2/\Delta^2)\, t}, \tag{13}$$

где сумма берется по всем целым n от 1 до ∞; A_n — произвольные постоянные

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\cos \frac{\lambda_n x}{\Delta} + \frac{\beta'}{\lambda_n} \sin \frac{\lambda_n x}{\Delta} \right), \tag{14}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — возрастающие по величине положительные корни уравнения

$$\left(\lambda - \frac{\beta' \beta''}{\lambda} \right) \operatorname{tg} \lambda = \beta' + \beta'' \tag{15}$$

для краткости введены обозначения

$$\beta' = b'\Delta, \qquad \beta'' = b''\Delta. \tag{16}$$

Постоянные A_n определяются, если ϑ задана при $t=0$ как функция от x. Обозначим эту функцию через ϑ_0. Тогда

$$\vartheta_0 = \sum A_n X_n.$$

Но

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} = -\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2} X_n$$

и при $x = 0$

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{\beta'}{\Delta} X_n,$$

при $x = \Delta$

$$\frac{dX_n}{dx} = -\frac{\beta''}{\Delta} X_n.$$

Из дифференциального уравнения для X_n, используя значение, принимаемое X_n при $x = 0$, получаем

$$\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 + \frac{\lambda_n^2}{\Delta^2}(X_n)^2 = \frac{1}{\Delta^2},$$

откуда, в свою очередь, следует, что при $x = \Delta$

$$(X_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta''^2},$$

в то время как при $x = 0$

$$(X_n)^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \beta'^2}.$$

Из того же дифференциального уравнения мы получаем и соотношение

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2}\int_0^\Delta X_n X_m dx = -\left[X_m \frac{dX_n}{dx}\right]_0^\Delta + \int_0^\Delta \frac{dX_n}{dx}\frac{dX_m}{dx}dx.$$

Отсюда следует, что если n и m — два различных целых положительных числа, то

$$\int_0^\Delta X_n X_m dx = 0$$

и

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2}\int_0^\Delta (X_n)^2 dx - \int_0^\Delta \left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\beta'}{\lambda_n^2 + \beta'^2} + \frac{\beta''}{\lambda_n^2 + \beta''^2}\right),$$

а поскольку

$$\frac{\lambda_n^2}{\Delta^2}\int_0^\Delta (X_n)^2\,dx+\int_0^\Delta\left(\frac{dX_n}{dx}\right)^2 dx=\frac{1}{\Delta},$$

то

$$2\lambda_n^2\int_0^\Delta (X_n)^2\,dx=\Delta\left(1+\frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2}+\frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}\right).$$

В результате мы получаем для A_n уравнение

$$A_n\Delta\left(1+\frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2}+\frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}\right)=2\lambda_n^2\int_0^\Delta \vartheta_0 X_n dx. \qquad (17)$$

Тем самым выражение (13) для ϑ полностью определено.

Вычислим теперь p_1 с помощью (12) при условии, что при $t=0$ величина p_1 совпадает с заданной функцией от x. Для этого воспользуемся тем, что, как следует из (14),

$$\int X_n dx=\frac{\Delta}{\lambda_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}\left(\lambda_n\sin\frac{\lambda_n x}{\Delta}-\beta'\cos\frac{\lambda_n x}{\Delta}\right),$$

откуда

$$p_1=A+\sum\frac{A_n\Delta}{\lambda_n^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}\left(\lambda_n\sin\frac{\lambda_n x}{\Delta}-\beta'\cos\frac{\lambda_n x}{\Delta}\right)e^{-\lambda_n^2\sigma^2 t/\Delta^2}, \qquad (18)$$

где A — величина, не зависящая от x. Эта величина не должна зависеть и от t, так как давление p_1 должно удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных (10), а ему удовлетворяет каждое слагаемое входящей в выражение для p_1 суммы. Пусть $p_1=\pi_0$ при $t=0$. Тогда, полагая

$$\vartheta_0=\partial\pi_0/\partial x,$$

вычислим коэффициенты A_n при этом значения ϑ_0 по формуле (17). Величину A найдем из следующих соображений. Умножив уравнение (10) на dx и проинтегрировав (с учетом граничных условий (11)) от 0 до Δ, получим (обозначив через p_1' и p_1'' граничные значения p_1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_1'}{b'}+\frac{p_1''}{b''}+\int_0^\Delta p_1 dx\right)=0.$$

Это соотношение означает, что имеющаяся масса газа не изменяется со временем. Если ввести величины β' и β'', задаваемые соотношением (16), то

$$\frac{p_1'}{\beta'}+\frac{p_1''}{\beta''}+\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta p_1 dx=\mathrm{const}.$$

Если приравнять значения, принимаемые этим выражением при $t=0$ и $t=\infty$, и учесть, что вследствие (18) при $t=\infty$

$$p_1' = p_1'' = p_1 = A,$$

то для определения A мы получаем соотношение

$$A\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta''}+1\right)=\frac{\pi_0'}{\beta'}+\frac{\pi_0''}{\beta''}+\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \pi_0 dx.$$

Особый интерес для эксперимента представляет случай, весьма близкий к реализуемому, когда π_0 при всех конечных отличных от нуля значениях x, заключенных между 0 и Δ, принимает одно значение π_0'', а при $\Delta=0$ принимает другое значение π_0'. Тогда $\vartheta_0=0$ при любом конечном отличном от нуля значении x, а при бесконечно малых x величина ϑ_0 обращается в бесконечность, но так, что если ε — сколь угодно малая положительная конечная величина, то

$$\int_0^\varepsilon \vartheta_0 dx = \pi_0'' - \pi_0'.$$

В этом случае из (17) следует, что

$$\frac{A_n\Delta}{\lambda_n^2}\left(1+\frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2}+\frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}\right)=2\frac{\pi_0''-\pi_0'}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}.$$

Полученное значение A_n необходимо подставить в (18), положив один раз $x=0$, а другой — $x=\Delta$. При $x=\Delta$ квадрат X_n уже вычислен, но его знак остался неопределенным. Вычислив корни уравнения (15), находим из (14), что при $x=\Delta$

$$X_n = \sin\lambda_n \frac{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}{\lambda_n(\beta'+\beta'')}.$$

Следовательно, X_n имеет такой же знак, как $\sin\lambda_n$. Но, как видно из уравнения (15), если разделить его на $\operatorname{tg}\lambda_n$, что корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ лежат в интервалах от 0 до π, от π до 2π, от 2π до $3\pi, \ldots$. Следовательно, $\sin\lambda_n$ имеет такой же знак, как $(-1)^{n+1}$, откуда при $x=\Delta$ получаем

$$X_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta''^2}}$$

и

$$\Delta\frac{dX_n}{dx}, \quad \text{т. е} \quad \frac{\beta\cos\lambda_n-\lambda_n\sin\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta'^2}}=(-1)^n\frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2+\beta''^2}}.$$

Используя полученный результат, вводя вместо давлений p_1', p_2'', относящихся к газам внутри диафрагмы, давления P_1', P_2' в камерах, примыкающих с двух сторон к граничным поверхностям диафрагмы, и полагая для краткости

$$1+\frac{\beta'}{\lambda_n^2+\beta'^2}+\frac{\beta''}{\lambda_n^2+\beta''^2}=N,$$

находим из (18) (деля это соотношение на α)

$$P_1' - \frac{A}{\alpha} = 2(P_0' - P_0'') \sum \frac{1}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \frac{\beta'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t/\Delta^2},$$

$$P_1'' - \frac{A}{\alpha} = 2(P_0' - P_0'') \sum (-1)^n \frac{1}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}} e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t/\Delta^2}.$$

Следовательно,

$$P_1' - P_1'' = 2(P_0' - P_0'') \sum \frac{\beta}{N\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} \left(\frac{\beta'}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta'^2}} - (-1)^n \frac{\beta''}{\sqrt{\lambda_n^2 + \beta''^2}} \right) e^{-\lambda_n^2 \alpha^2 t/\Delta^2}. \quad (19)$$

Это выражение совпадает с формулой (8), если β' и β'' считать бесконечно малыми и учитывать только конечные величины. Тогда

$$\lambda_1^2 = \beta' + \beta'',$$

и полученная только что сумма сводится к первому члену.

3. Соотношение (8) было выведено в предположении, что течение в диафрагме в каждый бесконечно малый промежуток времени допустимо считать стационарным. Если в экспериментальной установке рассматриваемого типа величины β' и β'' так малы (соответственно объемы обеих камер, примыкающих к диафрагме, так велики по сравнению с объемом диафрагмы), что при диффузии *одного* газа соотношение (19) не отличается сколько-нибудь заметно от соотношения (8), то с достаточным основанием можно считать, что и при диффузии *двух* газов соотношение (19) мало отличается от соотношения (8). Тогда v_1 и v_2 в уравнениях (1) и (2) допустимо считать не зависящими от x, что позволяет легко проинтегрировать уравнения (1). Умножив первое из них на $-v_2$, а второе — на v_1, сложив и проинтегрировав, получим

$$p_1 + p_2 = -\alpha p_0 \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2} \right) x + \text{const}$$

и

$$p_2 v_1 - p_1 v_2 + \frac{\alpha k p_0 v_1 v_2}{v_1 + v_2} \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right) = e^{(v_1 + v_2)x/k} \text{const}.$$

Положив $x=0$ и $x=\Delta$, исключим обе величины, обозначенные const, и вместо p_1 и p_2 подставим давления в камерах. В результате получим

$$P' - P'' = p_0 \left(\frac{v_1}{k_1} + \frac{v_2}{k_2} \right) \Delta, \quad (20)$$

$$\ln \frac{(P_2'' v_1 - P_1'' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right)}{(P_2' v_1 - P_1' v_2)(v_1 + v_2) + k p_0 v_1 v_2 \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} \right)} = \frac{v_1 + v_2}{k} \Delta. \quad (21)$$

Эти два уравнения вместе с граничными условиями (3) определяют 6 функций времени P_1', P_1'', P_2', P_2'', v_1, v_2, если известны их начальные значения. Исключив v_1 и v_2 из граничных условий (3), найдем после интегрирования

$$V'(P'_1-\Pi_1)+V''P''_1=0, \qquad V'P'_2+V''(P''_1-\Pi_2)=0, \tag{22}$$

где Π_1 и Π_2 — две постоянные, обозначающие давления, которые создавали бы первый и второй газы, если бы весь первый газ находился в первой камере, а весь второй газ — во второй камере. Кроме того, из тех же условий следует, что

$$v_1+v_2=-\frac{V'}{p_0}\frac{dP'}{dt}=\frac{V''}{p_0}\frac{dP''}{dt}.$$

Если ввести объем V, задаваемый соотношением (7), и положить

$$P'-P''=U \tag{23}$$

то то же равенство можно представить в виде

$$v_1+v_2=-\frac{V}{p_0}\frac{dU}{dt}. \tag{24}$$

Полагая

$$V'\left(\frac{P'_1-\Pi_1}{k_1}+\frac{P'_2}{k_2}\right)=-\frac{1}{\Delta}W, \tag{25}$$

находим из (22)

$$V''\left(\frac{P''_1}{k_1}+\frac{P''_2-\Pi_2}{k_2}\right)=\frac{1}{\Delta}W.$$

Между функциями W и U возникает простое соотношение. Действительно, из (20) следует, что

$$k_0\left(\frac{v_1}{k_1}+\frac{v_2}{k_2}\right)=\frac{1}{\Delta}U, \tag{26}$$

поэтому при дифференцировании (25) с учетом (3) мы получаем

$$\frac{dW}{dt}=U.$$

Функции P'_1, P''_1, P'_2, P''_2, v_1, v_2 можно выразить через W и ее первые две производные по t. Сохраняя обозначение U, находим из (22), (23) и (25)

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)(P'_1-\Pi_1)=-\frac{1}{V'}\left(\frac{V}{k_2}(U+\Pi_2-\Pi_1)+\frac{W}{\Delta}\right),$$

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)P'_2=\frac{1}{V'}\left(\frac{V}{k_1}(U+\Pi_2-\Pi_1)+\frac{W}{\Delta}\right),$$

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)P''_1=\frac{1}{V''}\left(\frac{V}{k_2}(U+\Pi_2-\Pi_1)+\frac{W}{\Delta}\right), \tag{27}$$

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)(P''_2-\Pi_2)=-\frac{1}{V''}\left(\frac{V}{k_1}(U+\Pi_2-\Pi_1)+\frac{W}{\Delta}\right).$$

Отсюда с помощью (3) или из (24) и (26) получаем

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)v_1=\frac{1}{p_0}\left(\frac{V}{k_2}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{\Delta}\right),$$

$$\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)v_2=-\frac{1}{p_0}\left(\frac{V}{k_2}\frac{dU}{dt}+\frac{U}{\Delta}\right).$$

Подставляя эти выражения в (21), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для W. Обе постоянные интегрирования определяются по начальным значениям W и U, которые, в свою очередь, вычисляются с помощью (23) и (25) по начальным значениям P_1', P_1'', P_2', P_2''. Последние позволяют также определить с помощью соотношений (22) постоянные Π_1 и Π_2, входящие в дифференциальное уравнение.

Хотя полученное нами дифференциальное уравнение не удается проинтегрировать, им можно воспользоваться для определения входящей в него постоянной k из наблюдений и проверки теории, послужившей основой для вывода уравнения. При произвольном значении t по наблюдениям можно найти U, затем с помощью механической квадратуры вычислить W и по интерполяционной формуле вычислить dU/dt. Подставив в дифференциальное уравнение любые согласованные между собой значения U, W и dU/dt, мы получаем возможность найти k в предположении, что все остальные входящие в уравнение постоянные известны.

4. Относительно начальных значений P_1', P_1'', P_2', P_2'' предполагается, что при $t=0$

$$P_1'=\Pi,\quad P_1''=0,\qquad P_2'=0,\qquad P_2''=\Pi.$$

Тогда из (22) следует, что

$$\Pi_1=\Pi_2=\Pi,$$

а из (23) и (25) мы получаем при $t=0$

$$U=0 \quad \text{и} \quad W=0.$$

С учетом (26) мы получаем из (21) при $t=0$ соотношение

$$\frac{1}{p_0 k}V\Delta\frac{dU}{dt}=\ln\frac{p_0k+\Pi k_2}{p_0k+\Pi k_1}. \tag{28}$$

В некий момент времени абсолютная величина U достигает максимума. Соотношение между значениями, принимаемыми в этот момент функциями U и W, мы найдем, подставив в (21) $dU/dt=0$. Но удобнее выводить соотношение между U и W в максимуме абсолютного значения U не из соотношения (21), обращающегося в тождество при непосредственной подстановке $dU/dt=0$, а с помощью соображений, связанных с уравнениями (1). Умножив первое из них на $(p_1+p_2)/k+\alpha p_0/k_2$, второе — на $(p_1+p_2)/k+\alpha p_0/k_1$ и сложив, получим

$$\frac{p_1+p_2}{k}\frac{\partial(p_1+p_2)}{dx}+\alpha p_0\left(\frac{1}{k_2}\frac{\partial p_1}{dx}+\frac{1}{k_1}\frac{\partial p_2}{dx}\right)=-(v_1+$$

$$+v_2)\alpha p_0\left(\frac{1}{k}\left(\frac{p_1}{k_1}+\frac{p_2}{k_2}\right)+\frac{\alpha p_0}{k_1k_2}\right). \tag{29}$$

Если (как в рассматриваемом случае) $v_1+v_2=0$ в максимуме или минимуме U, то уравнение (29) интегрируемо. Интегрируя его от $x=0$ до $x=\Delta$ и подставляя вместо давления в диафрагме давление в камерах, получаем

$$\frac{1}{2kp_0}(P''^2-P'^2)+\frac{P_1''-P_1'}{k_2}+\frac{P_2''-P_2'}{k_1}=0.$$

Но из (27) следует, что

$$P''+P'=2\Pi+\frac{V''-V'}{V''+V'}U, \qquad P''-P'=-U,$$

$$\frac{P_1''-P_1'}{k_2}+\frac{P_2''-P_2'}{k_1}=\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi-\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)U-\frac{W}{V\Delta},$$

и поэтому

$$\frac{1}{kp_0}\left(\Pi+\frac{V''-V'}{V''+V'}\frac{U}{2}\right)U+\frac{W}{V\Delta}+\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)U-\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi=0. \tag{30}$$

Сумма v_1+v_2 обращается в нуль и при $t=\infty$, так как тогда обращается в нуль каждое из двух слагаемых. Рассуждения, связанные с уравнением (29), остаются в силе и в этом случае, и мы по-прежнему получаем уравнение (30), но с $U=0$, поэтому если обозначить через W_∞ значение W при $t=\infty$, то

$$W_\infty=\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)\Pi V\Delta. \tag{31}$$

Соотношение (31) можно вывести и из одних лишь равенств (27), не обращаясь к (21) или какому-нибудь эквивалентному уравнению, если воспользоваться тем, что при $t=\infty$

$$P_1'=P_1'' \quad \text{и} \quad P_2'=P_2''.$$

При сравнении соотношения (31) с наблюдениями желательно иметь в явном виде зависимость W от t при больших значениях t, пользуясь которой можно было бы вычислить значение W при $t=\infty$. Эту зависимость нетрудно получить из уравнения (29). При больших t величины v_1 и v_2 малы, и, как видно из (1), малы изменения p_1 и p_2 внутри диафрагмы. Следовательно, p_1 и p_2 в правой части уравнения (29) можно считать постоянными и положить равными значениям, принимаемым $\alpha P_1'$ (или $\alpha P_1''$) и $\alpha P_2'$ (или $\alpha P_2''$) при $t=\infty$, т. е. воспользоваться соотношениями (27) и положить

$$p_1=\alpha\Pi\frac{V}{V''}, \qquad p_2=\alpha\Pi\frac{V}{V'}.$$

Интегрируя снова уравнение (29) от $x=0$ до $x=\Delta$, подставляя вместо суммы v_1+v_2 ее выражение из (24), пренебрегая членом, содержащим множитель U^2, и вводя величину W_∞, задаваемую соотношением (31), получаем для W линейное дифференциальное уравнение

$$W-W_\infty+a\frac{dW}{dt}+b\frac{d^2W}{dt^2}=0,$$

где

$$a = V\Delta\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\right),$$

$$b = V^2\Delta^2\left(\frac{1}{k_1k_2} + \frac{\Pi}{kp_0}\,\frac{\dfrac{V'}{k_1} + \dfrac{V''}{k_2}}{V' + V''}\right).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$W_\infty - W = C_1e^{-\lambda_1 t} + C_2e^{-\lambda_2 t},$$

где λ_1 и λ_2 — корни квадратного уравнения

$$1 - a\lambda + b\lambda^2 = 0,$$

т. е. $1/\lambda_1$ и $1/\lambda_2$ вычисляются по формуле

$$\frac{V\Delta}{2}\left\{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{\Pi}{kp_0} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)^2 + \frac{\Pi^2}{k^2p_0^2} - 2\left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right)\frac{\Pi}{kp_0}\,\frac{V' - V''}{V' + V''}}\right\}.$$

При любых k_1, k_2, V', V'' величины $1/\lambda_1$ и $1/\lambda_2$ вещественны и положительны. При достаточно больших t

$$W_\infty - W = C_1e^{-\lambda_1 t},$$

где λ_1 — меньший из двух корней. Следовательно:

$$U = \lambda_1 C_1 e^{-\lambda_1 t}$$

и

$$W_\infty = W + U/\lambda_1.$$

28.
О ЦЕЛИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ *

Высокочтимое собрание!

Ровно год тому назад уважаемый член нашего университета живыми красками обрисовал здесь жизнь и деятельность Карла Фридриха, благородного правителя, который спас эту высшую школу от угрожавшего ей упадка и вывел ее на путь к новому процветанию. Сегодня на мне лежит почетная обязанность отметить день рождения Карла Фридриха академической речью. Полагаю, что в области науки, которую я представляю, не найти более достойной и более общей темы, чем рассмотрение цели естествознания.

Прошу Вашего снисхождения, если в своем стремлении как можно лучше в меру своих сил выполнить задачу, которую я перед собой поставил, мне придется значительно отойти от стиля тех блестящих речей, которые в предшествующие годы так часто покоряли ваши сердца и возбуждали вашу фанта-

* Ueber das Ziel der Naturwissenschaften. Heidelberg, 1865. 32 S. Перевод Р. Б. Сегаля.

зию. В моих рассуждениях будет присутствовать лишь здравый смысл, к которому я буду обращаться.

Если вспомнить, сколь разнообразны впечатления, получаемые нашими органами чувств от внешнего мира, то заведомо покажется едва ли возможным обнаружить коренное сходство во всех явлениях природы. И все же оно имеется, и оно должно явиться отправной точкой моего обсуждения. Начнем с рассмотрения простейшего опыта: представим себе тело, из-под которого вдруг убрали подставку, вследствие чего тело падает. Само по себе тело при этом никак не изменится, оно лишь переходит из одного места пространства в другое. Имеется бесконечное множество явлений, в которых, как и в рассматриваемом случае, движущееся остается неизменным. Эту область явлений можно было бы еще чрезвычайно развить и чрезвычайно разнообразить, если допустить, что тела, которые движутся, либо их части имеют различные движения и принимают все новые и новые положения. Но имеются также и процессы, в которых проявляются не только такие движения. Когда вода замерзает или испаряется, когда соль растворяется в воде, когда уголь сгорает, то кажется, что происходит качественное изменение мельчайших частиц тела; ведь в некоторых из этих примеров можно было бы прийти к выводу, что мы наблюдаем полное исчезновение тела.

Но вода не исчезает, она превращается в газ, в водяной пар, который невидимо расширяется в атмосфере. Также не исчезает и уголь при сгорании: он соединяется химически с кислородом воздуха, образуя невидимый углекислый газ. Химики пришли к убеждению, что в любом химическом соединении различных тел их мельчайшие части не повреждаются и не претерпевают качественных изменений, но только получают новое расположение. Любой химический процесс сводится также только к движению частей, остающихся неизменными.

Это утверждение впервые было высказано четко и определенно приблизительно 80 лет тому назад Лавуазье. Оно является основным принципом химии. Но не только для химии, — это утверждение приобрело важнейшее значение для всей науки. Основываясь на нем, можно утверждать, что *все процессы, происходящие в природе, заключаются в движении неизменной материи*. Всякое достижение в познании природы, которое могло бы послужить проверкой этого принципа, приносит ему новое подтверждение.

Существует наука механика, задачей которой является определять движение тела, когда известны причины, его обуславливающие. Механика находится в теснейшей взаимосвязи с наукой о природе. Я попытаюсь подробнее раскрыть эту связь и с этой целью прежде всего поясняю, как полно и каким образом механика решает свою задачу.

Механика родственна геометрии. Обе науки опираются на чистую математику, законы обеих в отношении их точности находятся на совершенно одинаковом уровне; механическим законам можно приписать абсолютную достоверность на таком же основании, что и утверждениям геометрии.

Геометрия достигла высокого уровня развития уже у древних греков; основные понятия, на которых дедуктивным путем строится вся эта наука, понятия расстояния и угла, были ими определены совершенно четко. Ведь и сегодня еще

во многих школах как основу геометрического образования используют «начала Евклида». О механике ничего подобного сказать нельзя, об основных ее понятиях в древности не догадывались. Хотя Архимед и нашел некоторые законы механики: он знал кое-что о равновесии рычага и нашел закон о равновесии плавающего тела, который еще теперь называют его именем.

Но эти и подобные им знания были разобщены, обособлены друг от друга, вследствие чего становится понятным, почему на протяжении почти двух тысячелетий, вплоть до времен Галилея, они нисколько не умножились, и даже не были по достоинству оценены. Величайший мыслитель древности Аристотель неоднократно рассуждал о движении тел, но его усилия найти такие понятия, основываясь на которых можно научно подойти к рассмотрению этой задачи, ни к чему не привели. Он пытался применить к движению такие понятия как совершенное и несовершенное, лучшее и худшее, естественное и насильственное, понятия, которые вовсе не относятся к движению, и приходил, следовательно, к утверждениям, лишенным всякого смысла.

Но одиночкам, как и всему роду человеческому, истина редко открывается с первой попытки ее обнаружить, поэтому наше уважение перед великим умом древности не уменьшается, когда мы видим, что его усилия создать научную механику оказались безуспешными. Лишь после того, как миновали мрачные столетия средневековья, такие усилия были снова предприняты, на этот раз с бóльшим успехом. Фактически благодаря Галилею приобрело ясность понятие *с и л ы*, явившееся точкой опоры в механике.

Слово «*с и л а*» в повседневной жизни имеет очень разнообразные значения, и даже в научном языке им обозначают различные понятия. *З д е с ь* же под ним следует понимать причину изменения движения материальной точки. Из этого определения следует, что точка, на которую никакая сила не действует, сохраняет свое прямолинейное движение, т. е. движется в неизменном направлении, причем с постоянной скоростью.

Если на точку действует сила в направлении ее движения, то ее скорость возрастает, точка испытывает ускорение; так называют увеличение скорости, происходящее в единицу времени. Материальная точка испытывает замедление, если сила действует навстречу ее движению, и она отклоняется от своего прямолинейного пути и вынуждена описывать кривую линию, если сила действует на нее в каком-либо другом направлении. В любом случае сила вызывает ускорение *в н а п р а в л е н и и д е й с т в и я с и л ы*. Произведение ускорения на массу точки, т. е. на количество материи, которое она содержит, служит мерой величины силы.

Открытие основного понятия механики — понятия силы — было существенно облегчено благодаря тому счастливому обстоятельству, что силы тяжести следуют очень простому закону, а именно, что вес тела один и тот же, независимо от того, покоится ли оно или как-либо движется. Отсюда следует, что движение небольшого тяжелого тела, которое либо свободно падает, либо брошено, представляет собой простейший случай, который можно исследовать в механике. Изучение этого движения как раз и привело Галилея к понятию силы.

Задача определения движения отдельной материальной точки, на которую действует заданная сила, сравнительно очень проста. Так как сила определяет

ускорение, получаемое точкой в каждый момент времени, то становится возможным указать для л ю б о г о момента времени скорость точки и место ее нахождения, если известны ее скорость и местонахождение для какого-то о д н о го момента времени. Но как движутся точки, на которые действуют заданные силы, если эти точки друг с другом связаны? Связаны жестко, как части твердого тела, или связаны так, что возможна некоторая, но ограниченная подвижность одной точки относительно другой, как у частей жидкости или у упругого твердого тела. Этот вопрос много труднее, и его полное и общее решение было получено лишь позднее. Чтобы иметь возможность рассказать о способе его решения, я должен сначала заметить следующее.

Возможен случай, когда к материальной точке или к системе точек приложены силы, действия которых мешают друг другу, причем в результате тело движется так, как будто вообще никаких сил нет. В таком случае говорят: эти силы поддерживают равновесие. Некоторые простые случаи равновесия были известны до Галилея, хотя тогда еще и не было четкого представления о понятии силы. Например, Архимед правильно указал условие равновесия двух параллельных сил, приложенных к рычагу; знаменитый художник, скульптор и архитектор Леонардо да Винчи нашел условие равновесия для случая непараллельных сил; Стевин обнаружил условие равновесия тяжелого тела на наклонной плоскости.

Сегодня механика обладает принципом, который дает условие равновесия для любой системы материальных точек, связанных произвольным образом друг с другом. Это п р и н ц и п в и р т у а л ь н ы х с к о р о с т е й [1]. Он был найден Галилеем, хотя и не в самом общем виде, а Иоганн Бернулли впервые указал на его общее значение. Его можно выразить в нескольких словах, если определить, что в механике следует понимать под р а б о т о й силы. Представим себе материальную точку, на которую действует сила, и сдвинем ее на бесконечно малое расстояние в каком-либо направлении.

Произведение величины силы на перемещение, измеренное в направлении действия силы, называют работой силы на мысленном перемещении, или работой, совершаемой силой при этом перемещении. Очевидно, эта работа может быть положительной или отрицательной, так как перемещение может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, совпадает ли оно с направлением силы или нет. Принцип виртуальных скоростей утверждает, что произвольная система материальных точек находится в равновесии тогда и только тогда, когда для любого бесконечно малого перемещения системы, допускаемого связями между точками, с у м м а р а б о т в с е х с и л р а в н а н у л ю.

Нельзя не признать значения этого столь общего утверждения для механики. Однако, поскольку оно говорит лишь о том, при каком условии система сил не оказывает н и к а к о г о действия, то остается совершенно открытым вопрос о том, к а к о е ж е действие оказывает произвольная система сил. Один шаг в этом направлении, конечно, исключительно важный, был подготовлен Гюйгенсом и сделан Даламбером в середине прошлого столетия.

Представим себе систему материальных точек, соединенных между собой произвольным образом, и пусть на них действуют заданные силы. Каждая из этих точек, если бы она была только одна, сама по себе, имела бы ускорение,

определяемое известным простым способом в зависимости от ее массы и действующей на нее силы. В действительности же она движется иначе, так как на нее действуют связи, соединяющие ее с другими точками. Силу, которую следовало бы добавить к действующей на точку силе, чтобы она в изолированном состоянии двигалась так же, как она движется в действительности, назовем присоединенной силой (die gewonnene Kraft). Тогда принцип Даламбера утверждает, что все силы вместе с присоединенными взаимно уравновешиваются [2]. Тем самым общая задача механики приводится к задаче, решаемой учением о равновесии тел, т. е. учением, которое, как уже упоминалось, может справляться со стоящими перед ним задачами. Принцип Даламбера и принцип виртуальных скоростей позволяют найти движение произвольной системы масс, если заданы силы, на них действующие, и если известно состояние системы, а именно положения и скорости всех ее частей в некоторый момент времени. При этом предполагается, что чисто математические трудности могут быть преодолены.

Если бы нам были известны все силы природы и если бы мы знали состояние материи в какой-либо момент времени, то посредством механики можно было бы определить ее состояние в любой последующий момент времени и проследить, каким образом разнообразные явления природы следуют друг за другом и как они взаимосвязаны. Высшая цель, к которой должна стремиться наука, заключается в осуществлении сделанных здесь предпосылок, т. е. в обнаружении сил, действующих в природе, и в установлении состояния, в котором находится материя в некоторый момент времени, одним словом, в сведении всех явлений природы к механическим.

Посмотрим, насколько мы близки к этой цели в настоящее время, и прежде всего перечислим силы, известные нам в природе, или о которых мы полагаем, что они нам известны. Вопрос о силах идентичен вопросу о свойствах материи; ибо у материи нет другого признака, кроме сил, с которыми ее частицы действуют друг на друга, и не существует никаких других сил, кроме тех, с которыми частицы материи взаимодействуют между собой. Следовательно, перечисление различных сил, которые мы полагаем известными, требует перечисления различных видов материи, существование которых мы допускаем.

На Земле все тела обладают тяжестью, они оказывают давление на опору, они падают, если эту опору убрать. Луна движется вокруг Земли; Земля и планеты обращаются вокруг Солнца. Эти факты очень разнообразны, и все же в их основе лежит одна и та же причина, все это следствия действия одной и той же силы. Знанием этого мы обязаны бессмертной заслуге Ньютона. Ньютон показал, что любые два тела притягиваются друг к другу с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, и что это притяжение между небесными телами обуславливает их движение, а притяжение между Землей и каким-либо земным телом является причиной его тяжести.

Открытое Ньютоном притяжение, так называемая гравитация, является первой известной нам всеобщей силой природы. Но оно является только одной из многих сил, с которыми действуют друг на друга части материи. Если мы хотим согнуть упругое перо, сжать массу газа или жидкости, то потребуется приложить усилие, которое тем больше, чем сильнее заметное изменение формы. Следовательно, между частицами тел действуют силы, сопротивляющиеся подоб-

ному изменению формы. Для разных тел эти силы значительно отличаются; этими силами определяется, будет ли тело твердым, жидким либо газообразным. Тела, приведенные в тесное соприкосновение, прилипают друг к другу, и часто с большой силой. На этом основано действие цементов, клеев, припоев. На куске стекла, погруженном в воду, а затем вынутом из нее, остается висеть капля воды; вода всасывается в узкие промежутки, например, в поры промокательной бумаги. Сахар растворяется в воде, цинк — в слабой кислоте.

Во всех этих явлениях обнаруживают себя силы, с которыми частицы тела действуют друг на друга. Все эти силы называют молекулярными силами. Об их проявлениях известно много, но о законах, по которым они действуют, известно значительно меньше, так как эти силы становятся заметными только на расстояниях, которые нам трудно определить вследствие их малости, а именно при соприкосновении тел. Те самые частички материи, которые на большем расстоянии действуют друг на друга только с силой гравитации, находясь на достаточно малом расстоянии, испытывают действие молекулярных сил, которые попеременно проявляют себя то как силы упругости, когезии и адгезии, то как силы химического сродства. При этом из химических процессов следует вывод, что материя, подчиняющаяся закону гравитации, состоит из такого же количества различных видов, сколько имеется химических элементов.

Но не в с я материя подчиняется действию закона гравитации, не вся материя тяжелая или весомая. Принято считать, что бесконечное небесное пространство и пространство между весомыми частицами тел заполнено невесомым веществом, называемым эфиром или световым эфиром. Именно свет вынуждает нас допустить существование эфира. Звук — это колебания частичек, это волны в воздухе, исходящие от звучащего тела, подобные волнам на поверхности воды, расходящимся во все стороны от брошенного камня. Свет — это волны, подобные звуковым, только нет колеблющихся частичек воздуха.

От звезд свет доходит до наших глаз. Следовательно, огромные межзвездные пространства должны быть заполнены чем-то, что может передавать колебания, и это нечто названо эфиром. То, что нам о нем известно, основано на свойствах света. Отсюда вытекает, что в так называемом пустом пространстве, т. е. в пространстве, в котором нет весомой материи, эфир ведет себя подобно упругому твердому телу. Ведь колебания света поперечны, т. е. таковы, что частицы всегда движутся перпендикулярно к направлению распространения, а поперечные колебания возможны не в жидких или газообразных телах, а только в твердых. Есть нечто поражающее воображение, когда мы узнаем, что эфир, который заведомо бесконечно тоньше любой весомой материи, известной нам, относительно света ведет себя подобно твердому телу, а не подобно газу. Однако этот факт станет несколько понятнее, если учесть поразительную быстроту, с которой распространяются световые колебания. Существуют световые лучи разного цвета, и они отличаются различной длительностью своих колебаний; частицы эфира для красного света колеблются медленнее, чем для любого другого, и все же длительность одного колебания составляет здесь приблизительно одну пятисотмиллионную часть одной миллионной доли секунды.

Если бы мы были в состоянии постичь непосредственно своим умом промежуток времени столь неизмеримой малости, то, вероятно, мы бы не обнаружили

разницы между твердыми, жидкими и газообразными телами, а жидкости и газы обнаруживали бы те же свойства, что и твердые тела.

Если луч счета падает из пустого пространства на тело, то он частично отражается, частично проникает внутрь тела и идет далее в изменившемся направлении. Он преломляется и затем вследствие поглощения ослабляется в большей или меньшей степени в зависимости от природы тела. Из явлений отражения и преломления световых лучей надо заключить, что эфир внутри тела находится в другом состоянии, чем вне его. Изменение, претерпеваемое эфиром внутри тела, и поглощение света указывает на силы, с которыми весомая материя воздействует на эфир. О законах этих сил сегодня мы ничего не знаем, как и о законах молекулярных сил.

Помимо эфира, необходимо допустить еще один вид невесомой материи, а именно существование двух так называемых электрических жидкостей, которые при современном состоянии науки следует рассматривать как причину разнообразных электрических и магнитных явлений.

Смола, стекло, сургуч и многие другие тела, если их потереть, приобретают свойство притягивать, а затем отталкивать мелкие предметы, такие, как зола, соломинки, кусочки бумаги. Вскоре после того, как эти явления начали серьезно исследовать, выработалось в прошлом столетии представление, что они вызываются двумя субстанциями, содержащимися в телах между весомыми частицами и обладающими свойством отталкивать частицы такого же рода и притягивать частицы противоположного рода. Их назвали положительным и отрицательным электричеством.

Полагают, что в неэлектризованных телах они содержатся в одинаковом количестве, равномерно перемешанные, но отделяются, если потереть два тела одно о другое. Такое представление было доведено до полной ясности Кулоном, который опытным путем нашел в 1785 г. закон, согласно которому должны определяться силы притяжения и отталкивания, вызывающие наблюдаемые явления. Этот закон подобен закону тяготения Ньютона: электрические силы также обратно пропорциональны квадрату расстояния между взаимодействующими частицами.

Закон Кулона в соответствии с тем, как он был получен, относится прежде всего к покоящемуся электричеству. Вызываемые таким электричеством явления не часто бросаются в глаза и создаются искусственно разве что в лабораториях физиков. Гораздо разнообразнее и привлекают к себе большее внимание проявления движущегося, текущего электричества. Они представляют собой грандиозное зрелище, когда грозовая туча разряжается и молнии сверкают; они же служат человеку для самых различных целей. С быстротой мысли движущееся электричество несет сообщение по телеграфным проводам на расстояния в сотни миль; в электрической лампе вызывает свечение, подобное солнечному; на гальванопластических фабриках покрывает золотом или серебром медали, статуи и другие предметы или изготавливает их медные копии с точностью, недостижимой никаким мастером.

Явления, вызываемые текущим электричеством, не объясняются кулоновскими силами. Более того, из них можно заключить, что сила, с которой действуют друг на друга две движущиеся электрические частички, отличается от силы их взаимодействия, когда эти частички покоятся. Найти зависимость

силы от скорости движения частиц и тем самым объяснить действия электрических токов на расстоянии удалось приблизительно 20 лет тому назад Вильгельму Веберу. Но действия, вызываемые электрическими токами в телах, в которых они протекают, химические разложения и выделение тепла, ими обусловленные, указывают на силы взаимодействия между электрическими частицами и весомой материей, на силы, имеющие некоторое сходство с молекулярными силами и столь же мало пока что известные.

Наряду с двумя видами электричества ранее допускали существование в некоторых телах еще двух видов материи, обладающих свойствами, совершенно подобными тем, которые присущи электрическим видам. Имеются в виду магнитные жидкости, с помощью которых пытались объяснить магнитные явления, силы взаимодействия между магнитами. Но Ампер показал, что точно такие же действия, какие вызывают магнитные жидкости, если они существуют, создаются также и электрическим током, обтекающим мельчайшие частицы магнита. Затем, допустив существование таких токов, он вывел закон взаимодействия между магнитом и электрическим током, который подтверждается опытом и который раньше оставался совершенно загадочным. Таким образом, магнитные жидкости оказались вовсе не нужными, а учение о магнетизме стало одной из глав учения об электричестве.

Подобный же успех еще большего значения достигнут в новейшее время. Еще два десятилетия тому назад, чтобы объяснить тепловые явления, было общепринято предполагать существование особой невесомой материи — теплорода. И он был изгнан из науки, о чем я вскоре скажу подробнее. Все же наше современное представление о строении тел остается очень сложным. Полагают, что в телах, помимо столь разнообразных, отличающихся химически видов весомой материи, содержатся еще световой эфир и обе электрические жидкости. Можно надеяться, что это представление удастся еще более упростить. Уже делаются попытки, пока еще не очень успешные, объяснять электрические явления без допущения существования электрических жидкостей.

Если наука должна быть полностью приведена к механике, то, помимо знания действующих сил, необходимо еще знание состояния, в котором находится материя в данный момент времени. Надо знать, как материя распределена в мире и какой скоростью обладает каждая ее частица. Если наше знание сил природы содержит пробелы и в значительной степени неопределенно, то еще в большей мере это относится к знанию состояния материи.

Мы знаем, что весомая материя сосредоточена в небесных телах, отделенных друг от друга огромными пространствами. Для больших планет и для Солнца мы знаем величины их масс, расстояния планет до Солнца и скорости их движения относительно Солнца. Далее, оказалось возможным обнаружить, что на Солнце имеются некоторые из химических элементов. То же удалось сделать для некоторых неподвижных звезд и туманностей. Но это и есть почти все наши знания о звездной материи. Чтобы понять, как мало мы знаем о распределении материи, даже нет надобности устремлять свой мысленный взор к звездному небу.

В недрах Земли находятся тела, добываемые рудокопом, доступные нашему непосредственному исследованию. И как мала глубина, достигаемая им, по сравнению с размерами Земли? Большинство наших знаний относится к телам, находящимся на поверхности Земли или вблизи ее. Ими определяется весь

материал, которым располагают так называемые описательные (естественные) науки. Но о строении материи во всех этих телах нам известно очень мало. Возьмем какое-либо тело, измельчим его произвольным способом и рассмотрим его получше с помощью всех имеющихся оптических приборов. Что мы знаем о строении в нем весомой материи, о том, каким способом с ней сосуществуют эфир и обе электрические жидкости, если только они существуют вообще? [3]

Возможно, хотя и не доказано, что вся материя состоит из очень маленьких частиц, так называемых молекул, разделенных сравнительно большими промежутками, которые все же наш глаз не в состоянии обнаружить, если даже его вооружить самым сильным средством, доступным оптическому искусству. Предположим, что такое представление правильно, предположим далее (чего на самом деле вовсе нет), что известны величина и вид мельчайших частиц материи и то, каким образом они в данный момент времени расположены. И тогда все еще остается вопрос, каково их движение в данный момент времени. Такое движение существует во всяком теле, даже там, где наш глаз его не воспринимает; с подобным движением связаны тепловые явления.

Позвольте мне подробнее остановиться на обосновании этого утверждения, утверждения, установленного недавно и имеющего величайшее значение для науки о состоянии материи.

Что такое теплота? Ответ на этот вопрос в высшей степени важен уже потому, что тепловой фактор существен почти в каждом явлении. Теплота влияет почти на все свойства тела. Твердые тела при нагревании размягчаются и плавятся, жидкие — превращаются в газ, химически сложные распадаются на составные части или на простые связанные вещества. Путем нагревания можно вызывать свечение или электрический ток. И наоборот, создавать теплоту можно посредством самых разнообразных процессов. Теплота, используемая в бытовых целях или в промышленности, возникает при связывании углерода с атмосферным кислородом. Солнечный свет, падающий на тело, нагревает его. При прохождении по телу электрического тока в нем выделяется тепло. Вряд ли есть явление природы, исследование которого не приводило бы к вопросу: что же такое теплота?

Понятие температуры благодаря опыту, приобретаемому нами в течение жизни, так же привычно, как понятия пространства и времени. И оно представляется заведомо столь же фундаментальным, столь мало сводимым к другим понятиям, как и эти [пространство и время]. После того как был установлен принцип, что все явления природы заключаются в движении неизменяемой материи, возникла задача, как объяснить и тепловые действия на этой основе, а понятие температуры свести к понятиям механики. Предполагалось существование теплорода — невесомой материи, которая содержалась бы в теле в большем, либо в меньшем количестве, и это количество обусловливало температуру тела.

Если более теплое тело приводится в соприкосновении с более холодным, то первое охлаждается, а второе нагревается, потому что — говорили — теплород перетекает от одного из них к другому. Но имеются случаи, когда тело нагревается без того, чтобы какое-либо другое тело охлаждалось, либо наоборот, т. е. случаи, когда тепло возникает или исчезает. Первое имеет место, например,

при горении, второе — при охлаждении воды вследствие ее испарения. Следовательно, допустить возникновение или исчезновение теплорода было нельзя.

Выход был найден в предположении, что теплород может входить в соединения с весомой материей, подобные химическим соединениям различных тел. Как кислота теряет свои характерные особенности, когда она связывается химически с основанием и образует соль, так и теплород — так объясняли — теряет способность повышать температуру, когда он, соединяясь с водой, образует водяной пар. При сгорании он снова получает эту способность, потому что при этом он выделяется из соединения, в котором он был недееспособен. Говорили о свободной и связанной теплоте в теле, подобно тому как говорят о свободной и связанной кислоте во множестве различных химических веществ. Чтобы объяснить, почему происходит выравнивание температур при соприкосновении теплого тела с холодным, теплороду придали свойство, согласно которому его частицы друг от друга отталкиваются, а весомой материей — притягиваются. Считалось, что одновременно объясняется тот факт, что большинство тел при нагревании расширяется.

Такой взгляд на природу теплоты оставался господствующим вплоть до последних десятилетий, хотя уже раньше то и дело указывалось на его неприемлемость. Это удивительно, так как его неправильность ясно видна из явления, знакомого человеку на самом низком уровне его культурного развития. Я имею в виду получение теплоты посредством трения. При помощи трения можно очень сильно нагреть два тела, не вызвав в них каких-либо других изменений. Здесь теплота действительно возникает. Следовательно, теплота не может быть никаким веществом, количество которого в мире остается неизменным.

К правильному взгляду на природу теплоты привел лишь принцип, открытый примерно 20 лет тому назад, принцип, имеющий фундаментальное значение для всего естествознания и в ряду всех его завоеваний по своей всеобщности и содержательности занимающий ближайшее место вслед за принципом неизменяемости материи. Чтобы иметь возможность его привести, мне надо возвратиться к понятию, которое уже было здесь определено ранее, — к понятию работы силы. Если точке приложения силы сообщить бесконечно малое перемещение, то произведение величины силы на перемещение, измеренное в направлении действия силы, называют работой силы. При конечном перемещении точки по прямой или по кривой линии работа есть сумма работ, соответствующих бесконечно малым перемещениям, из которых состоит конечное. Если имеется система сил, действующих на различные материальные точки, то сумму работ отдельных сил для произвольного движения точек называют работой системы. Это понятие работы встречается в одном утверждении, образующем существенное звено в цепи заключений, которые я приведу, в так называемом законе живой силы, являющимся прямым следствием принципа Даламбера, содержащего решение самой общей задачи механики.

Термином «живая сила движущейся массы» (не очень удачным), обозначают половину произведения величины массы на квадрат ее скорости. Под живой силой системы масс понимают сумму живых сил ее частей. Закон живой силы утверждает, что в произвольной системе масс, движущихся под воздействием произвольных сил, увеличение живой силы за любой промежуток времени равно

работе, совершаемой действующими силами за этот промежуток времени. Это утверждение, если его применить к падающему тяжелому телу, дает закон, по которому скорость увеличивается тем больше, чем больше путь падения. Скорость должна возрастать, так как вес тела совершает положительную работу, когда оно движется в направлении силы тяжести. У тела, выбрасываемого в направлении, противоположном силе тяжести, последняя совершает отрицательную работу, и скорость здесь убывает; закон живой силы показывает, в какой мере это происходит.

Этот закон может быть применен к любой машине. В машине всегда надо преодолеть некоторую силу или сообщить телу скорость. Согласно закону живой силы эту цепь можно достичь лишь тогда, когда другая сила совершает работу или скорость другого тела уменьшается. Для водяного колеса, например, приводящего в движение мельницу, работу совершает падающая вода, при этом скорость водяного потока уменьшается. В часах за счет опускания гири преодолевается сопротивление, испытываемое частями механизма при их движении. Если часы остановились, то их надо снова завести, совершая работу силой руки человека при подъеме груза.

А нельзя ли так сконструировать часы, чтобы они сами снова пошли, после того, как остановились? Или сконструировать водяное колесо так, чтобы вода, благодаря падению которой оно приводится в движение, снова поднялась на первоначальную высоту, и при этом колесо приводило бы в движение мельницу? Если бы это удалось, то была бы сконструирована машина, которую многие пытались сделать, но никому не удалось, так называемый perpetuum mobile. То, что такую машину нельзя создать, используя только силу тяжести или некоторые другие силы, известно уже давно.

Давно известно, что многие силы природы, и среди них силы тяжести, обладают таким свойством, что их работа при перемещении масс, на которые эти силы действуют, из некоторого начального состояния в некоторое конечное зависит *только* от обоих этих состояний, но не от вида и способа перехода.

Если конечное состояние совпадает с начальным, то работа таких сил равна нулю; ибо можно было бы осуществить такой переход, вовсе не приводя систему в движение. Если только части машины, на которую действуют такие силы, занимают свое первоначальное положение, то ее работа равна нулю. Если весомое тело движется по какой-либо замкнутой кривой линии, то не совершается никакой работы, ибо на одной части своего пути оно поднимается ровно на столько же, на сколько опускается на другой. Поэтому оно не может преодолеть никакое сопротивление и не может никакому другому телу сообщить скорость, если только его собственная скорость остается неизменной.

Но возможно, не все силы природы обладают таким свойством. Еще несколько десятилетий тому назад оставался открытым вопрос о том, будет ли возможен perpetuum mobile, если вовлечь в игру теплоту, свет, электричество и химические процессы. Теперь этот вопрос снят, perpetuum mobile вообще невозможен. *Все* силы природы подчиняются закону, согласно которому производимая ими работа, когда точка приложения силы переходит из некоторого начального состояния в некоторое конечное, зависит *только* от обоих этих состояний, но не от способа перехода. Иными словами: работа всех сил природы равна нулю,

если в результате движения точка приложения силы возвращается в исходное состояние.

Открытие этого закона, несомненно, есть самое важное из того, что было достигнуто в науке в нашем столетии. Заслуга его открытия и плодотворного исследования принадлежит прежде всего Майеру, Кольдингу, Джоулю, Гельмгольцу, Клаузиусу и Томсону [4]. К обнаружению этого закона сохранения работы, как я его здесь назову, привели главным образом рассуждения о вызываемых теплотой явлениях. И, наоборот, благодаря ему раскрывается истинная сущность теплоты. Следующий пример кажется мне самым подходящим, чтобы показать, каким образом с его помощью можно ответить на вопрос, что же такое есть теплота.

Представим себе колесо, которое может вращаться вокруг оси, подобно колесу тележки. Когда оно вращается на закрепленной неподвижно оси, то работа, совершаемая какой-либо действующей на колесо силой за время полного оборота, равна нулю, так как после оборота все части снова возвращаются в первоначальное положение. По закону о живой силе, согласно которому ее прирост всегда равен произведенной работе, после оборота живая сила также осталась неизменной.

Однако колесо испытывает трение на оси, вследствие чего его скорость вращения все больше и больше убывает, а вместе с ней и живая сила вращения за оборот уменьшится на некоторую величину. Следовательно, должно иметь место еще другое, невидимое движение, живая сила которого на столько же возрастает, на сколько убывает живая сила вращения. Единственное действие трения, кроме уменьшения скорости вращения, заключается в том, что выделяется теплота. Отсюда следует заключить, что теплота есть невидимое движение.

Знание того, что теплота есть движение, делает понятным, что теплота может возникать и исчезать. Всякая сила, совершающая работу, должна создавать теплоту, если она не производит никакого другого действия, т. е. не вызывает никакого другого движения и не преодолевает никакую другую силу. Количество теплоты измеряют по количеству воды, которая нагревается на некоторый интервал температур: например, от 0 до 1°. Измеренное таким способом количество теплоты, созданное посредством определенной работы, должно быть пропорционально работе, какими бы ни были силы, эту работу совершающие.

По измерениям Джоуля, количество теплоты, необходимое, чтобы нагреть 1 фунт воды от 0 до 1° стоградусной шкалы, создается за счет работы, совершаемой телом весом в 1 фунт, падающим с высоты 123,5 м. Эту работу назвали механическим эквивалентом единицы теплоты. С его помощью посредством прямой пропорциональности для каждого заданного количества теплоты находят эквивалентную работу, а для каждой заданной работы — эквивалентное количество теплоты. Если работа превращается в теплоту, то она превращается в эквивалентное количество теплоты. Если тяжелое тело, падая в воду, идет на дно, то оно приводит воду в движение, но видимое движение становится все слабее и слабее, пока, вследствие трения, оно постепенно не исчезнет. Но вследствие этого возникает теплота.

Успокоившаяся вода теплее, чем она была раньше, в ней возникло количество теплоты, эквивалентное работе, совершенной весом тела, когда оно двигалось, падая с высоты. Здесь работа создает теплоту посредством трения, но не

всегда это происходит именно таким образом. Когда уголь сгорает в кислороде, когда кислота, соединяясь с основанием, образует соль, то соединяющиеся частички движутся под действием сил взаимного притяжения. Эти силы притяжения, следовательно, также совершают работу: возникает количество тепла, ей эквивалентное. Когда во время грозы положительное электричество тучи при ударе молнии соединяется с отрицательным электричеством поверхности Земли, то силы, с которыми притягиваются противоположные заряды, совершают работу, вследствие чего выделяется теплота и вспыхивает молния. И, наоборот, количество исчезнувшей теплоты равноценно совершаемой работе.

В действующей паровой машине теплота исчезает; пар, устремляющийся из котла в цилиндр, отбирает от котла больше тепла, чем отдает конденсатору, куда он поступает после того, как совершил работу в цилиндре. Полезное действие машины эквивалентно количеству исчезнувшего тепла.

После того, как стало ясно, что теплота есть движение, оказалось легко объяснимым и ее свойство распространяться. Если какое-либо тело колебать в одном месте, то колебание распространяется от этого места во все стороны. И если это тело соприкасается с другими телами, то и к ним перейдет часть движения. Точно так же и тепловое движение, которое было возбуждено в каком-либо месте одного тела, распространяется в нем по всем направлениям и частично переходит в соприкасающиеся с ним другие тела. Но не только при соприкосновении более теплое тело передает теплоту более холодному.

Солнце излучает — как принято говорить — тепло на Землю; следовательно, теплота может проходить и через небесное пространство. И это понятно. Ведь небесное пространство не является абсолютно пустым, оно заполнено эфиром. Эфир может передавать тепловое движение от одного тела другому, поскольку он от одного отбирает движение, а другому отдает. Распространение теплоты сквозь эфир называют ее излучением. Оно имеет место не только в пустом пространстве, но отчетливо наблюдается и в воздухе и в определенной мере должно происходить во всяком теле, которое содержит эфир. Как световые лучи, так и тепловые являются движениями эфира. Возникает вопрос, в каком отношении друг к другу находятся световые и тепловые лучи.

Исследование этого вопроса вскоре показало их качественную разницу. Было обнаружено, что многие тела легче пропускают одни тепловые лучи, чем другие. Солнечное тепло мало ослабляется стеклянной пластинкой, за закрытым окном оно хорошо ощущается. Тепловые лучи топящейся печи стеклянная пластинка почти полностью задерживает. Различие тепловых лучей, проявляющееся здесь, напоминает различие лучей света; красная стеклянная пластинка пропускает много красных лучей света, но мало или вовсе не пропускает зеленых. [Часто] сравнивают тепловые лучи различного рода с световыми лучами разного цвета и говорят о тепловых цветах.

Это выражение, обязанное сходству, которое первоначально считалось поверхностным и случайным, совершенно непредвиденным образом оказалось оправданным. Когда внимательнее присмотрелись к тепловым лучам, то заметили, что они часто испускаются вместе со световыми, например, от Солнца. Но столь же поразительным оказалось также и то, что они могут появляться без световых; всякое умеренно нагретое тело излучает тепло, но не свет. Полагали, что существует также и свет без тепла; как доказательство этому приво-

дили в качестве примера свет Луны и замечали, что и солнечный свет полностью теряет свою теплоту, если его пропустить через некоторые прозрачные тела. Отсюда следовало бы заключить, что световые и тепловые лучи хотя и в некотором смысле родственны друг другу, но по своей природе различны.

Более точные опыты, между тем, показали, что полное удаление теплоты из световых лучей, которое полагали осуществленным, оказалось ошибкой, и что не существует света, который не греет. Схожесть в поведении световых и тепловых лучей оказалась тем большей, чем большими становились знания о тех и других. В настоящее время твердо установлено, что те и другие по своей природе совершенно подобны, что световые лучи образуют особый класс тепловых лучей и от темных тепловых лучей отличаются только таким же образом, как разного цвета лучи света друг от друга.

Разноцветные световые лучи, когда они смешаны, как это имеет место, например, в солнечном свете, можно разделить посредством преломления их призмой, так как они при одинаковых условиях претерпевают различное преломление. Красные лучи преломляются меньше всех, затем идут желтые, зеленые, голубые и, наконец, фиолетовые. Темные тепловые лучи, испускаемые умеренно нагретым телом, от световых лучей отличаются тем, что обладают еще меньшей преломляемостью или, что одно и то же, еще большей длительностью колебания, чем красные. Поэтому их называют также ультракрасными лучами. То, что они темные, и то, что они не производят никакого действия на наш глаз, определяется свойством этого органа.

Учение о том, что теплота есть движение, явилось значительным успехом науки. Оно настолько упростило представление о сущности тел, что допущение существования теплорода стало ненужным. Оно позволило отождествлять тепловые лучи со световыми, с которыми мы знакомы в сравнительно высокой степени благодаря глазу — самому тонкому нашему органу. Это учение дало объяснение многим известным, но ранее непонятным фактам и привело к открытию до тех пор незамечаемых явлений. Но что здесь следует отметить в качестве наиболее важного, это то, что учение о теплоте приводит к выводу, что в природе не существует покоя. Даже у тех тел, которые нам представляются совершенно неподвижными, частицы находятся в вечном движении относительно друг друга. Но какое это движение? Чем оно отличается у различных тел и при различных температурах? То, что мы знаем об этом, не совершеннее и не надежнее, чем наши знания о строении материи.

Поэтому необходимо признать, что о состоянии, в котором находится материя, так же как и о силах, действующих между ее частицами, в настоящее время мы обладаем очень малыми знаниями. Наше понимание явлений природы, даже тех, которые происходят в мире неорганических веществ, до сих пор очень несовершенно. В еще большей степени это справедливо для более сложных процессов, имеющих место в растениях и в теле животных. И здесь и там настоящее понимание не может быть достигнуто до тех пор, пока не удастся все свести к механике. Полностью эта цель естествознания не будет достигнута никогда.

Но уже сам факт, что она поставлена, дает некоторое удовлетворение, а в приближении к ней заключается наивысшее наслаждение, которое может дать изучение явлений природы.

ДОПОЛНЕНИЯ

29.
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГУСТАВА РОБЕРТА КИРХГОФА В ЧЛЕНЫ-КОРРЕСПОНДЕНТЫ БЕРЛИНСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК *

Нижеподписавшиеся позволяют себе предложить избрать на вакантное место в Отделении математических наук корреспондентом по математически-физическому классу нашей Академии ординарного профессора Гейдельбергского университета господина доктора Густава Роберта Кирхгофа.

Научные работы Кирхгофа, которые принадлежат области математической физики, являются настолько выдающимися как в математическом, так и в физическом отношении, что не возникает никаких сомнений, что он по масштабу своих исследований и как математик, и как физик может быть введен в состав наших корреспондентов, и предложение об этом может быть сделано физиками с неменьшим основанием, чем нами. Мы полагаем, однако, что математическая физика в том смысле, в котором развивает ее господин Кирхгоф, относится к ранее существовавшему математическому классу, и мы тем более считаем возможным внести настоящее предложение, что с ним вполне согласны наши коллеги, которые представляют физику.

Среди наиболее важных исследований Кирхгофа отметим прежде всего те, которые относятся к теории упругости, которая развита им на более строгих основаниях, чем имевшиеся ранее. Он прежде всего установил правильные условия для состояния равновесия упругой пластины, находящейся под действием произвольных внешних сил. Эта задача первоначально была рассмотрена Софи Жермен и затем Пуассоном, однако неполным и неудовлетворительным способом. Звуковые фигуры Хладни на круглой пластине, к которой Кирхгоф применил свою теорию, показывают хорошее ее согласие с экспериментом. В более поздней работе он применил эти принципы также к условиям равновесия упругого тела, имеющего три измерения, и одновременно к общему случаю, когда смещения отдельных частей являются не бесконечно малыми, а конечными величинами.

Далее господин Кирхгоф в ряде статей, предметом которых были индукция и распределение и движение магнетизма и электричества в цилиндрах, проводах и пластинах, не только рассмотрел отдельные до сих пор нерешенные задачи, но также с помощью остроумных математических методов, примененных в связи с экспериментальными данными, вывел новые простые законы, которые можно рассматривать как расширение закона Ома, и установил тесную связь движения электричества в проводниках с волновым движением.

Всеобщее признание получили его выполненные в течение последних двух лет работы в области оптики, главные результаты которых известны нашей Ака-

* Wahlvorschlag für Gustav Robert Kirchhoff zum KM // Physiker über Physiker. Berlin: Akademie-Verlag, 1975. S. 75—76. Перевод Л. С. Полака.

демии из публикаций в ее сообщениях. В этой области он также не только установил экспериментально новые факты, но и открыл новые, важные и имеющие всеобщий характер законы и обосновал их как опытами, так и теоретически математическим путем [1].

Вейерштрасс, Куммер,
Кронекер, Энке [1]

30.
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГУСТАВА РОБЕРТА КИРХГОФА В КОРРЕСПОНДЕНТЫ ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК *

На одну из вакансий по нашему классу мы имеем честь предложить в качестве корреспондента Академии проф. физики в Гейдельберге Густава Роберта Кирхгофа.

Господин Кирхгоф впервые приобрел известность в 1845 г., (в то время он был приват-доцентом в Берлине) двумя статьями о прохождении электрического тока через плоскость, обнаружив свои большие способности к приложению точного математического анализа к вопросам физики; рассматриваемая в обеих статьях задача принадлежит к числу самых трудных и в то же время самых актуальных задач учения об электричестве. За ними последовала серия статей по проблемам, относящимся к учению об электричестве, теории колебаний упругих мембран, механической теории теплоты — все те вопросы, которые именно в последнее время особенно занимали науку и которые в статьях Кирхгофа получили существенное развитие. Так, например, в двух статьях 1857 г. впервые дано математическое доказательство волнообразного движения электричества при разряде лейденской банки, которое в прошлом году было с несомненностью показано опытами Пальцова, Оттингена и Липпарта [1].

Но официальное признание со стороны Академии он заслужил главным образом работами, которые публиковал сначала совместно с Бунзеном, а потом один, о так называемом спектральном анализе.

Было уже известно, что когда свет от земных источников после прохождения через раскаленные пары твердых тел анализируют с помощью призмы, то в возникающем при этом спектре появляются светлые линии, совершенно подобные темным фраунгоферовым линиям в солнечном спектре. Кирхгоф и Бунзен впервые показали, что эти светлые линии благодаря своему определенному положению характеризуют происхождение образующего их света, так что появление определенных светлых линий надежно свидетельствует о наличии конкретных веществ в пламени, дающем этот свет, и что появление таких линий, которых нет ни в одном из изученных ими простых веществ, позволяет сделать вывод

---

[1] Автор текста представления — Э. Куммер. Представление датировано 24 июня 1861 г. — *Примеч. ред.*

* Für eine der Vacanzen in unserer Klasse haben wir die Ehre vorzuschlagen zum Korrespondenten der Academie den Prof. der Physik zu Heidelberg Gustav Robert Kirchhoff. Архив АН СССР, Ленинград, фонд 2, оп. 17, № 6, л. 160—163. Перевод Ю. Х. Копелевич. — *Примеч. ред.*

о присутствии новых металлов. Известно, что это явление, исследованное дальше, привело к открытию трех новых металлов — рубидия, цезия и таллия [2], и тем была доказана правильность закона, что светлые линии принадлежат к самым характерным признакам металлических веществ. При этом Кирхгоф, оставив Бунзену дальнейшую разработку этой чисто химической стороны их общего открытия, сам занялся исследованием физических вопросов, связанных с этими явлениями.

Уже прежде было замечено относительно желтых двойных линий, которые обнаруживают в спектре пламени нашей обычной свечи и которые, как показали Бунзен и Кирхгоф, происходят от присутствия в фитиле свечи слабых следов натрия [3], что эти двойные линии по своей преломляемости точно соответствуют темной двойной линии D в солнечном спектре. Это привело Кирхгофа одновременно с Фуко к открытию: светлые линии в спектре наших земных источников становятся темными линиями как только образующее их пламя начинает давать значительно более яркий свет; он подтвердил это опытом, но вскоре дал также доказательство, исходя из известных законов об отношении между поглощением и излучением тепловых лучей, показав при этом, что равенство между обоими, установленное ранее лишь для теплоты вообще, существует также для каждого отдельного теплового луча.

Это побудило его объяснить темные линии в солнечном спектре тем, что свет солнечного ядра проходит через менее светящую солнечную атмосферу, которая содержит раскаленные частицы простых металлов. Отсюда возник следующий вопрос — не являются ли некоторые из этих светящихся металлических частиц такими же, какие мы встречаем на Земле. Но для этого был необходим более точный анализ солнечного света — требовалось каждую фраунгоферову линию идентифицировать и определить ее показатель преломления. Как известно, эти линии являются такими же характерными признаками солнечного света, как светлые линии — земного пламени.

Кирхгоф произвел точный анализ, проделав очень утомительную работу с помощью четырех поставленных друг за другом линз из флинта. Цель такой работы можно сравнить с той, какую ставят пред собой составители подробных карт звездного неба, с помощью которых можно затем каждую появившуюся новую звезду тотчас признать за новую; действительно, когда известны все фраунгоферовы линии, то каждая чужая линия среди них будет замечена.

Если теперь иметь в виду, что темные линии солнечного спектра одинакового происхождения со светлыми линиями спектров наших земных источников, то тогда при непосредственном сопоставлении линий этих последних с линиями солнечного спектра можно заключить, какие линии совпадают, а какие нет, и отсюда сделать вывод, что в солнечной атмосфере имеются такие-то вещества, от которых получаются совпадающие линии, и, напротив, такие-то вещества присутствуют в земных источниках света, а в солнечном спектре их нет.

Таким образом Кирхгоф показал, что раскаленные пары железа обнаруживают 21 светлую линию, притом каждая из этих линий характеризует пары железа в отличие от всех других веществ, ибо никакое вещество, кроме паров железа, не дает ни одной из этих линий. Солнечный же свет обнаруживает все эти 21 линии, характерные для железа и совпадающие с линиями спектра железа. Можно ли сомневаться в том, что в солнечной атмосфере имеются пары железа?

Мы остановились так подробно на данном открытии Кирхгофа потому, что этот вывод многим показался слишком смелым, и они рассматривают кирхгофов анализ солнечной атмосферы как чистую гипотезу, наподобие той, которая была выдвинута относительно строения солнечной поверхности, исходя из вида солнечных пятен.

Открытие Кирхгофа совсем другого рода, и выдвинутые им законы имеют такую же достоверность, как, например, наше определение высоты лунных гор. Солнце так далеко, что многим кажется невозможным узнать о нем что-нибудь значительное. Но солнечное тепло посылает нам через огромное пространство поток волн света. И если из-за состава его атмосферы некоторые из этих волн ослабляются, если мы в состоянии опознать их среди несметного числа других и обозначить их, если мы, далее, знаем, какими именно веществами эти волны в солнечном свете ослаблены, то разве столь уж удивительно, что мы можем указать на наличие этих веществ в солнечной атмосфере?

Итак, исследования Кирхгофа открыли нам идеи, ранее совершенно неизвестные. Например, отношение между темными линиями солнечного спектра и светлыми — земного спектра. Нам открылся путь к заключениям относительно состава отдаленных тел нашей Вселенной, которые при всей своей неожиданности можно отнести к числу самых обоснованных в точных науках.

Мы предлагаем нашему классу выразить должное признание указанных заслуг Кирхгофа избранием его в число корреспондентов.

Э. Ленц, М.-Г. Якоби

31.
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГУСТАВА РОБЕРТА КИРХГОФА В ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧЛЕНЫ БЕРЛИНСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК*

Нижеподписавшиеся имеют честь представить Густава Роберта Кирхгофа из Гейдельберга к выборам в действительные члены Академии наук.

Господин Кирхгоф объединяет в себе все те свойства, способности, которые являются условиями значительных успехов в области математической физики.

В трудных рассуждениях, приводящих от наблюдаемых явлений к элементарным действиям, и от последних через математическое рассмотрение к дифференциальным уравнениям, в решении аналитических задач, от которых зависит интегрирование этих дифференциальных уравнений, в численных расчетах, так же как в измерениях и наблюдениях, которые необходимы для сравнения теории и опыта, — во всех этих направлениях и ветвях исследования он обладает одинаковым мастерством.

Работы Кирхгофа, в которых содержатся достижения, делающие эпоху в математической физике, лежат в области упругости твердых тел, электричества и гидродинамики.

---

* Wahlvorschlag für Gustav Robert Kirchhoff zum AM // Physiker über Physiker. Berlin: Akademie-Verlag, 1975. S. 77—79. Перевод Л. С. Полака.

Теория упругости обязана ему установлением правильного фундаментального уравнения для упругих тел, размеры которых не во всех направлениях конечны. Для колебаний упругих пластин, дисков его предшественники Пуассон и Коши получили ошибочное уравнение, так что в общем было невозможно удовлетворить требуемым условиям. Кирхгоф нашел сделанную ими ошибку и исключил ее, воспользовавшись важным в математической физике принципом, а именно сведением задачи к проблеме максимума и минимума, т. е. к проблеме вариационного исчисления. В качестве примера применения введенных им уравнений Кирхгоф выбрал случай круговой пластины. Эта простейшая задача такого типа, которая уже представляет значительные аналитические трудности, была им полностью и в изящной форме решена. Сравнение с выполненными Штрельке измерениями звуковых фигур Хладни дали для утверждения теории вполне удовлетворительные результаты.

Одной из важных в другом отношении для теории упругости работ Кирхгофа является проведенное им экспериментальное исследование отношения удлинения и поперечного сжатия для стержней из упругой жесткой стали. Это отношение, являющееся фундаментальной постоянной для тел одинаковой упругости в различных направлениях, Пуассон нашел, исходя из теоретических оснований, равных 1/4, в то время как эксперименты Вертгейма привели к значению 1/3. Весьма точные измерения Кирхгофа дали для этого отношения значение 0,294, которое лежит весьма близко к среднему из двух указанных значений.

В учении об электричестве важнейшим достижением Кирхгофа является теория, которую он развил для движения электричества в проводниках любой формы при учете эффектов, вызванных индукцией. Определение этого движения он свел к системе уравнений в частных производных при соответственных граничных условиях и вывел отсюда законы распространения электричества в проводах. Кроме этого исследования, учение об электричестве обязано ему рядом других работ, из которых необходимо отметить следующее: новое представление закона Ома, которое связывает его с электростатикой и исправляет представление Ома о свободном электричестве — решение линейного уравнения, которым определяется разветвление гальванических токов; определение распределения в стационарном состоянии гальванических токов в круглой пластине, так же как распространение найденных для этой задачи условий на тела трех измерений, — единственное доступное при сегодняшнем состоянии анализа представление и решение пуассоновского определения распределения электричества на двух шарах — экспериментальное исследование по определению константы, важной для учения об индукции, и т. д.

Кроме того, развитая Пуассоном теория магнетизма, индуцированного в телах из мягкого железа, обязана Кирхгофу усовершенствованием в одном очень важном пункте, в котором отсутствие согласия с экспериментом было тем самым устранено и осуществлено применение этой теории к случаям бесконечного цилиндра и тел, вращающихся вокруг внешней оси.

В гидродинамике для многих случаев Кирхгоф определил форму струй жидкости и распространил результаты, полученные Дирихле для движения шара и бесконечной жидкости, на две другие задачи аналогичного типа. В одной из них шар заменен произвольным телом вращения, в другом — двумя кольцами. Последняя задача имеет особое значение, так как она устанавливает, как доказал

Кирхгоф, связь между двумя до сих пор совершенно раздельными областями физики — гидродинамикой и теорией электричества.

Перечисленные работы ставят Кирхгофа в один ряд с его учителем нашим иностранным членом Францем Нейманом.

Среди живущих нет никого, кто бы всесторонне и исчерпывающе охватил математическую физику так, как эти два исследователя.

Остается еще сказать о большом экспериментальном открытии в области спектроскопии и спектрального анализа, которое было сделано Кирхгофом в сотрудничестве с Бунзеном, открытии, которое уже дало замечательные результаты для познания химических элементов как Земли, так и Солнца в их взаимной связи.

Однако изобилие этих фактов не может все же сравниться с важностью одного простого физического закона, согласно которому для лучей некоторой определенной длины волны и для некоторой заданной температуры отношение испускательной способности к поглощательной способности для всех тел одинаково. Этот открытый и доказанный Кирхгофом закон, благодаря которому множество ранее известных и лишь наполовину понятых явлений впервые было освещено, упорядочено и понято, останется навсегда связанным с его именем. Однако этого было бы достаточно для того, чтобы сделать его физиком первого ранга, если бы он уже не получил этот ранг за открытия, сделанные им в работах в области математической физики [1].

Кронекер, Вейерштрасс,
Куммер, Поггендорф, Дове, Э. Дюбуа-Реймон,
Борхардт, Рисс, Магнус [1]

[1] Автор текста представления Г. Кирхгофа в действительные члены Берлинской Академии наук — К. Борхардт. Представление датировано 10 марта 1870 г. — *Примеч. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЯ

Л. С. Полак

ГУСТАВ РОБЕРТ КИРХГОФ (1824—1887)

Главная цель естествознания — раскрывать единство сил природы.

Л. Больцман

I. ЖИЗНЬ

«Внешне жизнь Кирхгофа не отмечена ничем таким, что соответствовало бы необыкновенности его гения; напротив, его жизненный путь был обычным для немецкого университетского профессора. Великие события совершались исключительно в его голове» [1].

Густав Роберт Кирхгоф родился 12 марта 1824 г. в Германии — стране философии и фантазии [2], в Кенигсберге (ныне Калининград, СССР). Он был младшим сыном советника юстиции Карла-Фридриха Кирхгофа. Отец будущего ученого был спокойным серьезным человеком, а мать — женщиной с быстрым живым умом.

С детства Кирхгоф отличался общительностью, позднее у него выработался замкнутый, молчаливый характер. Вместе со старшими братьями (один из которых впоследствии стал врачом, а другой — советником суда сначала в Берлине, а затем в Лейпциге) Кирхгоф посещал в Кенигсберге гимназию Кнайпгофа.

Уже в гимназические годы определились способности Кирхгофа к математике и физике.

В 18 лет (в 1842 г.), получив аттестат зрелости, Кирхгоф поступил в Кенигсбергский университет, который дал ему глубокое математическое образование. Он слушал лекции Ф. Неймана, Бесселя, Якоби, Ришело.

Влияние Ф. Неймана на Кирхгофа видно во всех теоретических работах последнего. Ф. Нейман постоянно подчеркивал значение математики в естествознании, дающей ясное и точное знание.

Ф. Нейман работал в основном в области математической физики, под которой тогда понималось решение физических задач с помощью дифференциальных уравнений (главным образом в частных производных) на основе представления о непрерывных (сплошных) средах и процессах в них (от этого рассмотрения естественным был переход к физике полей). В эти же годы в области математической физики во Франции работали Фурье и Коши, а в Англии (в сороковых годах XIX в.) Стокс и В. Томсон и др.

С 1826 г. Ф. Нейман в течение 50 лет работал в Кенигсберге, и созданная им и Якоби кенигсбергская школа была первой, длительное время процветав-

---

[1] *Больцман Л.* Густав Роберт Кирхгоф. Речь, произнесенная на праздновании 301-й годовщины основания Университета в Граце. 15.XI.1887 г. // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 30.

[2] *Стендаль.* Собр. соч.: В 15 т. М.: Правда, 1959. Т. 5. С. 364.

шей школой, влиявшей на развитие математической физики в Германии, Франции, Англии.

В математическом семинаре Ф. Неймана Кирхгоф в 1845 г. (21 года) сделал свою первую работу о прохождении электричества через пластинку. В 23 года ему была присуждена первая ученая степень, и он получил от философского факультета университета редко предоставлявшуюся стипендию для научного путешествия в Париж. Осуществлению этой поездки помешали, по-видимому, политические события во Франции.

В 1848 г. Кирхгоф получил должность приват-доцента в Берлинском университете. В том же году он становится действительным членом молодого Берлинского физического общества [3]. Создание этого общества относится к 1845 г., когда шесть молодых ученых объединились для совместной работы. Идея органиации общества была выдвинута Эмилем Дюбуа Реймоном, а организовал его Г. Карстен — приват-доцент физики в Берлине. Под его руководством вновь созданное общество стало издавать реферативный журнал «Fortschritte der Physik», содержавший годичные обзоры физической литературы.

В общество входили Г. Гельмгольц, Р. Клаузиус и другие физики, а также офицер инженерных войск Вернер Сименс (в 1849 г. он совместно с И. Г. Гальске основал электротехническую фирму, которая приобрела мировую известность). «Окружавшая атмосфера быстро растущего крупного европейского города немало способствовала развитию этого общества, которое благодаря созданной им оживленной и вдохновляющей к творчеству научной связи вскоре стало средоточием небывалого расцвета духовной жизни» [4].

Благодаря помощи Магнуса и Якоби в 1850 г. Кирхгоф был приглашен экстраординарным (т. е. внештатным) профессором физики в Бреслау (штатным профессором физики в это время там был М. Франкенгейм). Через год в Бреслау приехал из Марбурга Роберт Вильгельм Бунзен (1811—1899). И хотя вскоре Бунзен принял приглашение в Гейдельберг на место Гмелина, между молодыми учеными на всю жизнь завязалась большая личная и научная дружба.

Бунзен постарался привлечь в Гейдельбергский университет Кирхгофа. Это удалось ему в 1854 г., когда Жолли (Jolly Ph.) переехал в Мюнхен и тем самым освободилось место профессора физики. Кирхгоф, отказавшись от приглашений в Бонн на место Ю. Плюккера и в Берлин на место Г. Магнуса, переехал в Гейдельберг.

В 1857 г. Кирхгоф женился на дочери профессора математики Кенигсбергского университета Ф. Ришело Кларе. Гейдельбергские друзья Кирхгофа охотно приняли в свой круг веселую молодую женщину.

Через некоторое время в Гейдельберг приехал и Г. Гельмгольц (тогда профессор физиологии), а позднее — математик Л. Кенигсбергер. Постепенно образовалась гейдельбергская школа математической физики, продолжавшая традиции кенигсбергской школы. В Гейдельберге Кирхгоф работал в течение 20 лет (до 1874 г.). Здесь он сделал свои важнейшие открытия, здесь же проходили

[3] *Warburg E.* Zur Geschichte der Physikalische Gesellschaft // Naturwiss. 1925. H. 3. S. 35—38; *Goldstein E.* Aus vergangenen Tagen der Berliner Physikalischen Gesellschaft // Ibid. S. 39—44.

[4] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 265.



Берлинский университет (современный вид)

его совместные с Бунзеном исследования, приведшие к созданию спектрального анализа (1859 г. — год открытия спектрального анализа — принес Кирхгофу европейское признание и известность).

С 1863 г. обстановка работы Кирхгофа значительно улучшилась — в новом здании университета ему была отведена большая лаборатория и рядом квартира. Все, казалось, складывалось хорошо. Однако вскоре он повредил ногу, и хотя со временем боли в ноге утихли, но никогда не прекращались вполне.

В 1869 г. его постигло большое несчастье — умерла жена, оставив ему двух сыновей и двух дочерей. Он писал своему другу П. Дюбуа-Реймону (1831—1889 гг.): «Я имел в жизни много незаслуженного счастья; теперь ко мне пришло несчастье. Разрушена моя семья. Я хочу отвлечься научными занятиями, но работа удается плохо. Нож, которым я хочу резать, тупой» [5]. Тем не менее в этом же году Кирхгоф написал три работы.

В 1872 г. Кирхгоф женился вторично — на Луизе Броммель из Гослара, которая тогда работала в глазной клинике в Гейдельберге. В этом браке детей у Кирхгофа не было, но он был счастлив и как-то сказал, что для него дважды цвела весна жизни.

В 70-е годы XIX в. Гейдельбергский университет из-за недостатка средств стал приходить в упадок, и друзья Кирхгофа постепенно начали переезжать в другие университеты. И тогда Кирхгоф принимает приглашение переехать в Берлин, отклонив до этого предложение заведовать обсерваторией, построенной в Потсдаме.

---

[5] *Warburg E.* Zur Erinnerung an Gustav Kirchhoff // Naturwiss. 1925. H. 11. S. 209.

В 1875 г. он становится профессором теоретической физики Берлинского университета. Из-за болезни глаз и острой боли в ноге он вынужден прекратить экспериментальные работы и целиком посвятить себя исследованям в области математической физики. В 1876 г. из-за плохого состояния здоровья Кирхгоф перестал читать лекции; по этой же причине он отказался от почетной должности ректора, на которую был избран. В зимнем семинаре 1885/86 г., собрав последние силы, Кирхгоф прочел свой последний курс лекций.

Последние летние отпуска он, всегда любивший природу, проводил вместе с семьей в Бадене и Вернигероде на Граце, совершая прогулки в кресле на колесах. Физически надломленный, но еще бодрый духом Кирхгоф продолжал работать до последних дней. Он умер (от опухоли в мозгу) 17 октября 1887 г.

Кирхгоф был выбран сначала членом-корреспондентом (в 1861 г.), а затем в 1870 г. действительным членом Берлинской Академии наук. Он был избран по математическому отделению (в представлениях справедливо отмечено, что с неменьшим правом он мог бы быть избран по физическому отделению) [6].

Интересно отметить, что математики в своем представлении расположили его работы по значимости в следующем порядке: теория упругости, электричество, гидродинамика, спектры и спектральный анализ, термодинамика излучения (отметив, впрочем, особую важность последней). Физики, наверное, расположили бы работы Кирхгофа в обратном порядке. Среди подписавших представление Кирхгофа мы видим таких замечательных ученых, как Вейерштрасс, Кронекер, Куммер и другие.

В 1863 г. Кирхгоф был избран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук, а в 1870 г. — членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Преемником Кирхгофа по кафедре теоретической физики стал Макс Планк [7].

II. УЧЕНЫЙ, УЧИТЕЛЬ

Кирхгоф принадлежит к тому поколению ученых 40—70-х годов XIX в., когда возникла фигура физика-теоретика, однако еще не отделившаяся полностью от экспериментальных исследований. Г. Гельмгольц, Л. Больцман, Дж. К. Максвелл, В. Томсон, Г. Кирхгоф, Г. Герц и многие другие разрабатывали основы теоретической физики, создавали методы математической физики и проводили эксперименты, достаточно сложные для их времени и имевшие в большинстве случаев принципиальное значение. Только в следующем поколении физик-теоретик отдалился от реального экспериментирования настолько, что стало необходимым различать физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов.

---

[6] См. наст. издание раздел «Дополнения» (Представление Густава Роберта Кирхгофа в действительные члены Берлинской Академии наук). — *Примеч. ред.*

[7] Биографические данные о Кирхгофе см. *Больцман Л.* Густав Роберт Кирхгоф // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 30. *Столетов А. Г.* Г. Р. Кирхгоф // Собр. соч.: В 3 т. М.; Л.: ГТТИ, 1939—1947. Т. 2. 1941. С. 33; *Helmholtz H.* Gustav Robert Kirchhoff // Dtsch. Rundschau. Berlin, 1887. Bd. 54. S. 232—245; *Voigt W.* Zum Gedächtniss von Kirchhoff // Abhandl. Gesell. Wiss. Göttingen. 1889. (Math.). Bd. 35. S. 1—10; *Warburg E.* Zur Erinnerung an Gustav Kirchhoff // Naturwiss. Berlin, 1925. H. 11. S. 205—212. См. также библиографию наст. книги.

Учениками Кирхгофа были многие выдающиеся физики и математики: М. Планк, К. Пирсон, А. Г. Столетов, А. Шустер и др. М. Лауэ пишет, что своим решением посвятить себя физике он был обязан опубликованным лекциям Кирхгофа. Решающим фактором было «сознание того, как много можно высказать о природе при помощи математических методов» [8].

Выдающиеся русские физики А. Г. Столетов [9], Н. А. Умов [10], В. И. Боргман слушали лекции и работали в лаборатории Кирхгофа.

В 1868/69 г. в Гейдельберг приезжает Дж. Гиббс и слушает лекции Гельмгольца, Кирхгофа, Бунзена.

Кирхгоф, по общему мнению современников, исключительно удачно сочетал при подготовке молодых ученых теоретические лекции с самостоятельными экспериментальными работами, причем студенты производили и всестороннюю математическую обработку опытных данных. Это справедливо рассматривалось им как лучшая форма подготовки к самостоятельной научной работе. Бесспорно, Кирхгоф сделал большое дело для формирования современных методов обучения, постепенно ставших общепринятыми.

Для характеристики Кирхгофа как ученого-учителя приводим «свидетельские» показания современников, слушавших его и работавших у него. Думается, что эти высказывания не нуждаются в дополнительных комментариях. Вот, что пишет А. Шустер [11] — известный английский физик, основные работы которого относятся к оптике: «Кирхгоф в Гейдельберге придавал большое значение тщательно составленным схемам наблюдений и их точному выполнению. Раз в неделю он читал лекции для разъяснения принципа какого-либо опыта и способов его расчета. Так как у него было обыкновенно не более двенадцати студентов, то он мог представлять каждому из них раз в неделю утро или послеобеденное время для производства того опыта, о котором говорилось на предшествовавшей лекции. Студент в назначенное для него время находил прибор приготовленным, но установленным только отчасти и должен был без посторонней помощи окончить установку и получить точный результат. Один раз во время работы Кирхгоф приходил, чтобы посмотреть не встречается ли студент с каким-нибудь серьезным затруднением.

Результаты записывались и аккуратно вносились в книжку. В начале следующей лекции они выписывались на доску, профессор выражал относительно них свое мнение и обсуждал точность, которую можно было ожидать в отдельных случаях. Кроме этого так называемого семинария, в котором занятия шли только часть года, в лабораторию допускались еще несколько человек для занятий самостоятельными исследованиями. В течение двух семестров моего пребывания там, Липман произвел свое знаменитое исследование о капиллярном электрометре, а Каммерлинг-Оннес приготовил докторскую диссертацию

---

[8] *Лауэ М.* Мой творческий путь в физике // История физики. М.: Гостехиздат, 1956. С. 174.

[9] *Столетов А. Г.* Г. Р. Кирхгоф // Собр. соч. М.; Л.: ГТТИ, 1941. Т. 2. С. 34—35.

[10] Н. А. Умов представил Кирхгофу статью «О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида». В 1875 г. Кирхгоф опубликовал работу на ту же тему, использовав результаты Умова (чем последний был, естественно, недоволен), но изменил доказательство.

[11] *Шустер А.* Прогресс физики. Пг.: Изд-во «Естествоиспытатель», 1915. С. 15—17.



Густав Роберт Кирхгоф
1824—1887

о видоизмененном маятнике Фуко. Я сообщил Кирхгофу, что моя главная цель заключается в том, чтобы научиться от него возможно большему, и что я не забочусь о том, получу я или нет какие-либо положительные результаты моей работы. Он засадил меня поэтому за проверку приборов, предназначенных для исследования эллиптической поляризации света при отражении от металлического зеркала — типичный пример работы ортодоксальной чеканки. Прибор был не особенно удачен, но я приобрел при этом некоторые сведения теоретического и экспериментального характера и остался этим вполне доволен.

Кроме очень элементарного курса по экспериментальной физике, Кирхгоф прочел несколько в высшей степени интересных теоретических лекций. Он был чрезвычайно аккуратный человек и взвешивал каждое свое слово; о нем говорили, что он не пропустил ни одной своей лекции [12]. Всякий раз, когда студент решался сделать замечание относительно какого-нибудь вопроса физики, он должен был приготовиться выдержать суровый допрос о точном смысле того, что он говорил; но вместе с тем Кирхгоф был весьма любезным человеком. Он всегда отзывался о других мягко, хотя и требовал от них такой же аккуратности, какою обладал сам».

Выдающийся русский физик А. Г. Столетов слушал лекции и работал в «семинарии» Кирхгофа. Он пишет, что «. . .имел счастье несколько лет пользоваться и лекциями и частными беседами Кирхгофа и мог пристально всмотреться в личность знаменитого учителя. Простота обращения и неутомимая внимательность в отношении к учащимся, постоянная деятельность и самообладание мысли, дар сжатой, но отчетливой речи — вот что поражало нас в Кирхгофе. Во всем сказывается сильная воля, чувство долга, высокое и чуждое высокомерия самолюбие. . . Поучительно видеть ту аккуратность, с какой Кирхгоф ведет свои бумаги, красивым и неспешным почерком записывает in extenso все продуманное и сделанное. Видишь, что эта глубина и точность мысли далась не вдруг и не даром: она — плод упорной работы над собой.

[12] «Однако я могу рассказать об одном известном мне исключении. «Господа, — сказал он нам в конце одной лекции, — я, к сожалению, должен сообщить вам, что обстоятельства заставляют меня пропустить завтрашнюю лекцию». Эти обстоятельства заключались в том, что он собирался жениться. Пропущенная лекция приходилась на субботу, воскресенье было предназначено для свадебного путешествия, а в понедельник лекции шли опять обычным порядком».

Главную особенность Кирхгофа как преподавателя составляет его практический семинарий. Цель его — служить переходом от прослушанных и прочитанных курсов к самостоятельной работе, знакомя учащихся с классическими методами физических измерений. . . темами для таких измерений служат, например, сила тяжести в месте наблюдения, сила земного магнетизма, число качаний данного камертона, показатели преломления данной призмы, длина волны светового луча, емкость лейденской банки, электрическое сопротивление проволоки, тепло, отделяемое при растворении соли, и т. п. Испытав свои силы над подобными классическими задачами, где методы выработаны и результаты часто заранее известны, начинающий физик уже с большей уверенностью может взяться за более оригинальные исследования» [13].

Приводим еще краткие заметки о Кирхгофе трех великих ученых. Макс Планк — преемник Кирхгофа по кафедре теоретической физики — отмечает в своей автобиографии:

«. . .Кирхгоф читал тщательно отработанный курс лекций, в котором была взвешена и стояла на своем месте каждая фраза. Ни словом меньше, ни словом больше. Но в целом — это действовало как нечто, заученное наизусть, сухое и однообразное. Мы восхищались самим лектором, а не тем, о чем он говорил» [14].

Вот краткая, но всесторонняя характеристика, данная Кирхгофу Л. Больцманом:

«Тогдашние теоретические и экспериментальные лекции Кирхгофа отовсюду привлекали учеников, для которых он был не только почитаемым учителем, вдохновлявшим на научный поиск, но и отзывчивым другом. Он читал спокойно, ясно, тщательно, не произнося лишних слов и ничего не оставляя недосказанным. . . На экспериментальных демонстрациях Кирхгофа, всегда проводившихся с точностью и изяществом, нередко использовались изобретенные им самим приборы, например электрометр» [15].

И, наконец, высказывание Феликса Клейна:

«. . .Он читал наизусть гладко отработанную рукопись и скорее позволил бы себе посреди лекции заглянуть в нее, чем дал бы повод обвинить себя в небольшом отступлении от нее» [16].

Ограничение описанием (т. е. по уровню тогдашней экспериментальной техники в основном макроскопических величин — тогда и спектры, кстати сказать, рассматривались как макроскопически наблюдаемые), стремление свести все сложные физические явления к механике не могли не ограничивать физическую картину, рисуемую Кирхгофом. Наряду с большой достигаемой в силу такого подхода ясностью изложения, правда, далеко не всегда и не во всем, в согласии с особенностями самих предметов исследования и их немеханической природой у Кирхгофа возникло предубеждение против новых, незавершенных, еще только «кристаллизующихся» концепций.

---

[13] *Столетов А. Г.* Г. Р. Кирхгоф // Природа. 1873. № 2. С. 178; Собр. соч. М.; Л.: ГТТИ, 1941. Т. 2. С. 34—35.

[14] *Планк М.* Автобиография // Избр. тр. М.: Наука, 1975. С. 650.

[15] *Больцман Л.* Густав Роберт Кирхгоф // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 31.

[16] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 261.

Не случайно с именем Кирхгофа связано много почти анекдотического типа высказываний, сохранившихся в устной передаче (эти высказывания, конечно, могли быть делом настроения, могли быть не точно переданы, но все же, как всякий «слух», они имеют известную информативную ценность).

Вот, что сообщает В. Вин: «Густав Кирхгоф сказал мне однажды, что он не может считать электромагнитную теорию света успехом» [17].

Естественно, что такое отношение к теории Максвелла оставило только чисто исторический интерес ко второму и притом посмертно изданному тому «Vorlesungen über mathematische Physik» Кирхгофа, озаглавленному «Математическая оптика» и подготовленному к печати К. Хензелем (K. Hensel) в 1891 г.[18] В этом томе Кирхгоф основывает изложение теории света на уравнениях упругой среды. Естественно, это приводит его к гипотезе Ф. Неймана о том, что упругие колебания эфира происходят в плоскости поляризации. Том этот в настоящее время, конечно, почти полностью устарел.

«Рассказывают, например, — сообщает Ф. Клейн, — что когда Керр открыл в 1877 г. носящее его имя явление вращения плоскости поляризации при отражении света от полированного конца магнита, то Кирхгоф по этому поводу спросил: а разве вообще осталось что-нибудь открывать?» [19].

Характерно отношение Кирхгофа к диссертации М. Планка: «. . . Кирхгоф категорически отклонил ее (диссертации М. Планка. — *Л. П.*) содержание, — пишет Планк, — заметив, что понятие энтропии, величина которой может быть измерена, а потому и определена только посредством обратимого процесса, не должно применяться к необратимому процессу» [20].

В заключение характеристики взглядов Кирхгофа приведем оценку его мировоззрения и позиции в философском размежевании, данную Ф. Энгельсом и В. И. Лениным. Ф. Энгельс писал, что «Кирхгоф . . . говоря: «Покой — это частный случай движения», — доказывал этим, что он способен не только вычислять, но и диалектически мыслить» [21]. В. И. Ленин отверг претензии махистов зачислить Кирхгофа в число ученых, придерживавшихся взглядов, близких взглядам Э. Маха. Он отметил материалистическую точку зрения Кирхгофа в отношении «. . .объективной реальности, в существовании которой Кирхгоф и не думал сомневаться» [22]. В. И. Ленин отнес Кирхгофа к «механистской школе» в физике вместе с Гельмгольцем и В. Томсоном (Кельвином) [23] и прямо писал: «. . .продолжатели традиции „механизма“ (т. е. материализма) . . . Кирхгоф, Герц, Больцман, Максвелл, Гельмгольц, лорд Кельвин» [24].

---

[17] *Вин В.* Новейшее развитие физики и ее применений: Три доклада, прочитанные весной 1918 г. Одесса: ГИЗ Украины, 1922. С. 38.

[18] *Kirchhoff G.* Mathematische Optik // Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig: Teubner, 1891. Bd. 2.

[19] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 262.

[20] *Планк М.* К истории открытия кванта действия // Избр. тр. М.: Наука, 1975. С. 433.

[21] *Энгельс Ф.* Диалектика природы. М.: Госполитиздат, 1952. С. 70.

[22] *Ленин В. И.* Материализм и эмпириокритицизм // Собр. соч. М.: Политиздат, 1968. Т. 18. С. 117.

[23] Там же. С. 271.

[24] Там же. С. 279.

III. ТВОРЧЕСТВО

Основы математической физики

В 1865 г. в конце доклада «О цели естествознания» [25] Кирхгоф так определяет задачу наук и основное, необходимое условие достижения настоящего понимания природы:

«Наше понимание явлений природы, даже тех, которые происходят в мире неорганических веществ, до сих пор очень несовершенное. В значительно большей степени это справедливо для более сложных процессов, имеющих место в растениях и в мире животных. И здесь и там настоящее понимание не может быть достигнуто до тех пор, пока не удастся все свести к механике. Полностью эта цель науки не будет достигнута никогда.

Но уже тот факт, что она поставлена, дает некоторое удовлетворение, а в приближении к ней заключается наивысшее наслаждение, которое может дать занятие наукой» [26].

В настоящее время, спустя 120 лет, вряд ли нужно доказывать, что цель науки вовсе не сведение всего к механике и что эта задача является лишь исторически пройденным этапом развития естествознания. Но для Кирхгофа это означало, что все то общее, что он написал об основах механики и ее особенностях, полностью относится и ко всей теоретической (в том числе математической) физике. Многое в его взглядах явно устарело, а многое при известной переработке сохраняет смысл и поныне.

Термин «математическая физика» достаточно неопределенный [27]. Обычно теперь под математической физикой понимают теорию уравнений в частных производных трех основных типов: $\varphi''=0$, $\varphi'' \sim \dot{\varphi}$, $\varphi'' \sim \ddot{\varphi}$. Где у Кирхгофа проходила граница между теоретической и математической физикой, неясно, да и нужна ли она? Можно пытаться уточнить это понятие, например, так: «Под „математической физикой“ я хотел бы понимать здесь по возможности всю область „феноменологической“ физики, оперирующей дифференциальными уравнениями, в том виде, как она была развита Францем Нейманом и англичанами и нашла свое завершение в уравнениях Максвелла. Это есть, следовательно, та физика, которая работает представлениями о непрерывной среде, в отличие от выступающей сейчас снова на передний план атомистической физики» [28].

---

[25] В этом докладе, единственном, в котором Кирхгоф публично высказался по общим вопросам естествознания, он излагает ставшую в середине XIX в. обычной точку зрения: задача науки — описать явления неорганической и органической природы на основе законов механики.

Интерес этого доклада не в этом. Поразительной является твердая убежденность Кирхгофа в том, что эта цель, являющаяся, по его мнению, идеалом научного познания, в полном объеме недостижима. Дело здесь отнюдь не в агностицизме или отзвуках кантианства. К сожалению, для более конкретных выводов у нас нет материала (рукописей, писем, свидетельств современников).

[26] См. статью 28 наст. издания. — *Примеч. ред.*

[27] Термин «математическая физика» Коши применял уже в 1827 г. См., например: *Cauchy A. L.* Mémoire sur l'Application du calcul des résidus à la solution des problêmes de physique mathématique. Paris: De Bure Frères, 1827.

[28] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 257.

Что такое определение достаточно произвольно и не может оправдываться даже исторической традицией, видно из того, что даже Кирхгоф, которого никак не обвинишь в стремлении подчеркнуть атомистический аспект математической физики, включил в четвертый том своих «Vorlesungen über mathematische Physik» несколько больших глав, посвященных молекулярно-кинетической теории газов [29].

Можно попытаться ограничить область математической физики, допустив, что в ней устанавливается соответствие между наблюдаемыми экспериментально величинами и некоторыми величинами математическими, подобранным так, чтобы их логическая последовательность и свойства соответствовали наблюдаемым явлениям. Так пытаются определить математическую физику многие авторы [30], но это мало что дает и вызывает естественные возражения, особенно когда надо проводить с не очень ясными целями демаркационную линию: математическая физика — теоретическая физика.

Что же лежит в основе механики, к которой должны быть, хотя бы в принципе, сведены все науки? Движение! А движение, по Кирхгофу, — это изменение положения со временем. Поэтому для понимания движения необходимы и достаточны представления о пространстве, времени и материи. Вот собственные слова Кирхгофа, открывающие первую лекцию первого тома его «Vorlesungen über mathematische Physik», посвященного механике:

«Механика есть наука о движении; мы охарактеризуем ее задачу так: описать полно и простейшим образом происходящее в природе движение.

Движение — это изменение положения со временем; то, что движется, есть материя. Для понимания движения необходимы и достаточны представления о пространстве, времени и материи. Опираясь на эти представления, механика должна стремиться достигнуть своей цели и создать необходимые ей вспомогательные понятия силы и массы» [31].

Естественно возникает вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять описание движения как собственно механическое, так и сводимое (основная задача!) к механическому. Кирхгоф выдвигает два требования:

«Описание движения должно быть полным. Значение этого требования совершенно ясно: не должно быть ни одного вопроса, относящегося к движению, который остался бы без ответа. Не столь ясно значение второго требования, состоящего в том, что описание должно быть простейшим. Здесь, возможно, возникнет сомнение, какое же из описаний известного явления будет проще; мыслимо также, что какое-нибудь описание некоторого явления, которое в данный момент является простейшим, впоследствии, при дальнейшем развитии знаний, будет заменено еще более простым. История механики дает тому многочисленные примеры» [32].

Требование полноты ясно и не вызывает сомнений. Иное дело — требование, чтобы описание было простейшим. Не только неясно, как устанавливается

---

[29] *Kirchhoff G.* Vorlesungen über die Theorie der Wärme // Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig: Teubner, 1894. Bd. 4. S. 134—210.

[30] См., например: *Vogel Th.* Physique mathématique classique. Paris: Colin, 1956. P. 214.

[31] *Кирхгоф Г.* Механика: Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 5.

[32] Там же. С. 5.

«простота» описания, а тем более как выяснить, что данное конкретное описание — простейшее. Неясно также, как соотносится это требование с устройством (структурой) реальной природы. Наконец, описание отвечает на вопрос «как?», а мучающий человека с детского возраста вопрос «почему?» остается открытым. . . может быть навсегда!

В итоге можно сказать, что в подходе Кирхгофа к основам построения физики (физика-механика) наряду с правильными и важными положениями есть много исторически преходящего, самоограничивающего. Впрочем, как это часто бывает, в реальных своих исследованиях он отнюдь не всегда следовал сформулированным им же общим положениям.

2. Основные понятия механики

Первый том «Лекций по математической физике» Кирхгофа, посвященный механике, восхищает читателя ясностью и прозрачностью изложения предмета. Вероятно, это лучшее изложение механики после Лагранжа в «довекторный» период. В этот том вошли и собственные результаты Кирхгофа, которые в виде оригинальных статей представлены в настоящем издании.

Здесь нам хотелось бы остановиться только на одном вопросе, который был предметом оживленных дискуссий как среди ученых, так и среди философов в последней четверти XIX в. — первом десятилетии XX в. Это вопрос о понятии «силы» в механике.

Общеизвестно, что механика Ньютона была основана на понятиях пространства, времени, массы (материи), силы. Многочисленные исследователи к середине XIX в. выяснили существенные трудности и неясности, связанные с последним понятием [33]. Кирхгоф поэтому решил исключить «силу» из числа основных понятий механики и построить ее только на трех понятиях: пространство, время, материя. Понять его точку зрения нетрудно, она ясна из двух нижеследующих цитат (они длинноваты, но приведены полностью, поскольку «Механика» Кирхгофа как в подлиннике, так и в русском переводе давно стала библиографической редкостью).

«В настоящих лекциях исходное положение — определение механики — отличается от общепринятого. Обычно механику определяют как науку о силах, и силы рассматривают, как причины, которые или производят движение, или стремятся его произвести. Несомненно, это определение оказалось чрезвычайно полезным при развитии механики; оно полезно и при изучении этой науки, когда она поясняется примерами, взятыми из опыта обыденной жизни. Однако это определение приводит ко многим неясностям, от которых не могут освободиться понятия причины и цели. Эти неясности проявляются, например, в различии взглядов на то, можно ли законы инерции и параллелограмма сил рассматривать как результаты опыта (как аксиомы) или как законы, которые могут и должны быть логически доказаны» [34].

---

[33] См. например: *Dugas R.* Histoire de la Méchanique. P., 1950; *Dugas R.* La Méchanique en XVII siècle. P., 1954; *Мах Э.* Механика. Историко-критический очерк ее развития. СПб., 1909; *Джеммер Дж.* Понятие массы в современной и классической физике. М.: Прогресс, 1967; *Дорфман Я. Г.* Всеобщая история физики. Ч. 1. М.: Наука, 1979; *Ишлинский А. Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука, 1981.

[34] *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 3.

И далее Кирхгоф говорит о том, что понятие силы не исключается им совершенно из механики, а остается в ней «как средство упростить изложение». Это означает лишь то, что причин изменения состояния движения механика не рассматривает: «. . .все сводится только к тому, чтобы раскрыть происходящие явления, а не к тому, чтобы доискиваться их причин. Если мы будем исходить из этого воззрения и введем представления о пространстве, времени и материи, то чисто математическим путем придем к общим уравнениям механики. Но при этом нам не обойтись без понятия силы, которому мы не в состоянии дать исчерпывающее определение. Однако эта неполнота определения силы не приводит к неясности. В самом деле, введение сил является здесь только средством упростить изложение, а именно: выразить в кратких словах уравнения, которые без этого термина трудно поддаются словесному выражению. Чтобы устранить всякую неясность, достаточно так определить силу, чтобы каждое предложение механики, в котором идет речь о силах, могло быть выражено уравнениями. . .» [35].

Позиция Кирхгофа, как мы видим, не является столь уж экстремистской, какой была, например, позиция Герца, который пытался вообще исключить «силу» из механики, введя понятие о «скрытых движениях» [36].

Тем не менее термин «сила» в механике Кирхгофа употребляется лишь как общепринятый термин, для того чтобы кратко выражать словами дифференциальные уравнения движения.

Такой характер изложения основ механики (и в особенности понятия «силы») не мог не вызвать возражений со стороны ученых, придерживающихся более общепринятых взглядов. В 1872 г. Ф. А. Слудский опубликовал заметку [37] по этому поводу, содержащую довольно едкую критику изложения Кирхгофа.

В механике Кирхгофа, занимающейся лишь описанием движений, происходящих в природе, возникает, как это ни кажется с первого взгляда парадоксальным, проблема статики, так как неясно, как определить равновесие. В параграфе шестом третьей лекции «Механики» (с. 31) Кирхгоф говорит:

«Покой есть частный случай движения. Та часть механики, которая его рассматривает, называется статикой. Для перехода к случаю покоя мы должны предположить, что начальные скорости равны нулю, что связи . . . не зависят от времени и что действующие силы таковы, что вызываемые ими ускорения обращаются в нуль. О таких силах говорят, что они находятся в равновесии».

Несмотря на справедливость исходного утверждения — покой есть частный случай движения, — все остальное не слишком ясно.

Бесспорно, что, перешагнув исходные трудности и все-таки (не слишком обоснованно!) введя в механику ту же «силу», Кирхгоф далее блестяще излагает содержание механики.

Естественно также, что метод изложения Кирхгофа не нашел сколько-нибудь серьезных последователей и отнюдь не смог изменить общепринятый (при всех имеющихся в нем оттенках) метод изложения.

---

[35] Там же. С. 3.

[36] *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

[37] *Слудский Ф. А.* Несколько слов о Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. М.: Моск. мат. о-во, 1872. С. 1—12.

Можно ли на основании этого сделать вывод о том, что Кирхгоф ошибался в своем критическом отношении к трудностям и неясностям, связанным с понятием «силы» в механике? Нет, конечно, нельзя. Трудности, связанные с понятием «силы» не преодолены до сих пор, аксиоматическое и замкнутое изложение механики не построено (неясно даже, может ли оно, так же как и аксиоматика других естественных наук, вообще быть построено).

В настоящее время вообще сколько-нибудь удовлетворительного определения силы не существует. Для того чтобы иллюстрировать это утверждение, приведем довольно случайную, а поэтому показательную выборку определений понятия силы в механике:

«Сила — величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел» [38].

«. . .Внешние условия, заставляющие тело изменять свое движение, мы называем силами» [39].

«. . .Действия тел друг на друга, в результате которых тела могут сообщать друг другу ускорения, мы называем силами [40].

«. . .Словесные определения бессодержательны, истинные же определения даются указанием способа измерения» [41].

«Все силы вообще происходят от действия одних тел на другие» [42].

«. . .Сила может представлять двойственную природу взаимодействия между двумя телами, в то время как ускорение не может. . .» [43].

«. . .Если тело ускоряется, значит, на него действует сила» [44].

«Вектор $\mathbf{F}_a = -\partial U/\partial r_a$ (U — потенциальная энергия системы), стоящий в правой стороне уравнений $m_a \dot{\mathbf{v}}_a = -\partial U/\partial r_a$, называется силой, действующей на a-точку» [45].

Вряд ли эта выборка нуждается в каких-либо комментариях.

Нам представляется единственно возможным путем стройного построения механики как науки об одной из форм движения в природе путь, исходящий из принципа Гамильтона. Правда, на этом пути также немало своих трудностей.

3. Спектральный анализ

Открытие Кирхгофом совместно с Р. В. Бунзеном спектрального анализа (см. статью 5 наст. книги) сделало, как мы уже отмечали выше, имя Кирхгофа широко известным далеко за пределами научных кругов. Эти основополагающие работы действительно составили эпоху в развитии физики, астрофизики, многочисленных отраслей естествознания и техники. Основные причины этого таковы.

---

[38] Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1965. Т. 4. С. 522.

[39] *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. С. 133.

[40] *Хайкин С. Э.* Механика. М.; Л.: ГТТИ, 1947. Гл. 4. С. 75.

[41] *Зоммерфельд А.* Механика. М.: Изд-во Иностр. лит., 1947. С. 11.

[42] *Кирпичев В. Л.* Беседы о механике. М.; Л.: ГТТИ, 1950. С. 156.

[43] *Webster A. G.* Dynamics of particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies. Leipzig: Teubner, 1925. P. 24.

[44] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс О.* Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1965. Т. 1, гл. 12. С. 209.

[45] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. М.: Физматгиз, 1958. Т. 1. С. 19.

1. Изящные и точные эксперименты, тщательно и детально проанализированные, показали единство мира (и прежде всего звездной Вселенной) в отношении составляющих небесные и земные тела химических элементов. Если механика Галилея—Ньютона разрушила аристотелевское разделение небо—земля, то спектральный анализ — экспериментально, а не только умозрительно, как это имело место в некоторых философских системах, — впервые показал, что космос, Солнце, планеты, Земля, человек, растительный и животный мир состоят из одного и того же конечного набора элементов. Присутствие в данном объекте наблюдений тех или иных элементов или их химических соединений, их состояние, количественная доля в составе могут быть практически однозначно определены спектральным анализом. В психике и сознании широкого круга культурных людей открытие с помощью спектрального анализа некоторых элементов первоначально на Солнце, а лишь потом на Земле отложилось как исключительно убедительное доказательство единства мира и могущества создаваемых человеком научных методов.

2. Спектры — язык атомов и молекул. Научившись получать и расшифровывать их, ученые смогли приступить к прочтению ранее закрытой книги о строении атомов и молекул и процессов, в них происходящих.

Данные спектроскопических наблюдений дали основной экспериментальный материал, который был использован при построении квантовой механики, квантовой химии и т. п.

Квантовая картина строения микрочастиц позволила прогнозировать ряд ранее неизвестных спектральных эффектов и тем самым подтвердить эту картину и показать ее эвристическую силу. Роль квантовых представлений в современной науке и мировоззрении невозможно переоценить.

3. В короткое время спектральный анализ как метод качественного и количественного анализа и контроля проник в самые различные области науки и техники. Круг этих в настоящее время необозримых в кратком очерке применений спектрального анализа в естественных науках, промышленности, сельском хозяйстве, медицине все более расширяется, а многосторонность получаемой с помощью этого метода информации все возрастает.

Развитие спектрального анализа вызвало и бурное развитие промышленности спектрального приборостроения и средств обработки спектральных данных.

Спектроскопия и спектральный анализ стали одной из самых важных областей фундаментальных и технических наук. Спектральный анализ, который в начале своего развития дал огромное количество данных о химии и физике небесных объектов, безгранично расширил наши знания о Вселенной, стал теперь необходимым орудием в руках физика, химика, геолога, астрофизика, биолога, физиолога, металлурга и др., позволяющим быстро проводить точные и высокочувствительные анализы. Число этих анализов в наше время исчисляется миллионами.

Литература, посвященная спектральному анализу, спектроскопии как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, поистине необозрима. Мы отсылаем читателя лишь к некоторым монографиям и статьям, в которых рассматривается история дальнейшего развития основополагающих работ Кирхгофа и Бунзена [46].

[46] *Меншуткин Б. Н.* Краткий очерк истории открытия спектрального анализа. Одесса: ЭКИС, 1895. *Шпольский Э. В.* Столетие спектрального анализа // УФН. 1959. Т. 69, вып. 4.

Несколько кратких замечаний о предыстории открытия Кирхгофа. Исследование спектров, приведшее в конце концов к замечательному открытию Кирхгофа, началось еще в знаменитых работах Ньютона, а расширение спектра за пределы видимой области было осуществлено Фридрихом Вильямом Гершелем, открывшим в 1800 г. и для своего времени обстоятельно исследовавшим инфракрасную часть спектра. В следующем, 1801 г. И. Риттер открыл ультрафиолетовые лучи по почернению хлористого серебра за границей фиолетовой части спектра. В 1802 г. У. Волластон опубликовал два важных наблюдения, значение которых было признано лишь много лет спустя. Он обнаружил, что прошедший через щель в ставне солнечный спектр пересечен несколькими темными линиями. Это было, несомненно, открытие фраунгоферовых линий. Независимо от Волластона 15 лет спустя Й. Фраунгофер в значительно более полном и точном виде исследовал так называемые фраунгоферовы линии, что явилось одним из важнейших этапов в развитии спектроскопии.

Далее надо отметить работы Джона Гершеля, Ч. Уитстона, Д. Г. Стокса, В. Ф. Тальбота, Л. Фуко, Бальфура Стюарта. Таким образом, в отличие от открытия солнечного спектра Ньютоном, открытие спектрального анализа Кирхгофом имело многих предшественников. Оно, так сказать, носилось в воздухе. Авторы, изучавшие оптические спектры до Кирхгофа, были иногда очень близки к открытию спектрального анализа. Однако никто из них не сделал решающего шага. Ближе всех, по мнению самого Кирхгофа, подошел к этому открытию Леон Фуко [47], который за 10 лет до Кирхгофа, в сущности, уже наблюдал обращение натриевых линий, но он не дал теоретической интерпретации своим опытам, не сформулировал вытекающий из них вывод и не имел смелости определенно утверждать, что присутствие D-линий в солнечном спектре свидетельствует о присутствии натрия на Солнце. Он ограничился туманным выражением надежды на возможность при помощи спектрального анализа создания химии Солнца и звезд. Почему такой выдающийся физик, как Фуко, сделавший, в сущности, решающий эксперимент, не имел смелости сделать из него в отчетливой форме окончательный вывод, остается до сих пор психологической загадкой [48].

Это ставит работу Кирхгофа в один ряд с основными завоеваниями физики всех времен. Смелость и новизна его вывода тем более велика, что он резко противоречит мнению широко распространенной в то время позитивистской философии Огюста Конта, который считал, что можно исследовать движения небесных тел, но никогда человек не узнает их химического состава.

Кирхгоф совместно с Робертом Бунзеном предпринял специальное исследование, чтобы экспериментально обосновать новый метод химического анализа, претендующий на применимость не только в земной, но и в космической химии.

С. 657—678. *Kangro H.* Kirchhoff und die Spectralanalitische Forschung. Osnabrük: Cellar, 1972. 54 S.

[47] *Foucault L.* Note sur la lumière de l'arc voltaique // Ann. chim. et phys. 1860. T. 68 (3). P. 476.

[48] Когда в начале 60-х годов XIX в. по инициативе В. Томсона возникла полемика о приоритете в открытии спектрального анализа, Фуко имел мужество честно признать, что для открытия спектрального анализа его опытам не хватало последнего решающего шага (см. цитированную статью Э. В. Шпольского (УФН. 1959. Т. 69. С. 663)).

До них никто не доказал, что такой анализ дает однозначные, воспроизводящиеся и правильные результаты, что натрий, например, всегда проявляется в спектре в виде двух желтых линий независимо от соединения или смеси, в которую он входит и от свойств пламени; никто до них не доказал, что присутствие в спектре дублета D-линии натрия или красной линии лития при введении в пламя NaCl или LiCl свидетельствует о наличии элемента, а не его соединения. Они исследовали спектры известных тогда трех щелочных металлов (Li, Na, K) и трех щелочноземельных металлов (Ca, Sr, Ba), привели данные замечательной чувствительности спектрального анализа пламен. Согласно Кирхгофу и Бунзену, в пламени бунзеновской горелки можно обнаружить приблизительно (в мг): Li — $1/6 \cdot 10^4$; Na — $1/14 \cdot 10^6$; K — $1/3 \cdot 10^3$; Rb — $1/2 \cdot 10^3$; Cs — $1/2{,}5 \cdot 10^4$; Ca — $1/5 \cdot 10^4$; Sr — $1/3 \cdot 10^4$; Ba — $1/2 \cdot 10^3$ и т. д. В этой и следующей работе [49] с помощью спектрального анализа открыты Cs и Rb — первый замечательный успех спектрального анализа в земной аналитической химии.

В 1861 г. Кирхгоф опубликовал свою главную работу по спектральному анализу [50], в которой дан рисунок солнечного спектра рядом со спектром большого числа элементов: Ag, Al, Au, Cu, Fe и т. д., всего 22 элементов.

Кирхгоф установил совпадение линий испускания определенных элементов с фраунгоферовыми линиями солнечного спектра. Он констатировал их наличие на Солнце. Возникла химия Солнца. Успех классических работ Кирхгофа и Бунзена был, конечно, обусловлен сочетанием двух исключительно благоприятных свойств щелочных металлов и их соединений: низких потенциалов их возбуждения и легкой термической диссоциации из галоидных солей.

Рассмотренные работы произвели колоссальное впечатление на современников. Так, Роско, одно время работавший в лаборатории Бунзена, пишет: «Я никогда не забуду то изумление, которое я испытал, когда в задней комнате старого Физического института я посмотрел в установленный там очень хороший спектроскоп Кирхгофа и увидел совпадение ярких линий спектра железа с темными фраунгоферовыми линиями солнечного спектра. Убеждение, что наше земное железо имеется также в солнечной атмосфере, напрашивалось само собой с принудительной силой» [51].

Интерес к спектроскопии, возбужденный работами Кирхгофа и Бунзена, был так велик, что У. Крукс поставил себе задачу в издававшемся им журнале «Chemical News» печатать и перепечатывать все, что появляется где-либо и появлялось когда-либо относительно спектров.

Великий шаг в конкретизации общей идеи единства мира был сделан. Поэтому «с полным основанием открытие спектрального анализа связано с именем Кирхгофа, не только теоретически обосновавшего сделанное им в совершенно отчетливой форме открытие обращения D-линий натрия, но и распространившего это открытие на целый ряд других металлов и без всяких оговорок сделавшего из этого открытия вывод о присутствии соответствующих элементов на Солнце» [52].

---

[49] См. статьи 5 и 6 наст. издания. — *Примеч. ред.*

[50] «Солнечный спектр» (см. статью 7 наст. издания). — *Примеч. ред.*

[51] *Roscoe H.* Ein Leben der Arbeit: Erinnerungen. Leipzig, 1919. S. 57.

[52] *Шпольский Э. В.* Столетие спектрального анализа // УФН. 1959. Т. 69, вып. 4. С. 672. Там же краткий очерк развития спектрального анализа после Кирхгофа.

Историю открытия спектрального анализа до Кирхгофа см. в его работе (статья 9 наст. издания), там же дано вполне объективное изложение дискуссии о приоритете открытия спектрального анализа.

Кроме этого Кирхгоф объяснил термодинамические явления обращения спектральных линий. Это объяснение с трудом воспринималось современниками. Так, из отчета в журнале «Chemical News» за 1861 г. (с. 130—138) о лекции Роско в Лондонском химическом обществе видно, что даже Фарадей, бывший на этой лекции, нашел понимание обращения весьма трудным.

Легко видеть, что объяснение Кирхгофа не отличалось ни прозрачностью, ни строгостью. В настоящее время мы считаем, что руководящей нитью для Кирхгофа была физическая интуиция, а теоретические соображения привлекались позже, для ее обоснования.

Кирхгоф сделал исключительно смелый для того времени вывод, что из наличия в спектре Солнца D-линии натрия следует с достоверностью наличие натрия в солнечной атмосфере: «Итак найден путь определить химический состав солнечной атмосферы, и тот же путь обещал дать возможность делать некоторые заключения о химическом составе ярких неподвижных звезд» [53].

4. Термодинамика излучения — закон Кирхгофа

Понятие теплового излучения было установлено химиком К. В. Шееле (1742—1786), а первые эксперименты произвели М. О. Пикте (1752—1825) и П. Прево (1751—1839). Прево в 1791 г. сделал вывод о том, что каждое тело излучает независимо от окружающей его среды.

Объединив оба основных начала термодинамики и накопленный оптикой материал, Кирхгоф проложил совершенно новый путь в развитии проблем термодинамики лучистой энергии. За несколько месяцев до установления закона, носящего его имя, Кирхгоф совместно с Р. Бунзеном опубликовал работу об открытом ими спектральном анализе. Кирхгоф считал связь между этим открытием и термодинамикой более тесной, чем она есть на самом деле. Он ошибочно считал, что испускание спектральных линий происходит за счет тепловой энергии.

Подлинный механизм излучения и совпадение линий поглощения и испускания в спектре атомов были по-настоящему объяснены лишь квантовой теорией.

При рассмотрении проблемы излучения Кирхгоф впервые ввел понятие абсолютно черного тела, оказавшегося фундаментальным не только для теории излучения, но и для подготовки квантовой теории. Тем самым проблема излучения свелась к исследованию излучения черного тела; первое время, однако, считали невозможным наблюдение излучения черного тела. В 1895 г. Отто Люммер (1860—1925) и Вильгельм Вин (1864—1928) изобрели способ изучать его, глядя внутрь замкнутого пространства через маленькую щель, столь маленькую, что это не изменяет состояния излучения в замкнутой полости. Лишь с тех пор стали возможны измерения интенсивности излучения черного тела.

В 1853 г. Ангстрем сформулировал предположение, что тело «в раскаленном состоянии должно испускать излучение всех тех видов, которое оно поглощает

[53] См. статью 7 наст. издания. — *Примеч. ред.*

при обычной температуре»[54]. Следовало, конечно, сказать «при той же температуре». В 1858 г. Бальфур Стюарт, изучив поглощение и излучение тепла пластинками, сделал вывод: «Поглощение пластинки равно ее лучеиспусканию, и это справедливо для любого вида тепловых лучей»[55].

Правильная формулировка закона была дана только Кирхгофом[56] в 1860 г. Основанием для его работы было открытие, сделанное несколько месяцев ранее им и Бунзеном. Они обнаружили, что фраунгоферовы линии солнечного спектра совпадают с линиями испускания известных паров и газов. Кирхгоф предположил поэтому, что вещество Вселенной (вне Земли) и на Земле состоит из одних и тех же химических элементов[57]. Он не знал, что на самом деле в большинстве случаев излучение газов вызывается химическим или электрическим возбуждением и поэтому совпадение линий поглощения и испускания здесь не может быть объяснено теорией теплового излучения. В статье Кирхгофа оптические подробности порой заслоняют термодинамику.

Интересно отметить глубокое и верное наблюдение В. Вина, который писал, что «в основу нашего рассмотрения будут положены *мысленные эксперименты* (курсив мой. — *Л. П.*), которые, как у Больцмана, а ранее у Кирхгофа и Клаузиуса, настолько близки к действительности, что их реальное осуществление должно быть возможно, по-видимому, с неограниченной степенью точности»[58].

Замечательная статья Вина (1893 г.) прямо посвящена исключительно важной задаче, поставленной Кирхгофом: нахождению универсальной функции $\varphi(\lambda, T)$, зависящей только от двух переменных.

Кирхгоф показал, что интенсивность излучения в полости повсюду равна лучеиспускательной способности абсолютно черного тела. Это отождествление излучения полости с излучением абсолютно черного тела есть также один из важнейших результатов анализа проблемы Кирхгофом. Он открыл путь к экспериментальному осуществлению черного излучения, введенного вначале в качестве идеализированного объекта: надо просто взять излучение, исходящее из маленького отверстия полости. В целом аргументация Кирхгофа, приведенная в настоящей книге, воспроизведена у Друде[59] и Х.-Г. Шёпфа[60] с достаточной близостью к оригиналу, хотя и с учетом современного состояния проблемы.

Кирхгоф доказал теорему о том, что испускаемое абсолютно черным телом излучение одинаково для всех черных тел, т. е. представляет собой универсальную функцию длины волны и температуры $\varphi(\lambda, T)$. Эту функцию мы называем теперь лучеиспускательной способностью[61]. Кирхгоф говорит, что искомая функция, несомненно, имеет простую форму, как и все функции, которые не зависят от свойств отдельных тел.

Для доказательства этой теоремы необходимо составить баланс энергии после интегрирования по λ. Здесь возникает трудность, состоящая в том, что из ра-

---

[54] *Angström A.* // Ann. Phys. 1853. Bd. 94. S. 144.
[55] *Stewart B.* // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1858.
[56] Статья 2 наст. издания. — *Примеч. ред.*
[57] Статья 7 наст. издания. — *Примеч. ред.*
[58] *Wien W.* // Sitzunsber. Akad. Wiss. Berlin, 1893. Bd. 55.
[59] *Друде П.* Оптика. Л.; М.: ОНТИ, 1935.
[60] *Шёпф Х.-Г.* От Кирхгофа до Планка. М.: Мир, 1981. 190 с.
[61] Кирхгоф же называет лучеиспускательной способностью черного тела величину W.

венства нулю интеграла надо сделать вывод о равенстве нулю подынтегрального выражения. Для этого Кирхгоф предполагает, что коэффициент отражения пластины имеет специальный вид

$$k_{\text{отр}} = \rho \sin^2 p/\lambda \qquad (4.1)$$

и выполняет изящное математическое преобразование (см. § 5 статьи 2 наст. издания).

Формулу (4.1) можно обосновать, исходя из предположения, что показатель преломления пластины бесконечно мало отличается от единицы, т. е. что $k_{\text{отр}}=0$ (отражение почти отсутствует). Конечно, это сильная идеализация, во всяком случае, не меньшая, чем использование идеального цветного фильтра.

Закон Кирхгофа утверждает, что отношение спектральной плотности равновесного излучения ρ (λ, T) любого температурного источника при произвольной длине волны λ и температуре T к его коэффициенту поглощения a (λ, T) (при тех же значениях λ и T) не зависит от свойств излучающего материала и является универсальной функцией от λ и T. Это отношение равно спектрально плотности равновесного излучения асболютно черного тела ρ_0 (λ, T), т. е. $\rho_i(\lambda, T)/a_i(\lambda, T)=\rho_0(\lambda, T)$, где ρ_i (λ, T) — спектральные плотности излучения произвольных температурных излучателей, а a_i (λ, T) — их коэффициенты поглощения. Закон этот относится не только к спектральной плотности потока, излучаемого нагретым телом по всем направлениям, но и к каждому отдельному направлению и каждому состоянию поляризации луча [62].

Кирхгоф показал также, что яркости двух черных поверхностей относятся как квадраты показателей преломления окружающих их сред [63]. Это положение часто ошибочно приписывается Клаузиусу, который, однако, высказал его только через несколько лет после того, как оно было опубликовано Кирхгофом.

Позже М. Планк [64] дал доказательство закона Кирхгофа, существенно отличающееся от доказательства Кирхгофа, а именно тем, что у последнего испускательная и поглощательная способности вещества отнесены к элементу поверхности, а у Планка — к элементу объема. В связи с этим для Планка важно, что интенсивность излучения каждой объемной частоты при термодинамическом равновесии вполне определяется температурой, в то время как Кирхгоф не мог использовать этот закон, так как считал, что среда совершенно прозрачна.

Следует отметить, что доказательство закона Кирхгофа было значительно упрощено Э. Принсгеймом [65].

Обобщение, дополнение и строгое доказательство закона Кирхгофа было сделано Д. Гильбертом [66] в 1913 г.

Мы не анализируем здесь сколько-нибудь подробно установление закона Кирхгофа, вывод его Кирхгофом, последующее экспериментальное обоснование и теоретические обобщения и уточнения, а также его приложения в технике. Хорошее изложение вопросов, связанных с законом Кирхгофа, и состояния

---

[62] Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1962. Т. 2. С. 384.
[63] Там же. С. 384.
[64] *Планк М.* Теория теплового излучения: Пер. с 5-го нем. изд. М.; Л.: ОНТИ, 1935. С. 45.
[65] *Pringsheim E.* // Verhandl. Dtsch. Phys. Gesell. 1903. Bd. 3. S. 81.
[66] *Hilbert D.* Begründung der Elementären Strahlungstheorie // Phys. Zeitschr. 1912. Bd. 13. S. 1056; 1913. Bd. 14. S. 592.

проблемы на пороге XX в. дано в статье А. Коттона «The present status of Kirchhoff's Law» (Astrophys. J. Chicago, 1899. Vol. 9, N 4, P. 237—268).

Эволюция термодинамики лучистой энергии от Кирхгофа до Планка хорошо изложена также в книге Х.-Г. Шёпфа (*Шёпф Х.-Г.* От Кирхгофа до Планка. М.: Мир, 1981. С. 1—90), к которой приложена и основная статья Кирхгофа.

Мы не останавливаемся на дальнейшем развитии термодинамики теплового излучения. Отметим лишь важнейшие этапы: 1) закон T^4 (Стефана—Больцмана); 2) закон смещения Вина; 3) закон Рэлея — Джинса; 4) закон распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела Планка—Эйнштейна; 5) квантование гармонического осциллятора; 6) световые корпускулы (фотоны); 7) квантовая теория.

5. Обобщение принципа Гюйгенса—Френеля

Принцип Гюйгенса [67] в той формулировке, которая была ему дана Френелем [68], еще не может считаться вполне строгим. В рассуждениях Френеля можно отметить два недостатка: 1) от любой волновой поверхности свет должен был бы распространяться не только в одном направлении, но также всегда и в отраженном — обратная волна (при суммировании действия отдельных волн заметный световой эффект получался не только для внешней огибающей отдельных волн или главной волны по Гюйгенсу, но и для внутренней огибающей, что не соответствует никакому физическому явлению); 2) вычисления Френеля приводят к неправильному выражению для фазы светового возмущения φ в точке p. В самом деле, при прямолинейном распространении света должно было бы быть

$$\varphi = \frac{A}{a+b}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{a+b}{\lambda}\right), \tag{5.1}$$

в то время как при передаче посредством элементарных волн от поверхности волны получается

$$\varphi = \frac{k_1\lambda A}{a+b}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{a+b}{\lambda}\right). \tag{5.2}$$

Чтобы получить тождество амплитуд в этих выражениях для φ, можно принять $k_1=1/\lambda$, но фазы в этих выражениях привести к совпадению нельзя.

Что касается первого недостатка, то попытки Френеля [69] разъяснить явную трудность страдают некоторой неясностью. В свое время это слабое место теории Френеля привело к очень интересной полемике [70] между ним и Пуассоном.

Оба недостатка отпадают при строгом аналитическом обосновании принципа Гюйгенса. Впервые это сделал Кирхгоф [71]. Более простой вывод дан Фохтом [72] и затем Друде [73].

[67] *Гюйгенс Х.* Трактат о свете. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
[68] *Френель О.* О свете. М.; Л.: ГИЗ, 1928.
[69] Там же. С. 66 и примечание на с. 67.
[70] *Poincaré H.* Théorie mathématique de la lumière. Paris, 1889. T. 1.
[71] См. статью 3 наст. книги. — *Примеч. ред.*
[72] *Voigt W.* Kompendium der theoretische Physik. 1896. Bd. 2. S. 776.
[73] *Друде П.* Оптика. М.; Л.: ОНТИ, 1935. С. 145 и сл. Далее до конца этого параграфа следует текст, написанный М. Г. Шраером.

Работа Кирхгофа «К теории световых лучей» явилась итогом многолетних исследований, которые позже были изложены в его знаменитых «Vorlesungen». И здесь, как и в теории потенциала, обнаруживается связь исследований Кирхгофа и Гельмгольца. Именно по аналогии с электростатическим потенциалом Гельмгольц в своей работе [74] вводит понятие потенциала скоростей смещения частиц воздуха при установившихся колебаниях и показывает, что этот потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta u+k^2u=0$ (называемому в дальнейшем уравнением Гельмгольца) всюду, где отсутствуют источники звука, а также аналогу уравнения Пуассона $\Delta u+k^2u=-4\pi q$ внутри объема, где такие источники имеются.

Рассматривая непрерывно распределенные источники звука, Гельмгольц в полной аналогии с объемными и поверхностными потенциалами электростатического поля вводит такого же типа потенциалы скоростей.

Далее, применяя формулу Грина к функции Ψ, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, и $\Phi=A\,(\cos kr)/r$, являющейся аналогом функции $A/2$ в теории потенциала, он получает формулу

$$\Psi(P)=\int_s \left(\Psi(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cos kr}{r}\right)-\frac{\partial\psi(Q)}{\partial n}\,\frac{\cos kr}{r}\right)ds, \qquad (5.3)$$

дающую аналитическое выражение принципа Гюйгенса.

С математической точки зрения эта формула показывает, что всякая непрерывная дифференцируемая в некоторой области функция, удовлетворяющая в этой области уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде суммы поверхностных потенциалов скоростей: потенциалов простого и двойного слоя источников звука, распределенных на замкнутой поверхности, ограничивающей данную область (результат, аналогичный формуле Грина в теории потенциала).

Значение этих исследований Гельмгольца для математической оптики выяснилось после появления упомянутой работы Кирхгофа. В отличие от Гельмгольца, Кирхгоф рассматривает волновые явления с произвольной временной зависимостью, а поэтому исходит не из уравнения Гельмгольца, а из общего волнового уравнения

$$\partial^2V/\partial t^2=a^2\Delta V.$$

При этом в ходе вывода упомянутого обобщения формулы Гюйгенса Кирхгоф вводит функцию, обладающую всеми свойствами известной теперь δ-функции Дирака. Это вызвало возражения со стороны многих математиков, усилия которых направлялись на то, чтобы освободить вывод Кирхгофа от использования такого рода функций.

Три таких вывода дает Маджи [75]; они тоже основаны на теореме Грина и представляют решение волнового уравнения в виде поверхностного интеграла, который затем преобразуется в объемный. Из условия равенства нулю этого интеграла получается формула, совпадающая с формулой Кирхгофа. Исследуя

---

[74] *Helmholtz H.* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden // J. reine und angew. Math. 1860. Bd. LVII. S. 1—72.

[75] *Maggi G. A.* Sulla propagazione libera perturbato delle onde luminase in un mezzo isotropico // Ann. matem. 1888. T. 16. P. 20—42.

далее распространение сферических волн, он представляет их не с помощью тригонометрических функций, а функций, удовлетворяющих, кроме обычных требований непрерывности, еще и требованиям, связанным с возможностью реализовать интерференцию волн.

Наконец, с помощью формулы Стокса Маджи преобразует поверхностный интеграл в криволинейный, вводя тем самым дифракционные волны, идущие от края экрана. В дальнейшем это преобразование Маджи было использовано Коттлером для исследования вопроса о дифракции на черном экране.

Улучшение в вывод формулы Кирхгофа вводит и Бельтрами: в работе [76] он указывает обобщение формулы Грина, на основе чего получает формулу Кирхгофа без использования δ-функции. Во второй работе [77] он обобщает принцип Гюйгенса на случай неоднородного волнового уравнения и указывает более простой способ вывода формулы Кирхгофа.

Еще более простой вывод этой формулы дает Гутцмер [78], исходя из известной формулы теории потенциала

$$4\pi V(P)=\int\limits_{(S)}\left(V(Q)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\frac{1}{2}\frac{\partial V(Q)}{\partial n}\right)dS-\int\limits_{(T)}\frac{\Delta V(Q)}{r}\,d\tau, \tag{5.4}$$

в которой объемный интеграл преобразуется в поверхностный, а функция $V(P,\ t-r/a)$ удовлетворяет волновому уравнению.

Все эти результаты и некоторые другие представляют интерес не столько с точки зрения истории формулы Кирхгофа, сколько показывают, как формировался математический аппарат в связи с исследованием вопросов теории дифракции.

Однако эти «улучшения» вывода формулы Кирхгофа представляют не главный аспект дальнейшего развития теории дифракции. Применяя формулу Кирхгофа к плоскому экрану с отверстием, сам Кирхгоф вынужден был предположить, что значения искомой функции и ее нормальной производной в точках отверстия экрана таковы, как если бы экран отсутствовал, а на остальной части экрана он принял бы их равными нулю.

Первым, кто высказал возражение относительно этих допущений Кирхгофа, был Пуанкаре. В своих работах [79] он высказывает мысль, что хотя формула Кирхгофа и дает строгую математическую форму принципа Гюйгенса, но она не пригодна для решения задач дифракции. Дело в том, что упомянутые условия Кирхгофа противоречивы: нельзя одновременно произвольно задавать на поверхности экрана функцию и ее нормальную производную. С другой стороны, если точка приближается к краю экрана, то значения функции, полученной по

---

[76] *Beltrami E.* Sul principio di Huygens // Nuovo cimento. 1889. T. 26, ser. 3. P. 233—243.

[77] *Beltrami E.* Sulla teorie generale della onde plane // Palermo rend. 1891. T. V. P. 227—235.

[78] *Gutzmer A.* Über den analitischen Ausdruck des Huygenschen Prinzips. 1895. J. Math.

[79] *Poincaré H.* Sur un mode anormal de proposition des ondes // C. r. Acad. sci. 1892. T. CXIV. P. 16—18; Sur la polarisation par diffraction // Acta math. 1892. T. 16. P. 297—339; Théorie mathématique de la lumière. Paris, 1892. T. 2.

формуле Кирхгофа, могут и не приближаться к заданным ее значениям на поверхности экрана.

Кроме того, краевые условия Кирхгофа разрывны, что может повлечь нарушение единственности решения задач дифракции. Далее, пренебрегать присутствием экрана недопустимо потому, что вдоль его края должны выполняться определенные граничные условия, не имеющие места, если экран отсутствует. Наконец, поле за экраном не является резким, так как проникает за экран на расстояние нескольких длин волн, т. е. условия Кирхгофа противоречат и опытным данным.

Пуанкаре впервые ставит задачу дифракции как задачу интегрирования уравнений Максвелла при определенных краевых условиях на дифрагируемом теле и с помощью цилиндрических функций решает задачу о дифракции света на экране с простым краем.

Зоммерфельд [80] показывает, что формула Кирхгофа может быть использована для приближенного решения задач дифракции, причем приближение, даваемое этой формулой, тем лучше, чем меньше длина волны источника света, чем на большем расстоянии от экрана рассматривается дифракционная картина. Как и Пуанкаре, он рассматривает задачи дифракции как краевые задачи математической физики, присоединяет к известным условиям на бесконечности открытое им условие излучения, обеспечивающее единственность решения дифракционных задач.

Вызывает интерес и один из методов решения задач дифракции, предложенный Зоммерфельдом, связанный с рассматриваемым Кирхгофом понятием «черного экрана». Это так называемый метод разветвленных решений, суть которого состоит в том, что при рассмотрении дифракции на плоском экране удобно пользоваться принципом симметрии, но при этом поле обременяется новой особенностью — образом источника света. Для преодоления этой трудности он высказывает замечательную идею рассмотрения вместо обычного пространства двойного риманова пространства.

Если каждое из этих пространств разрезать вдоль экрана и склеить каждую сторону поверхности разреза с противоположной стороной разреза в другом пространстве, то край экрана окажется линией разветвления. Изображение источника света, принадлежащего «физическому» пространству, попадает во второй, «математический» экземпляр пространства, так что в обычном пространстве новых особых точек не будет. Теперь «черный экран» получает смысл отверстия, ведущего из «физического» пространства в «математическое».

Проблема «черного экрана», физическую несостоятельность которой установил Зоммерфельд и которая вновь возникла в связи с его методом разветвленных решений, обсуждается и в работах Ф. Коттлера [81] и А. Рубиновича [82].

---

[80] *Sommerfeld A.* Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen // Gött. Nachr. 1894. S. 338—342; Zur Integration der partiallen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auf Riemansche Flache // Ibid. 1895. S. 267—274; Mathematische Theorie der Diffraction // Math. Ann. 1896. Bd. 47. S. 317—374.

[81] *Kottler F.* Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen // Ann. Phys. 1923. Bd. 70. S. 405—456.

[82] *Rubinowicz A.* Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen // Ann. Phys. 1926. Bd. 81. S. 140—154.

Коттлер считает, что, несмотря на физическую несостоятельность понятия «черный экран», теория дифракции нуждается в этом понятии, так как от этого зависит развитие основных положений этой теории, не связанных со свойствами материала экрана.

В связи с этим Коттлер и Рубинович считают, что функция, определяемая интегралом Кирхгофа, отвечает не решению краевой задачи, а задаче с заданным разрывом; именно краевые условия Кирхгофа должны выполняться на черном экране: скачок происходит на освещенной стороне черного экрана, так как свет переходит из физического пространства в фиктивное; другими словами, рассмотрение формулы Кирхгофа как решения задачи с заданным разрывом приводит к непротиворечивому определению черного экрана.

Таким образом, исследования, связанные с формулой Кирхгофа, привели к неожиданным новым применениям идей многолистного риманова пространства, привели к переосмысливанию некоторых понятий, введенных Кирхгофом в его теории дифракции, благодаря чему сама формула Кирхгофа получила новую интерпретацию.

6. Электростатический потенциал [83]

Задача о распределении электричества на двух проводящих шарах имеет долгую и поучительную историю, начало которой было положено Пуассоном [84], а среди активных ее участников мы встречаем имена знаменитых математиков и физиков — В. Томсон, Г. Кирхгоф, Б. Риман, К. Нейман, К. Максвелл и др.

Столь пристальное внимание к этой задаче вызвано не ее практической важностью, а тем, что она была и остается пробным камнем для применения математики к проблеме многих тел, в частности, к общей электростатической задаче о распределении электричества на данной совокупности проводников в заданном внешнем поле неподвижных зарядов. Даже в рассматриваемом частном случае двух шаров математические трудности толкали исследователей к поиску путей их преодоления, благодаря чему формировался и сам математический аппарат физических исследований.

Известно, что Пуассон свел задачу о распределении электричества на двух сферах к функциональному уравнению относительно потенциала $f(x)$ электричества, распределенного на одном из них в точках линии центров, отстоящих на расстоянии x от центра этого шара. С помощью этой функции он строит другую функцию, дающую потенциал упомянутого шара в точках вне линии центров, и определяет плотность распределения электричества на каждом из данных шаров. Решение этой задачи Пуассон находит лишь для частного случая сфер одинакового радиуса и при малом расстоянии между ними, причем в виде рядов, мало пригодных для вычислений.

В. Томсон [85] для решения поставленной задачи пользуется открытым им же

---

[83] Параграф написан М. Г. Шраером.

[84] *Poisson S. D.* Sur la distribution de l'electricité à la surface des corps conducteurs // Mém. Inst. France. 1811. T. 12.

[85] *Thomson W.* On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors // Phil. Mag. 1853. Vol. 5.

методом электрических изображений, применяя метод последовательных наведений Морфи [86].

Густав Кирхгоф в своей работе [87] по данному вопросу подвергает критике методы решения рассматриваемой задачи, данные Пуассоном, и, исходя из функционального уравнения Пуассона, указывает другой путь его решения, в частности, представление этого решения в виде ряда.

Основная идея Кирхгофа состоит в том, что он заменяет уравнение Пуассона

$$f(x)-\frac{ab}{c^2-b^2-cx}f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right)=h-g\frac{b}{c-x} \qquad (6.1)$$

(a, b — радиусы шаров; c — расстояние между их центрами; g, h — потенциалы свободного электричества на данных шарах) системой

$$\begin{gathered} f_1(x)-\frac{b}{c^2-b^2-cx}f_1\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right)=1, \\ f_2(x)-\frac{b}{c^2-b^2-cx}f_2\left(\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}\right)=\frac{b}{c-x}, \\ f(x)=hf_1(x)-gf_2(x) \end{gathered} \qquad (6.2)$$

(ради простоты Кирхгоф полагает $a=1$), следствием которой является уравнение (6.1), и для нахождения искомой функции f пользуется методом последовательных приближений. Именно исходя из уравнения (6.2), естественно искать такое значение $x=\xi$, при котором

$$\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}=1.$$

Это уравнение имеет два действительных положительных корня, меньший из которых ξ принадлежит интервалу $(0, 1)$. При $x=\xi$ из уравнений (6. 2) легко отыскивается $f_1(\xi)$ и далее, полагая

$$x_1=\frac{c-x}{c^2-b^2-cx}, \qquad x_n=\frac{c-x_{n-1}}{c^2-b^2-cx_{n-1}}$$

($n=2, 3, \ldots$), устаналивается, что $x_n \to \xi$, а значит в силу предполагаемой непрерывности $f_1(x)$, что $f_1(x_n) \to f_1(\xi)$. Этим открывается возможность отыскания $f_1(x)$. Найдя таким же путем $f_2(x)$ и представляя их в виде рядов, Кирхгоф замечает, что эти ряды могут быть преобразованы в ряды для эллиптических функций Якоби $Z(u)$.

Таким путем, в отличие от Пуассона, Кирхгоф находит общие члены полученных рядов, благодаря чему может их исследовать на сходимость. При этом оказывается несущественным предположение Пуассона о малости расстояния между рассматриваемыми шарами.

В своей второй работе [88] по рассматриваемой проблеме Кирхгоф, используя предыдущую работу, находит ряды для коэффициентов уравнения, связываю-

[86] *Murphy R.* Elementary principles on the theories of electricity heat and molecular actions. Cambridge, 1833.
[87] См. статью 10 наст. издания. — *Примеч. ред.*
[88] См. статью 11 наст. издания. — *Примеч. ред.*

щего заряды шаров и их потенциалы. Эти ряды он подвергает преобразованиям на предмет улучшения их сходимости. Полученные таким образом результаты он конкретизирует для некоторых численных значений радиусов шаров и расстояний между ними, сравнивая их с соответствующими численными результатами В. Томсона.

Интересы Кирхгофа к задачам теории потенциала не ограничивались проблемой распределения электричества на двух проводящих шарах. Известна работа Кирхгофа [89], посвященная доказательству существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае, когда поверхность рассматриваемого тела выпукла. Интересна судьба этой работы: она была опубликована после смерти автора, будучи представлена в «Acta mathematica» С. В. Ковалевской. Оказалось, что, написав эту работу, Кирхгоф обнаружил, что аналогичная работа, посвященная решению той же проблемы, была опубликована К. Нейманом. Поэтому Кирхгоф не решается ее публиковать, передав ее в дальнейшее распоряжение С. Ковалевской. Интересно, что подобно К. Нейману, Кирхгоф отыскивает решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в виде потенциала двойного слоя; и это несмотря на то, что после работ Робэна и В. А. Стеклова стало известно, что решение поставленной задачи проще было бы построить, исходя из свойств потенциала простого слоя.

Почему же Кирхгоф, как и Нейман, избрал в качестве исходного аппарата для решения задачи Дирихле потенциалы двойного слоя? Ответ на этот вопрос состоит в том, что различные проблемы электродинамики были связаны с прохождением постоянного тока через поверхности соприкосновения проводников различной формы. Постановка такого рода задач принадлежит Кирхгофу; он же показал, что эти задачи сводятся к отысканию потенциальной функции, которая должна обладать следующими свойствами: а) на поверхностях соприкосновения двух проводников разность потенциалов должна быть постоянной, зависящей от природы проводников, б) на этих же поверхностях соприкосновения должно быть постоянным количество электричества, протекающего в единицу времени через данное поперечное сечение в направлении нормали к поверхностям, что в случае однородных проводников приводит к равенству нормальных производных в рассматриваемых точках.

На основе этого Гельмгольц строит понятие потенциала двойного слоя, которое стало рабочим инструментом при решении задач электродинамики. Сверх того наглядный физический смысл потенциала двойного слоя как «суммы моментов» в сочетании с простым геометрическим смыслом интеграла Гаусса делал особенно выгодным выбор этих потенциалов в качестве средств для решения различных задач электродинамики.

Метод, предложенный Кирхгофом для решения задачи Дирихле, близок к методу средних арифметических К. Неймана [90]. Искомое решение он ищет в виде потенциала двойного слоя

$$V=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(s)}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\left(U+\sum_{i=1}^{\infty}U_i\right)ds,$$

[89] См. статью 13 наст. издания. — *Примеч. ред.*

[90] *Neumann C.* Untersuchungen über das logarithmischen und Newton'schen Potential. Leipzig, 1877.

где U — заданная на поверхности (s) функция, а U_1, U_2, . . . — функции, определенные на этой поверхности так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ был сходящимся. Дальнейшие рассуждения Кирхгофа как раз и связаны со свойствами потенциала двойного слоя: «Пусть V_1 и V_a (предельные) значения V на внутренней и внешней сторонах ds; тогда $V_i - V_a = U + \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Если бы теперь удалось так определить величины $U_1, U_2, U_3, \ldots$, чтобы было $\sum_{i=1}^{\infty} U_i = V_a$, то отсюда следовало бы, что $V_i = U$ и V было бы искомым потенциалом внутри рассматриваемого пространства».

Положив

$$U_1 = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{(s)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U ds, \qquad U_i = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{(s)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U_{i-1} ds \qquad (i = 2, 3, \ldots),$$

он удовлетворяет одному из упомянутых требований, так что остается доказать, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ сходится. Для этого достаточно доказать, что для всех значений натурального числа i имеет место неравенство

$$-\frac{M_i - N_i}{2} \leqslant U_{i+1} \leqslant \frac{M_i - N_i}{2}, \tag{6.3}$$

где M_i и N_i наибольшее и наименьшее значения U_i на поверхности (s). Для доказательства этого Кирхгоф рассматривает точку P, лежащую вне пространства, ограниченного данной замкнутой поверхностью (s), и строит конус с вершиной в этой точке, касающейся поверхности (s) по некоторой линии l.

Эта линия разделяет (s) на две части (s_1) и (s_2), на одной из которых $\partial 1/r/\partial n > 0$, на другой — отрицательна. Пользуясь геометрическим смыслом интеграла Гаусса, он полагает $\int\limits_{(s)} \frac{\partial 1/r}{\partial n} ds = \theta$ и для выпуклой поверхности (s) получает $\theta \leqslant 2\pi$, $\theta \to 2\pi$ при $P \to (s)$; при этом, замечает Кирхгоф, как бы ни была расположена точка P вне (s), величина θ равна отверстию упомянутого конуса и этот конус переходит в плоскость, если $P \in (s)$. Разбивая интеграл, определяющий функцию U_{i+1} на два (по (s_1) и (s_2)) и заменяя в них U_i соответственно на M_i и N_i, Кирхгоф получает неравенство (6. 3), из которого следует, что и

$$N_i \leqslant N_{i+1} \leqslant M_{i+1} \leqslant M_i. \tag{6.4}$$

Кирхгоф утверждает, что если поверхность не имеет плоских частей, то в неравенстве (6. 4), хотя бы с одной стороны, знак равенства достигаться не может, откуда он делает вывод, что существует такое число ε $(0 < \varepsilon < 1)$, что имеет место неравенство $M_{i+1} - N_{i+1} < \varepsilon\,(M_i - N_i)$. Это неравенство известным образом и обосновывает сходимость ряда.

Уязвимым местом этого рассуждения Кирхгофа является утверждение о существовании упомянутого выше числа $\varepsilon \in (0, 1)$. Аналогичное утверждение имеется и у Неймана. Интересно, что их недостаточная обоснованность сразу не была замечена математиками. Только Лебег [91] в работе 1937 г. показал, что ошибочность этих рассуждений, по существу, состоит в том, что при исследовании положительного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ на сходимость условие $x_{i+1}/x_i \leqslant \lambda < 1$ заменено на $x_{i+1}/x_i < 1$.

7. Распространение электрического тока и законы электрических цепей Кирхгофа

Крупнейшие научные открытия в области учения об электричестве и свете, сделанные Ньютоном, Фарадеем, Ампером, Френелем, Омом, Ленцом, Джоулем, потребовали дальнейшего количественного описания этих явлений, математического анализа наблюдаемых данных и создания расчетных методов, необходимых для решения практических инженерных задач.

Эти исследования привели к выяснению аналогии между электростатикой и законами распространения тока в проводниках как одномерных, так и трехмерных, обобщению теории Ома, законам Кирхгофа о ветвлении тока и во многом (если не в главном) подготовили математический аппарат для электродинамики Максвелла.

В 1822 г. Фурье в «Аналитической теории тепла» указал на аналогию потока тепла и потока электричества. Сопоставление этих потоков потребовало введения для описания электрических проблем величины, поведение которой напоминало бы поведение температуры в теории тепла. Разница в значениях такой величины в двух точках электрического контура может позволить измерить «движущую силу», действующую на электричество между этими точками. Для того чтобы развить эту идею, Ом в своей фундаментальной работе «Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet», вышедшей в свет в 1827 г., вернулся к тому, как рассматривал Вольта открытый им «столб».

Было принято измерять «напряжение» батареи, заземляя один ее конец и испытывая другой электроскопом. Отталкивающая или притягивающая сила определялась поведением электроскопа. Эту силу назвали электроскопической силой. Обозначив I — ток, текущий в проволоке, проводимостью γ при разности электроскопических сил на концах E, Ом пишет

$$I = \gamma E. \qquad (7.1)$$

Несмотря на путаницу, связанную с понятием электроскопической силы, работа Ома была крупным продвижением вперед [92]. Отношение современников Ома к его работе подробно проанализировано в статье H. J. J. Winter «The Reception of Ohms Electrical Reserches by his Contemporaries» (Phil. Mag. 1945. Vol. 245 (7). P. 371).

---

[91] *Lebesgue H.* Sur la méthode de Carl Neumann // J. Math. 1937. T. 16. P. 205—209.

[92] *Whittaker E.* A history of aether and electricity. The classical Theories. London: Nelson, 1958. P. 91—93.

В своей первой работе (написанной им в возрасте 21 года) Кирхгоф рассмотрел протекание электрического тока через плоскую пластину, например, круглой формы (см. статью 14 наст. издания).

«Уже первые его (Кирхгофа. — *Л. П.*) работы о прохождении электричества через пластинки, о разветвлении тока и электростатическое доказательство закона Ома составили эпоху» [93].

В приложении к указанной первой работе были впервые сформулированы два знаменитых закона Кирхгофа, на которых в настоящее время строится теория электрических цепей (мы вернемся к ним ниже). Еще при жизни Кирхгофа его законы вошли во все курсы математической физики и широко применялись электротехниками всех стран. В русской научной литературе первое наиболее полное и обоснованное изложение этих законов было дано И. И. Боргманом [94] и О. Д. Хвольсоном [95].

Переходя к расмотрению законов распространения электрического тока на поверхностях и в объеме проводящих тел, надо прежде всего отметить, что оно служило предметом исследования многих физиков. Общая теория этого явления разработана Кирхгофом [96], Смаазеном [97], Гельмгольцем [98], причем Кирхгоф и Гельмгольц дали теорию движения электричества в проводниках двух и трех измерений не только для постоянного, но и для переменного тока.

Кирхгофом [99] же был впервые теоретически проанализирован случай распространения тока в очень тонких пластинках плоских и произвольной кривизны. Он произвел также экспериментальную проверку выводов теории для круглых плоских пластинок. Затем Квинке [100], а позже Лодж и Фостер [101] подтвердили своими опытами правильность теории Кирхгофа распространения тока в плоских пластинах различной формы и при различных положениях на них электродов.

В 1857 г. Кирхгоф рассматривает движение электричества в проводниках. Пусть в любой точке V обозначает «напряжение», или «электроскопическую силу», — величину, значение которой в то время в электростатике не было еще достаточно корректно понято.

Для всех точек однородного изотропного проводящего тела при существовании в нем установившегося тока имеет место уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \tag{7.2}$$

а на границе поверхность проводника—воздух производная $\partial v/\partial N$, взятая по нормали, обращается в нуль, на границе же двух проводников из различного материала имеет разрыв.

---

[93] *Больцман Л.* Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 45.
[94] *Боргман И. И.* Курс теории электричества. СПб., 1894. Т. 1, 2.
[95] *Хвольсон О. Д.* О выводе II теоремы Кирхгофа // Электричество. 1888. № 7. С. 53—54.
[96] См. статьи 16, 17 наст. издания. — *Прим ч. ред.*
[97] *Smaasen W.* // Ann. Phys. 1846. Bd. 61; 1847. Bd. 69.
[98] *Helmholtz H.* // Ann. Phys. 1853. Bd. 89.
[99] См. статьи 14 и 15 наст. издания. — *Примеч. ред.*
[100] *Quincke G. H.* // Ann. Phys. 1856. Bd. 97.
[101] *Foster C.*, *Lodge O.* // Phil. Mag. 1875. Vol. 50 (4). P. 475.

Согласно свойству потенциальной функции, уравнение (7. 2) выражает отсутствие свободного электричества внутри тела. Только в случае равенства объемной плотности электричества нулю возможно равенство нулю левой стороны уравнения (7. 2), т. е. при прохождении по проводнику постоянного тока в объеме электричества нет. Другое дело, когда имеет место переменный, неустановившийся ток. Теоретическое исследование Кирхгофа показало, что в этом случае электричество движется и внутри проводника. Объемная плотность электричества внутри проводника удовлетворяет, согласно Кирхгофу, уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -8k\left(2\pi\rho - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right),$$

где ρ — удельная проводимость данного проводника; c — некоторая постоянная, введенная В. Вебером в теорию электричества; V — потенциал в рассматриваемой точке. Кирхгоф показал также, что токи распределяются по проводникам так, чтобы производилось наименьшее возможное количество джоулева тепла.

Легко видеть, что производимое в единицу времени джоулево тепло будет

$$\iiint \sigma \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)^2 dq_i, \tag{7. 3}$$

где σ — удельная электропроводность. Интеграл имеет стационарное значение, когда V удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sigma\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = 0. \tag{7. 4}$$

Кирхгоф занимался также вопросом о согласовании положений электростатики с теорией Ома, которая за двадцать с лишним лет своего существования была подтверждена многочисленными экспериментальными исследованиями. В 1849 г. он отождествил «электроскопическую силу» Ома с электростатическим потенциалом. Правильность этого была быстро подтверждена, и работа Кирхгофа продолжена другими исследователями (см. статью 18 наст. издания).

Тем самым была устранена неясность и неуверенность в том, как надо интерпретировать на языке электростатики «напряжение», «электроскопическую силу» и т. п. Правильность этой идентификации легко показать, сравнив различные выражения, полученные для электрической энергии: выражение Гельмгольца показывает, что энергия единичного заряда в какой-либо точке пропорциональна значению электростатического потенциала в этой точке, а выражение Джоуля показывает, что энергия, освобождаемая единичным зарядом при прохождении им от одной точки контура к другой, пропорциональна разности «электрических напряжений» в этих двух точках. Отсюда следует, что напряжение и потенциал одно и то же. Результат Кирхгофа был подтвержден последующими исследователями.

Огромное влияние на развитие теории прохождения тока по линейным

проводникам оказало прокладывание Атлантического кабеля Европа—Америка, в котором непосредственно участвовал В. Томсон (Кельвин).

Теория передачи сигналов по подводному кабелю (проводу) впервые появилась в переписке Стокса и В. Томсона [102]. Приняв в законе Ома во внимание индуктивность L, получим для электрического потенциала V на расстоянии x от границы и тока i в этой точке

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \qquad (7.5)$$

а для емкости C

$$C\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}, \qquad (7.6)$$

откуда, исключив i, найдем

$$\frac{1}{c}V'' = L\ddot{V} + R\dot{V}. \qquad (7.7)$$

В таком виде уравнение получено О. Хевисайдом (1850—1925) в 1876 г.[103]; оно носит название телеграфного уравнения. Решение его имеет вид

$$V = e^{-Rt/2L}\cdot \sin n\,[x - (CL)^{-1/2}t]. \qquad (7.8)$$

Физический смысл этого решения состоит в том, что некоторое гармоническое возмущение и, следовательно, любое возмущение распространяется вдоль линейного проводника со скоростью

$$(CL)^{-1/2}.$$

В 1857 г. исследования В. Томсона были обобщены в замечательной работе Кирхгофа о распространении электрического возмущения в телеграфном проводе круглого сечения [104].

Его понимание природы тока (восходящее к Ому, Фехнеру и Веберу) состояло в представлении о двух равных потоках «стеклянного» и «смоляного» электричества, текущих в противоположных направлениях.

По Кирхгофу, для электрического потенциала V имеем

$$V = 2e\log(l/a), \qquad (7.9)$$

где e — заряд на единицу длины провода; l — его длина; a — радиус сечения. Строго говоря, Кирхгоф получил для V уравнение

$$V = 2e\log(\varepsilon/a) + \int e'/r\,ds', \qquad (7.10)$$

где $\varepsilon \ll l$ и $\varepsilon \gg a$, а интегрирование производится по всей длине провода, за исключением участка 2ε. Уравнение (7.9) получено при использовании некоторого приближения, которое, однако, вызывает возражения.

---

[102] *Thomson W.* // Phil. Mag. 1854. June. Vol. 7. P. 396.
[103] *Heaviside O.* // Phil. Mag. 1876. Aug. Vol. 11. P. 135.
[104] См. статью 21 наст. издания. — *Примеч. ред.*

С помощью не слишком сложных преобразований, отбросив в уравнении (7. 7) член $\dot{V}$, что во многих случаях допустимо, найдем уравнение

$$V'' = \ddot{V}/c^2, \tag{7.11}$$

которое показывает, что электрическое возмущение распространяется вдоль проводника со скоростью c. Заметим. что у Вебера и Кирхгофа буквой c была обозначена величина $c/\sqrt{2}$. Незадолго до опубликования статьи Кирхгофа Вебер и Кольрауш [105] определили значение c экспериментально и нашли

$$c = 3{,}1 \cdot 10^{10} \text{ см/с},$$

которое в пределах ошибок измерения совпадает со скоростью распространения света в межпланетном пространстве. Кирхгоф был первым, кто заметил это совпадение, однако не сделал из этого факта никаких дальнейших выводов. Только гений и интуиция Максвелла позволили ему на этом основании утверждать единство природы этих процессов.

Исследования Кирхгофа по электричеству были выполнены под сильным влиянием исследований В. Вебера [106].

Выше нами отмечалось, что Кирхгоф считал необходимым, чтобы в математической физике фигурировали только измеряемые величины. В теории распространения тока присутствовало сопротивление проводника, способ абсолютного измерения которого не был разработан. Кирхгоф впервые указал метод, дающий возможность выполнять это измерение.

Пусть A_1 и A_2 — две катушки, коэффициент взаимной индукции M которых может быть вычислен; Γ - гальванометр; r — искомое сопротивление проводника. Гальванометром Γ определяется сила постоянного тока i_2, проходящего по части цепи $Q\Gamma A_2P$. После измерения i_2 катушка A_1 быстро перемещается в такое положение, при котором $M=0$. Вследствие изменения M в цепи возбуждается индукционный ток, причем Γ позволяет измерить то количество электричества g_2, которое при развитии индукционного тока проходит через поперечное сечение ветви $Q\Gamma A_2P$ в течение всего периода существования такого тока, т. е.

$$q_2 = \int_0^\tau i_2' dt, \tag{7.12}$$

где τ — продолжительность существования индукционного тока; i_2' — сила тока в ветви $Q\Gamma A_2P$ в какой-либо момент времени t. Если сопротивления обеих ветвей PA_1EQ и $Q\Gamma A_2P$ велики по сравнению с искомым сопротивлением r, то, как нетрудно показать

---

[105] *Weber W.*, *Kohlrausch R. H.* // Ann. Phys. 1856. Bd. 49. S. 10.

Вебер в этой работе продолжал исследования по абсолютным измерениям, начатые им и Гауссом в связи с изучением земного магнетизма.

[106] *Whittaker E.* A history of aether and electricity. The classical Theories. London: Nelson, 1958. P. 233.

$$\frac{r}{M}=\frac{i_2}{q_2}. \qquad (7.13)$$

По этой формуле и можно вычислить r. Максвелл [107] дал достаточно строгий вывод формулы (7. 13). По методу Кирхгофа абсолютные измерения сопротивления были произведены Глейзбруком [108], Химстедтом [109], Роити [110], Роуландом [111] и др.

Как в настоящее время хорошо известно, статическое электричество можно наблюдать, используя плоский конденсатор. Его теория впервые была дана Клаузиусом, но он предполагал, что пластинки конденсатора бесконечно тонкие. Кирхгоф же разработал расчетный метод, который позволял учитывать их толщину и, таким образом, превратил конденсатор в один из важнейших приборов электростатики. Используя ряд остроумных математических приемов (см. статью 12 наст. издания), он получил весьма простые формулы, позволяющие приближенно рассчитать емкость конденсатора с учетом краевого эффекта.

Этими формулами пользуются и в настоящее время при расчете удельных параметров диэлектриков на основании измерения емкости конденсатора, образованного двумя дисками с помещенной между ними пластиной исследуемого материала.

Кирхгофом описан эксперимент, являющийся первым примером моделирования потенциального плоскопараллельного поля в проводящей среде. При помощи электроскопа Кирхгоф исследовал изопотенциальные линии, наблюдаемые в круглой пластине из медной фольги при подведении тока к двум точкам края этой пластины. Он показал экспериментально и теоретически, что эти линии являются окружностями.

В последующих работах Кирхгоф рассмотрел токи в проводящих средах и в системе линейных проводников, причем здесь впервые проведено рассмотрение токов в проводящих средах, исходя из тех же положений, что и в электростатике, и показана полная аналогия электрического поля в проводниках и диэлектриках.

Проблема разветвления тока — основная проблема теории электрических цепей — для некоторых отдельных случаев была разработана Омом, Пулльє, Уитстоном, Поггендорфом, В. Вебером. Уитстон занимался этой проблемой для теоретического обоснования «мостика Уитстона» [112], а Поггендорф дал формулы для применения мостика Уитстона и совместно с В. Вебером экспериментально проверил их правильность [113]. Однако только Кирхгоф в 1845 г., еще будучи студентом, поставил и решил эту задачу в столь общем виде [114], что все последующие работы основывались на его решении.

---

[107] *Maxwell J. C.* A Threatise on Electricity and Magnetism. Oxford, 1881. Vol. 2. P. 368.
[108] *Glaserbook R.* // Phil. Trans. 1883. Vol. 174. P. 223.
[109] *Himstedt F.* // Ann. Phys. 1885. Bd. 26. S. 547; 1886. Bd 28. S. 338.
[110] *Roiti A.* // Nuovo Cimento. 1884. T. 15.
[111] *Rowland H., Kimball I. P.* // Am. J. Sci. 1878, vol. 15. P. 281; Electrotech. Zeitschr. 1881. Bd. 6. S. 441.
[112] *Witestone W.* // Ann. Phys. 1844. Bd. 62. S. 499.
[113] *Poggendorf I.* // Ann. Phys. 1845. Bd. 67. S. 273.
[114] См. статью 14 наст. издания. — *Примеч. ред.*

Первый закон Кирхгофа есть следствие закона сохранения заряда и состоит в том, что алгебраическая сумма сил всех токов, сходящихся в точке разветвления проводников [115], равна нулю, т. е.

$$\sum_n i_n = 0. \qquad (7.14)$$

Второй закон Кирхгофа есть следствие того, что потенциал проводника в каждой точке есть однозначная функция этой точки. Он гласит: если в любой системе линейных проводников, как бы сложна она ни была, выделить произвольный замкнутый контур, то сумма падений напряжений (произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков), подсчитанных вдоль контура, должна равняться сумме сторонних ЭДС E (элементов, аккумуляторов, динамомашин, термобатарей и т. п.) в этом контуре:

$$\sum_n i_n R_n = \sum_m E_m. \qquad (7.15)$$

Законы Кирхгофа применимы к постоянным и квазистационарным токам.

Доказательство этих законов Кирхгоф сначала дал для линейных проводников, а в 1848 г. он распространил его и на случай проводников нелинейной формы.

Перечислим некоторые наиболее типичные, вошедшие в учебники физики и электротехники применения уравнений Кирхгофа к решениям отдельных задач: 1) параллельное соединение проводников (силы токов в двух параллельно соединенных проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям); 2) мостик Уитстона; 3) соединение элементов в батарею (при последовательном соединении одинаковых элементов ЭДС возрастает в n раз и в n раз возрастает внутреннее сопротивление, при параллельном соединении ЭДС не меняется, а внутреннее сопротивление уменьшается в n раз); 4) компенсационный метод определения электродвижущей силы элементов и т. д.

Не правда ли, от этих законов, ставших достоянием науки, техники и каждого культурного человека веет школьными воспоминаниями? Великолепна их ясность, прозрачность стиля, типичная для научного творчества Кирхгофа; трудно, если не невозможно, описать бесчисленные практические, технические приложения законов Кирхгофа.

Кирхгофу также принадлежит теоретическое решение вопроса о намагничении бесконечно длинного цилиндра под влиянием какой-либо системы магнитов, т. е. при произвольном законе распределения магнитной силы в пространстве. Случай намагничения очень длинного и тонкого стержня в однородном магнитном поле был исследован теоретически еще Грином [116].

В последние годы жизни Кирхгоф провел очень интересные теоретические исследования, связанные с взаимодействием электрических и магнитных полей, с одной стороны, и механическим напряжением и деформациями — с другой,

---

[115] Токи, подходящие к точке разветвления, считаются положительными, а токи, исходящие из нее, — отрицательными.

[116] *Green G.* An essay of the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism. Nottingham, 1828; J. reine und angew. Math. 1852. Bd. 47. S. 215.

и успешно изучал законы, описывающие явления электрострикции и магнитострикции.

Остановимся в заключении еще на одном вопросе. В 1858 г. Гельмгольц [117] показал, что если сопоставить магнитную индукцию со скоростью жидкости, то электрические токи соответствуют вихревым нитям в жидкости. Десятью годами позже Кирхгоф [118] развил эту аналогию дальше (интересно отметить, что то направление развития электродинамики, которое привело к теории Максвелла, было на всех этапах связано с разнообразными аналогиями с гидродинамикой и теорией упругости).

Будем рассматривать аналогию, о которой идет речь, с точки зрения динамики. Тогда очевидно, что пондеромоторные силы между металлическими кольцами, несущими электрические токи, должны быть подобны пондеромоторным силам между теми же кольцами, когда они погружаются в бесконечную несжимаемую жидкость. Движение жидкости в этом случае будет таково, что ее циркуляция через отверстие каждого кольца будет пропорциональна силе электрического тока в соответствующем кольце. Для того чтобы рассмотреть этот вопрос, Кирхгоф решил гидродинамическую задачу движения двух тонких твердых колец в несжимаемой жидкости без трения, движение которой не является вращательным. Он нашел, что силы, действующие между кольцами, численно равны силам, которые кольца производили бы друг на друга, если бы они пересекались электрическими токами, пропорциональными циркуляциям жидкости.

8. Математическая теория упругости твердых тел

Из практики, техники, опыта известно, что макроскопические твердые тела под влиянием внешних сил претерпевают изменения формы, исчезающие при постепенном прекращении их действия; внезапное же прекращение такого действия вызывает колебательные движения. Задачей математической теории упругости является точное количественное описание возникших таким путем изменений геометрической формы и механического состояния тел: определение деформаций и напряженного состояния твердого тела, если известны действующие на него внешние силы и условия его закрепления.

Для этого используется обычный метод математической физики: 1) определяются механические величины, характеризующие физическую картину напряженного состояния твердого тела, и геометрические величины, определяющие деформацию тела; 2) дается математическая формулировка найденной из опыта зависимости между механическими и геометрическими величинами, приводящая к основным уравнениям теории упругости — дифференциальным уравнениям в частных производных, интегрирование которых в каждом конкретном случае отвечает на поставленные выше вопросы; 3) разрабатывается теория интегрирования этих дифференциальных уравнений.

Классическая теория упругости использует два ограничения, во-первых, в соответствии с важнейшими практическими потребностями рассматриваются только столь малые деформации, что произведениями упругих перемещений и

[117] *Helmholtz H.* // J. Math. 1858. Bd. 55. S. 25.
[118] В книге E. Whitteker'a ошибочно указано, что «двумя годами позже».

их производных можно пренебречь по сравнению с линейными выражениями, и, во-вторых, рассматриваются нагрузки столь малые, что можно считать деформации пропорциональными силам, которыми они вызваны.

Полученные математической теорией упругости результаты имеют практическое значение для инженерного дела, архитектуры и других прикладных областей, где приходится иметь дело с конструкциями, материалами для которых являются твердые тела.

Развитие теории упругости, которое начинается с исследования Галилеем [119] сопротивления твердых тел разрушению, продолжается в работах Гука, Мариотта, Я. Бернулли, Д. Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Кулона, Т. Юнга, Софи Жермен, Лапласа, Пуассона, Навье, Коши, Ламе, Ф. Неймана, Грина, Фохта, Бетти, Клебша, Мора, Рэлея, Кристоффеля, Сен-Венана, Буссинеска. К тому времени, когда появились первые работы Кирхгофа по математической теории упругости, были достигнуты крупные и принципиальные результаты как в теоретическом анализе различных сторон проблемы, так и в экспериментальном исследовании деформаций, напряжений, равновесия изотропных и анизотропных упругих твердых тел, вибрации шаров и цилиндров, кручении, изгибе равномерно нагруженных балок, изгиба и растяжения тонких стержней, колебании стержней, растяжения и изгиба пластинок, тонких оболочек и т. д. и т. п.[120])

Многочисленные важные результаты в математической теории упругости были получены Ф. Нейманом [121].

Как ученик Ф. Неймана, Кирхгоф рано заинтересовался математической теорией упругости. Вклад Кирхгофа в теорию упругости состоит из шести статей, опубликованных в различных журналах в период 1848—1879 гг. и почти полностью перепечатанных в его «Gesammelte Abhandlungen» (S. 237—339), из четырех статей (1882—1884 гг.), перепечатанных в «Nachtrag» (1891 г.), и из пяти лекций в первом томе его «Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik» (лекции 10, 27—30; с. 84—96, 322—386 русского перевода).

Этот том был опубликован в трех частях, две из которых вышли в свет в 1874 г., а третья — в 1876 г. В проспекте издания, датированным февралем 1874 г., заглавие тома было таково: «Лекции по аналитической механике с включением гидродинамики и теории упругости твердых тел».

Две его ранние работы [122] по теории упругости были изданы с многочисленными опечатками; основное содержание этих статей вошло затем в статью

---

[119] *Galilei G.* Discorsi e Dimonstrationi mathematiche. Leiden, 1638.

[120] Историю математической теории упругости см.: *Todhunter J.*, *Pearson K.* A History of the Theory of Elasticity and of Strength of Materials from Galilei to the present time. Cambridge: Univer. Press, 1893. Vol. 1, 2, pt. 1, 2; *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Госиздтехтеорлит, 1957; *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Введение. Исторический обзор. С. 15—43.

[121] Исследования Ф. Неймана по теории упругости обобщены в изданной О. Э. Мейером книге Ф. Неймана: *Neumann F.* Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Leipzig, 1885. 374 S.

[122] *Kirchhoff G.* Note relative à la théorie de la l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique // C. r. Acad. sci. 1848. T. 27. P. 394—397; Note sur les vibrations d'une plaque circulaire // C. r. Acad. sci. 1849. T. 29. P. 753—756.

1850 г.[122a]. В этой статье изложены первая удовлетворительная теория изгиба пластины. Кирхгоф обосновал свою теорию пластинок двумя гипотезами, получившими впоследствии общее признание: 1) всякая прямая линия, которая до деформации перпендикулярна к средней плоскости, остается прямой, нормальной к искривленной средней плоскости после деформации; 2) элементы средней плоскости не подвергаются растяжению.

Эти допущения дали ему возможность выразить потенциальную энергию изогнутой пластинки через кривизну средней плоскости. Затем при помощи принципа виртуальной работы были выведены уравнения движения и граничные условия, которые применяются к колебаниям изгиба круглой пластинки [123].

Исходя из этих двух предпосылок, Кирхгоф находит правильное выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки

$$V=\frac{1}{2}D\int\int\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+2\mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+2(1-\mu)\right]\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}, \qquad (8.1)$$

где $D=Eh^3/2\,(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластинки, а W — прогиб ее срединной поверхности. Использовав принцип виртуальной работы

$$\int\int q\delta W dxdy=\delta U, \qquad (8.2)$$

где q — нагрузка, распределенная по пластинке, и введя (8.1) в (8.2) и выполнив варьирование, Кирхгоф получает хорошо известное дифференциальное уравнение изгиба пластинки

$$D\left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right)=q. \qquad (8.3)$$

Общая теория поперечных колебаний круговой пластинки была также развита Кирхгофом, который полностью исследовал задачу до численных результатов (статья 23 наст. издания).

Теория пластинок может быть построена при помощи рассуждений того же характера, как и те, которые Кирхгоф применил в теории тонких стержней. Исследование этим методом было выполнено Герингом [124], а затем в улучшенной форме самим Кирхгофом.

Кирхгоф находит общее решение своих уравнений для колебаний круглой пластинки с свободным краем (как для симметричной формы колебаний: узловые линии — концентрические окружности, так и для форм, для которых узловыми линиями являются диаметры пластинки — граничные условия Пуассона не применимы).

Проделав большую вычислительную работу, Кирхгоф дает таблицу частот, соответствующую различным формам колебаний. Эти численные результаты он использует для анализа опытных данных о колебаниях пластинок, полученных

[122a] См. статью 22 наст. издания. — *Прим. ред.*

[123] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Введение.

[124] Исследования Геринга (Gehring) составили его диссертацию; они изложены Кирхгофом в первом томе его «Vorlesungen über mathematische Physik» (Leipzig, 1874. Bd. 1), посвященном механике.

Хладни [125] и Штрельке [126]. Он хотел установить по этим данным правильное значение коэффициента Пуассона, но поскольку частоты очень слабо зависят от него, то эти опыты непригодны для точного определения этого коэффициента. Впоследствии Кирхгоф с той же целью поставил собственные опыты [127] на консолях из круглой стали. Угол кручения, а также угол, образуемый касательной к оси консоли на ее свободном конце с горизонталью, измерялись оптическим способом: с помощью зеркальца, укрепленного на конце консоли. Эти весьма тщательные измерения дали для коэффициента Пуассона для стали 0,294 [128]; современное значение для стали [129] с 1 % углерода 0,293, для мягкой стали — 0,291. Прекрасное согласие!

В книге «Механика» Кирхгоф обобщил свою теорию пластинок и на случай, когда прогибы нельзя считать весьма малыми. «Появление такое теории, — пишет С. П. Тимошенко [130], — было большим шагом вперед в теории упругости, и вся его важность выявилась позднее в том широком применении, которое она получила в проектировании различного рода тонкостенных конструкций».

Другим ценным вкладом Кирхгофа в теорию упругости было выполненное им исследование деформации упругих стержней [131]. Он вывел общие уравнения равновесия для пространственной изогнутой кривой стержня в предположении больших прогибов.

В последнем параграфе этой статьи Кирхгоф указывает на интересную «упругую кинетическую аналогию». Тождественность уравнений вращения твердого тела относительно закрепленной точки и уравнений равновесия гибкого стержня, деформированного силами, приложенными по концам, была впервые обнаружена Кирхгофом: «Одним из наиболее красивых результатов мне всегда казался проведенный Кирхгофом параллелизм между изгибанием и закручиванием бесконечно тонкой проволоки, с одной стороны, и вращением твердого тела вокруг неподвижной точки — с другой»[132].

Эта теорема носит название «кинетической аналогии Кирхгофа» [133] интересное обсуждение ее см.: *Thomson W.*, *Tait P.*

---

[125] *Chladni E. F.* Die Akustik. Leipzig, 1802.

[126] *Strelke J.* // Ann. Phys. 1843. Bd. 58. S. 334.

[127] *Kirchhoff G.* // Ann. Phys. 1859. Bd. 108. S. 369—392.

[128] Подробные опыты по определению коэффициента Пуассона для различных сортов стали были выполнены в Петербурге в 1865—1866 гг. одним из учеников Кирхгофа, впоследствии профессором механики Петербургского университета, — Михаилом Федоровичем Окатовым (1829—1901). Результаты этих опытов приведены в докторской диссертации М. Ф. Окатова «Теория равновесия и движения упругой проволоки» (СПб., 1867). Ему же принадлежат: «Общая теория равновесия упругих твердых тел и разделение их на классы» (магистерская диссертация) (СПб., 1865); «Приложение второй основной теоремы механической теории тепла к упругому твердому телу» в книге «Термостатика» (СПб., 1871). Биографические данные см. «Биографический словарь профессоров и преподавателей СПб. университета» (СПб., 1898. Т. 2).

[129] *Кэй Дж.*, *Лэби Т.* Таблицы физических и химических постоянных. М.: Физматгиз, 1962. С. 38.

[130] *Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 307.

[131] Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen stabes // J. reine und angew. Math. 1859. Bd. 56. S. 285—313.

[132] *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX в. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 263.

[133] В русском переводе книги С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов...» эта аналогия названа «динамической аналогией Кирхгофа» (С. 307).

Treatise on natural philosophy. Oxford, 1867. Vol. 2. P. 609—613.

Теория Кирхгофа вызвала много споров, в которых удалось устранить многочисленные трудности, упростить ее построение и в то же время подтвердить ее конечные выводы. Заметим, что она нашла применение в решении задач устойчивости упругих систем, как, например, поперечного выпучивания кривого стержня с узким прямоугольным поперечным сечением, подвергнутого чистому изгибу, и т. п.

Необходимо отметить работу Кирхгофа, в которой исследуется колебание стержней переменного поперечного сечения[134]. Общее уравнение поперечных колебаний таких стержней было уже известно, и Кирхгоф показывает, что в определенных случаях оно поддается точному интегрированию.

Кирхгоф показал, что один единственный вариационный принцип содержит в себе шесть объемных и поверхностных уравнений теории упругости. Обозначим δU — работу приложенных сил, $dxdydz$ — элемент объема упругого тела. тогда

$$\delta U = \mu\delta \iiint \left[s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \frac{\lambda}{2\mu}(s_1 + s_2 + s_3)^2\right] dxdydz, \tag{8. 4}$$

где s_1, s_2, s_3 — главные напряжения. Тело считается изотропным, интегрирование производится по всему объему. Кирхгоф отметил, что Грин уже раньше написал уравнение (8. 4), не применив, однако, главных напряжений.

Определив последние, Кирхгоф записывает левую сторону (8. 4) в виде

$$\delta U = \mu\delta \iint d\omega dz \left\{\left[\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_2}\right)^2\right] + \frac{\lambda}{2\mu}\left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2}\right)^2\right\}, \tag{8. 5}$$

где $d\omega$ — элемент средней поверхности; ось z — перпендикулярна к ней; ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны средней поверхности; $\partial q/\partial z$ — напряжение в направлении z в точке на расстоянии z от $d\omega$. После длинных и не очень ясных рассуждений Кирхгоф приходит к уравнению

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial q}{\partial z} + \lambda\left(\frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2}\right) = 0. \tag{8. 6}$$

Физический смысл (8. 6) состоит в том, что напряжение, перпендикулярное к лицевой стороне пластин, исчезает в каждой точке пластинки. Так как пластина предполагается бесконечно тонкой и не имеет никакой нагрузки на поверхности, то по крайней мере приближенно этот вывод представляется правильным.

Используя (8. 6) и проинтегрировав (8. 5) по z, получим

$$\delta U - \frac{2}{3}\varepsilon^3\mu\delta \int d\omega \left[\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)^2\right] = 0. \tag{8. 7}$$

Таким образом, Кирхгоф впервые выразил работу, произведенную при искривлении тонкой изотропной пластинки с кривизнами $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ в любой точке. в терминах этих кривизн. Это одно из достижений этой статьи (статья 22 наст. издания).

[134] *Kirchhoff G.* // Ann. Phys. 1859. Bd. 108.

Если какой-нибудь край пластинки совершенно свободен, то, естественно, что вдоль него не будет ни изгибающих, ни крутящих моментов, ни вертикальных поперечных сил:

$$M_{\text{изг}} = 0, \quad M_{\text{крут}} = 0, \quad F = 0.$$

В таком виде граничные условия были исследованы Пуассоном[135]. Кирхгоф же показал, что трех условий на границе много и что достаточно двух для полного определения прогибов пластинки[136].

В четвертом параграфе статьи 1850 г. рассмотрены колебания свободной пластины круглой формы. Решение уравнения не нагруженной и не подверженной действию объемных сил пластины получается в виде дважды бесконечных рядов функций, похожих на функции I^n_{2x} Бесселя (статья 22 наст. издания).

Пятый параграф этой статьи посвящен численному решению тех же уравнений и включает очень много трудоемких вычислений. Зная характер Кирхгофа, можно с большой уверенностью предположить, что он проделал вычисления сам и пожалеть, что в его время еще не было ЭВМ (вычисления и их результаты занимают несколько страниц).

В 1852 г. Кирхгоф опубликовал статью[137] «Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers». Кирхгоф не отметил ее в своих «Gesammelte Abhandlungen», которые он сам составил. Возможно, что он был неудовлетворен методом, применяемым в этой статье, и полученными результатами.

Общие уравнения изгиба, кручения, растяжения применимы лишь тогда, когда смещения малы, однако во многих случаях (например, для специальных пружин) они вовсе не малы. Кирхгоф первым преодолел эту трудность. Он показал, что общие уравнения применимы со всей строгостью к малой части тонкого стержня, все линейные размеры которого такого же порядка малости, что и диаметры поперечного сечения. Для упрощения он в первом приближении пренебрег силами инерции и массовыми силами. Эти исследования Кирхгофа носят в значительной степени кинематический характер.

В работе 1859 г.[138] Кирхгоф доказал следующую теорему. Пусть заданы на граничной поверхности смещения или напряжения, в таком случае решение задачи о равновесии будет единственным в смысле однозначной определенности напряженного состояния или деформации.

Теория Кирхгофа явилась предметом весьма оживленного обсуждения. В нем приняли участие Кельвин, Тэт, Буссинеск и Клебш[139]. Все результаты теории независимо от метода их получения были подтверждены последующими исследованиями[140].

---

[135] *Todhunter J.*, *Pearson K.* History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: In 2 vol. Cambridge, 1886. Vol. 1. P. 250.

[136] Он показал также, что два из требований Пуассона относительно крутящего момента и поперечной силы можно заменить одним граничным условием.

[137] *Kirchhoff G.* / Sitzungsber. Math.-Naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Wien, 1852. Bd. 9. S. 762—773.

[138] *Kirchhoff G.* // J. reine und angew. Math. 1859. Bd. 56.

[139] *Thomson W.*, *Tait P. G.* A treatise on natural philosophy. Oxford, 1867. Vol. 2; *Boussinesq V. J.*, *Liouville J.* // C. r. Acad. sci. 1871. T. 16 (2); *Clebsch A.* Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig: Teubner, 1862.

[140] *Basset A. B.* // Proc. Math. Soc. London, 1892. T. 23; *Mitchell J. H.* // Proc. Math. Soc. London, 1900. T. 31. P. 130.

Статья «Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes» в основном воспроизведена в двадцать восьмой лекции «Механики» Кирхгофа. В обоих вариантах эта статья в силу ее краткости и общности представляет собой нелегкое чтение.

Кирхгоф рассмотрел также стержень, изогнутый по винтовой линии, и кинематику тонких стержней.

В 1879 г. в работе «Ueber Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt»[141] Кирхгоф использует уравнение Рэлея[142] в виде

$$A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+B\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(c\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right)=0, \tag{8.8}$$

где y — смещение в момент времени t в центре сечения, находящегося на расстоянии z от конца стержня, и решает его для нескольких частных случаев, сведя с помощью надлежаще выбранной подстановки к дифференциальному уравнению второго порядка[143]. Им же были рассмотрены некоторые специальные случаи колебания стержней переменного сечения, где точная форма собственных функций может быть определена при помощи функции Бесселя.

В работе 1884 г.[144] Кирхгоф рассмотрел изменение формы тела под действием электрической или магнитной поляризации.

В. Томсон и Дж. К. Максвелл обсуждали механические силы, которые возникают в теле, помещенном в электромагнитное поле, а Гельмгольц обобщил их результаты, введя, кроме постоянной индукции, вторую константу, которая определяется изменениями, вызванными изменениями плотности среды.

Кирхгоф дал дальнейшее обобщение их выводов, введя третью постоянную, которая выражает изменения, производимые индукцией в силу существования наиболее общей формы напряжения, когда тело является упругим.

Одновременно Лерберг[145] с помощью других соображений получил те же результаты. Сравнение выводов Кирхгофа с экспериментом показывает, что они не дают полного представления об отношении магнетизма и упругого напряжения.

В заключение несколько замечаний об обозначениях в теории упругости.

Важность удачного выбора обозначений и наиболее подходящей терминологии в любой математической теории вряд ли нуждается в каком-либо дополни-

---

[141] *Kirchhoff G.* / Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1879. Oct. S. 815—828.

[142] *Strutt J. W.* (Lord Rayleigh). The Theory of Sound. London: McMillan, 1871. Vol. 1. P. 240.

[143] При исследовании вынужденных колебаний струны или стержня переменной плотности возникает необходимость, кроме основных факторов, учесть силу сопротивления (пропорциональную скорости), жесткостей на изгиб, смещение концов, продольное удлинение. Если принять в расчет последнее, то, согласно Кирхгофу, дифференциальное уравнение колебаний примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\left[1+\frac{E}{2Sl}\int_0^l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{8.9}$$

где второе слагаемое, стоящее в прямых скобках, описывает изменение напряжения стержня вследствие продольного удлинения.

[144] *Kirchhoff G.* — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1884. Dez. S. 1155—1170.

[145] *Lorberg K.* // Ann. Phys. 1884. Bd. 29. S. 300—320.

тельном обосновании. В математической теории упругости этот вопрос оказался весьма трудным. Он многократно обсуждался. Вот некоторая сводка [146] обозначений, предлагавшихся для компонентов деформации и напряжения.

Компоненты деформации

Сен-Венан	Кирхгоф	Кельвин и Тэт	Пирсон	Карман	Ляв
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ g_{yz}, g_{xz}, g_{xy}	x_x, y_y, z_z y_z, z_x, x_y	e, f, g a, b, c	s_x, s_y, s_z $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$	e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} e_{xy}, e_{zx}, e_{xy}

Компоненты напряжения

Кирхгоф Ляв	Кельвин Тэт	Ламе	Сен-Венан	Карман	Пуассон
X_x, Y_y, Z Y_z, Z_x, X_y	P, Q, R S, T, U	N_1, N_2, N_3 T_1, T_2, T_3	t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} $t_{yz}, t_{zx}\ t_{zy}$	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ T_{yz}, T_{zx}, T_{zy}	$\widehat{xx}, \widehat{yy}, \widehat{zz}$ $\widehat{yz}, \widehat{zx}, \widehat{xy}$

Обозначения Кирхгофа для компонент напряжения получили широкое распространение, но для компонент деформации его обозначения оказались не столь удобными и не привились.

Для двух постоянных теорий Кирхгоф пользуется обозначениями k — модуль сдвига, $\theta = \sigma/(1-2\sigma)$, где σ — коэффициент Пуассона.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пожалуй, лучше всего закончить наш краткий обзор жизни и научного творчества Кирхгофа словами Больцмана: «Внешний блеск был чужд Кирхгофу, но тем в большей мере он был наделен духовным блеском чистого разума. . .; ему были присущи благородная скромность и привлекающая сердца доброта»[147] . . . Его стиль «характеризует строгая формулировка гипотез, тонкость разработки, спокойное, почти эпическое развитие мысли с железной последовательностью, без замалчивания каких-либо трудностей, с разъяснением малейших неясностей [148].

Гордые, но правдивые слова, которые великий римский поэт написал о себе самом, могут быть с полным правом отнесены и к Густаву Роберту Кирхгофу:

Non omnis moriar, multaque pars mei
Vitabit Libitin(am). . .

Quintus Horatius Flaccus. Ad Melpomenen.
(Carmina III, 30)[149]

---

[146] *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л., 1935. С. 642—643.
[147] *Больцман Л.* Густав Роберт Кирхгоф // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 34.
[148] Там же. С. 50.
[149] *Квинт Гораций Флакк.* К Мельпомене. Песня III, 30: «Нет! не весь я умру, — часть меня лучшая избежит похорон. . .» (Пер. *Н. И. Шатерникова*). — *Примеч. ред.*

КОММЕНТАРИИ*

1
О ВЗАИМОСВЯЗИ МЕЖДУ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ПОГЛОЩЕНИЕМ СВЕТА И ТЕПЛА [21]

Работа впервые доложена в декабре 1859 г. в заседании Берлинской Академии наук. С нее начинается новая область физики — термодинамика излучения: в ней впервые применено второе начало термодинамики к тепловому излучению. Сама статья — скорее эскиз, набросок нового подхода, чем основополагающее исследование. Над доказательством Кирхгофа еще довлеет открытое им в октябре 1859 г. явление обращения спектральных линий.

Эта статья, как и следующая, были включены Кирхгофом в подготовленный им том его собраний трудов (Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1882). Обе эти статьи составили одну книжку знаменитой серии «Классики точных наук» основанной В. Оствальдом (см. [74]). Последнее издание снабжено комментариями М. Планка, которые частично использованы в настоящем издании.

[1] (с. 9). См. статью 4 наст. издания.

[2] (с. 9). Первая формулировка положения, известного как закон теплового излучения Кирхгофа.

[3] (с. 9). В данном случае речь идет только о полном излучении и полном поглощении. Лишь в дальнейшем доказывается, что это же имеет место и для излучения и поглощения, отнесенных к каждой отдельной длине волны.

[4] (с. 10). Т. е. все тепло, излучаемое телом *c*, равно всему теплу, которое оно же поглощает.

[5] (с. 11). Первый рисунок солнечного спектра опубликован Й. Фраунгофером в статье 1817 г. (см. примеч. 1 к статье 4). Работа напечатана также в Denkschriften Akad. Wiss. München (1814—1815). 1817. Bd. V. S. 193—226.

2
ОБ ОТНОШЕНИИ МЕЖДУ ИСПУСКАТЕЛЬНОЙ И ПОГЛОЩАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТЯМИ ТЕЛ ДЛЯ ТЕПЛА И СВЕТА [33]

Под тем же названием Кирхгоф опубликовал еще одну статью (Ann. Phys. 1860. Bd. 109. S. 275—301 [29]). Русский перевод ее с сокращениями см. в кн.: *Шёпф Х.—Г.* От Кирхгофа до Планка. М.: Мир. 1981, с. 124—143. Эту работу Кирхгоф переработал и доложил в 1861 г. на заседании Берлинской академии наук. В этой окончательной редакции он опубликовал

---

* Составлены Е. И. Погребысской (к статьям 1, 2, 4—9, 21, 28, 30), М. Г. Шраером (к статьям 3, 11), М. Г. Шраером и Ю. Я. Иосселем (к статье 10), Ю. Я. Иосселем (к статье 12), А. В. Нетушилом (к статьям 14—16), Б. В. Булюбашем (к статьям 17—20), Л. С. Полаком (к статьям 13, 22—27, 29, 31).

Цифры в квадратных скобках обозначают номера работ по библиографии, помещенной в настоящем издании.

ее в собрании трудов (см. [62]). В настоящем издании публикуется перевод последней. Подробный разбор статьи 1860 г. с учетом редакции 1862 г. см. в цитированной выше книге Шёпфа, с. 12—28.

[1] (с. 12). Здесь и далее кинетическая энергия в соответствии с принятой тогда терминологией именуется живой силой.

[2] (с. 13). Речь идет о втором начале термодинамики. Сформулировав его как утверждение: «Теплота не может „сама собой" переходить от более холодного тела к более нагретому», Клаузиус доказал (Ann. Phys. 1850. Bd. 81. S. 168) справедливость теоремы Карно.

[3] (с. 13). Впервые Кирхгоф дает определение абсолютно черного тела в упоминавшейся выше статье 1860 г.

[4] (с. 16). В подынтегральном выражении r стоит в квадрате, так как лучи, исходящие из тела C, попадают снова на него, отразившись от зеркала, они претерпевают двукратное отражение на пластинке P: один раз на пути от S к зеркалу, а второй — на обратном пути к C.

[5] (с. 20). Если восстановить опущенные Кирхгофом выкладки, как это сделано Планком (*Planck M.* Anmerkungen // Kirchhoff G. Abhandlungen über Emission und Absorption. Leipzig, 1898, S 39—40), то окажется, что указанное выражение принимает не минимальное, а максимальное значение. На эту ошибку Кирхгофа первым обратил внимание Р. Клаузиус (Ann. Phys. 1864. Bd. 121. S. 13).

[6] (с. 26). Планк, комментируя это место (см. там же, с. 41), восстанавливает часть выкладок, опущенных Кирхгофом. Следующее выражение для интенсивности соответствует выражению для аналогичного случая (см. с. 21):

$$I' d\lambda \int\int\int\int dx dy dx_1 dy_1.$$

Здесь интегрирование по x и y при постоянных x_1 и y_1 распространяется на все значения этих переменных, которые удовлетворяют установленным в тексте обоим уравнениям, причем x_2 и y_2 изменяются в зависимости от размеров отверстия 2. Если ввести теперь в качестве переменных интегрирования x_2 и y_2 вместо x и y, то получим

$$I' d\lambda \int\int\int\int \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\frac{\partial y}{\partial y_2} - \frac{\partial x}{\partial y_2}\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) dx_2 dy_2 dx_1 dy_1,$$

и тогда

$$\frac{\partial x}{\partial x_2} = -\frac{1}{ns}, \qquad \frac{dy}{dy_2} = -\frac{1}{ns}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y_2} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0,$$

$$I' d\lambda \frac{w_1 w_2}{n^2 s^2}$$

[7] (с. 26). Это соотношение для случая не абсолютно черных тел не выполняется точно, что экспериментально было показано М. Смолуховским (С. r. Acad. sci., 1896. Т. 128. Р. 203), который сравнивал излучение в воздухе и в сернистом углероде.

[8] (с. 27). Дрепер Д. В. (Draper J. W., 1811—1882) — американский химик. Один из пионеров фотографии и ее применения в астрономии. Наиболее известна его работа, упоминаемая в тексте статьи.

[9] (с. 28). Кирхгоф таким образом указал путь технической реализации абсолютно чер ного тела. Эта идея была реализована в конце XIX в. в работах В. Вина, О. Люммера П. Прингсгейма, Ф. Курлбаума. Черное излучение создавалось полостью, как правило,

цилиндрической формы, стенки которой, выполненные из термостойкого материала, равномерно накалялись электрическим током. Чтобы исключить непосредственно от стенок идущее излучение, полость снабжали системой диафрагм.

3
К ТЕОРИИ СВЕТОВЫХ ЛУЧЕЙ [61]

В опубликованной впервые в 1882 г. работе по дифракции Кирхгоф дал математическое доказательство основной идеи теории Гюйгенса—Френеля: световое возмущение в некоторой точке есть результат суперпозиции вторичных волн, испускаемых поверхностью, находящейся между этой точкой и источником света.

[1] (с. 28). Фогт В. (Voigt W., 1850—1919) — немецкий физик. Работы по теории упругости, кристаллофизике, термодинамике, оптике. Автор учебников.

Фрелих И. (Fröhlich J., 1853—1931) — венгерский физик. Работы по физической оптике.

[2] (с. 29). Если обозначить через **A** вектор смещения, то условие $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ означает, что $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$, т. е., что поле **A** не имеет источников и стоков. Поэтому существует вектор **B** такой, что $\operatorname{div}\mathbf{A}=\operatorname{rot}\mathbf{B}$, т. е. $u=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}$, $v=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}$, $w=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$.

[3] (с. 31). Здесь недостаточно предполагать непрерывность лишь $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$; достаточным условием справедливости этого равенства является условие непрерывности $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2}$.

[4] (с. 31). В лекциях по оптике Кирхгоф пишет: «Что функция, удовлетворяющая этим требованиям, действительно существует, легко показать; положим, например, $F(\zeta)=\frac{\mu}{\sqrt{\pi}}e^{-\mu^2\zeta^2}$, где μ означает бесконечно большую положительную постоянную; тогда для каждого конечного значения $\zeta\neq 0$ $F(\zeta)$ исчезающе мала, а для $\zeta=0$ она бесконечно велика как само μ; при этом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=1.\text{»}$$

(Vorlesungen über mathematische Physik. Bd. 2. Mathematische Optik. Leipzig, 1891, S. 24—25).

[5] (с. 32) Здесь по существу Кирхгоф пользуется основным свойством δ-функции: ибо из равенства $\int_{-t'}^{t''} F(at)\,dt=\frac{1}{a}$ делает вывод, что

$$\int_{t'}^{t''} F(at)\,\Phi_0(t)\,dt=\frac{1}{a}\,\Phi_0(0).$$

Вторично этим же свойством он пользуется при рассмотрении интеграла $\frac{1}{a}\int\limits_{-at'}^{at''}\frac{1}{r_0}\frac{\partial\Phi}{\partial N}\times$ $\times F(\zeta)\,d\zeta$ $(\zeta=r_0+at)$, полагая, что он равен $\frac{1}{ar_0}\frac{\partial\Phi}{\partial N}\Big|_{t=-\frac{r_0}{a}}$, т. е. при $\zeta=0$.

[6] (с. 33). В «Основах оптики» (М.: Наука, 1970) М. Борн и Э. Вольф получают формулу, совпадающую с (9) с точностью до обозначений. Но вывод этой формулы основан у них на использовании уравнения Гельмгольца для случая монохроматической волны; в общем случае немонохроматических волн они представляют их в виде интеграла Фурье, т. е. в виде «наложения» монохроматических волн с последующим применением обратного преобразования Фурье.

[7] (с. 33). М. Борн и Э. Вольф в цитированной выше монографии замечают (с. 413), что указанные здесь источники фиктивны: т. е. интерпретация, предложенная Кирхгофом, не имеет глубокого физического смысла.

[8] (с. 35) Предположение непрерывности $F(\zeta)$ в некотором интервале (ζ_0, ζ') недостаточно для заключения о равенстве нулю предела $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta'}\frac{dF}{d\zeta}\sin(k\zeta+\delta)\,d\zeta$; достаточным условием для этого является требование абсолютной интегрируемости производной $\frac{dF}{d\zeta}$ (см. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, стр. 429—430, М.: Наука, 1970). В дальнейших рассуждениях Кирхгоф требует, чтобы $\frac{dF}{d\zeta}$ была непрерывна в (ζ_0, ζ'), а иногда пользуется условием существования производной второго порядка $\frac{d^2F}{d\zeta^2}$.

[9] (с. 36). Во второй лекции упомянутых выше «Vorlesungen» Кирхгоф к этому добавляет, что интегралу (16) $\int G\sin(k\zeta+\delta)\,ds$ равна первая часть интеграла $\int\limits_s \Omega ds$ в (12), если положить

$$G=\frac{1}{r_1r_0}\left(\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial N}-\frac{1}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial N}\right),\qquad \delta=-\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{2}.$$

Вторая часть интеграла $\int \Omega ds$ принимает вид $k\int\limits_{(s)} G\sin(k\zeta+\delta)\,ds$, если положить

$$G=\frac{1}{r_1r_0}\left(\frac{\partial r_1}{\partial N}-\frac{\partial r_0}{\partial N}\right),\qquad \delta=-\frac{t}{T}2\pi.$$

[10] (с. 37). Так как $\zeta=r_1+r_0$, то условие $d\zeta=0$ означает $d(r_1+r_0)=0$, т. е., что

$$\frac{\partial(r_1+r_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial(r_1+r_0)}{\partial y}dy+\frac{\partial(r_1+r_0)}{\partial z}dz=0. \qquad (*)$$

С другой стороны, так как $d\zeta=0$ в некоторой точке (x, y, z) поверхности с уравнением $g(x, y, z)=0$, то в этой точке $dg(x, y, z)=0$, т. е.

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz=0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (*), замечаем, что векторы $\nabla(r_1+r_0)$ и ∇g коллинеарны, т. е. $\nabla(r_1+r_0)=L\nabla g$, что приводит к указанным в тексте соотношениям.

[11] (с. 43) Это утверждение обсуждается Кирхгофом в VIII лекции его «Vorlesungen. . .» (см. выше).

4
О ФРАУНГОФЕРОВЫХ ЛИНИЯХ [20]

Это первая работа Кирхгофа, посвященная изучению спектров. Он ясно сознавал значение установленного им факта обращения спектральных линий. Кирхгоф не был первым, кто наблюдал это явление: в 1849 г. оно было описано Л. Фуко (*Foucault L.* Note sur la lumière de l'arc voltaique // Procès-verbaux Soc. Philomatique. 1849. P. 16—20), но вспомнили об этом только после появления статьи Кирхгофа.

[1] (с. 52). Уже в XVIII в. обратили внимание на желтую линию в спектре пламени свечи. Известный немецкий мастер—оптик Й. Фраунгофер (1787—1826) установил (*Fraunhofer J.* Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermogens verschiedener Glasarten. . . // Ann. Phys. 1817. Bd. 56. S. 264—313), что она состоит из двух близко расположенных линий и совпадает с двойной темной линией в спектре Солнца, которую он обозначил латинской буквой D.

(с. 52). Английский военный инженер Т. Друммонд (1797—1843) предложил для нужд геодезических измерений, а также для маячного освещения использовать раскаленный в пламени горелки кусочек извести в форме цилиндра или шарика диаметром порядка 0,6 мм (*Drummond T.* On the means of facilitating the observation of distant station in geodetical operations // Phil. Trans. 1826. Vol. 116, part III. P. 324—327; On the illimination of lighthouses // Ibid. 1830. Vol. 120. P. 383—398). «Друммондов свет» в XIX в. широко использовался в лабораторной практике.

[3] (с. 53). Это доказал В. Сван (*Swan W.* On the prismatics spectra of the flames of the compounds of carbon and hydrogen // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1857. Vol. 21. P. 411—430.

[4] (с. 53). См. *Brewster D.* On luminous lines in certain flames corresponding to the defective lines in the sun's light // Report 11th meeting Brit. Ass. edvanced. sci., 1842, part 2. P. 15—16.

5
ХИМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСРЕДСТВОМ НАБЛЮДЕНИЙ СПЕКТРОВ. I [27]

Это первая из двух статей под таким названием, написанная Кирхгофом в соавторстве с Р. Бунзеном. Обе они стали классическими. Всего же у них четыре совместные публикации и все они посвящены одной теме — обоснованию нового, спектрального, метода анализа, доказательству надежности и определенности результатов, получаемых этим методом, а также описанию новых приборов для спектрального анализа — спектроскопов.

Достаточно просто оценить вклад каждого из авторов в исследование, если вспомнить, что Бунзен (первоклассный химик — аналитик) принимал участие и в спектральных наблюдениях. Более того, Бунзен являлся инициатором этой работы.

К тому времени были уже известны четыре способа возбуждения спектра — пламя горелки (их было несколько типов), дуга, искра и трубка Гейслера. Первые три, особенно дуга и искра, применяются до наших дней. Бунзен и Кирхгоф выбрали бунзеновскую горелку, что отчасти определило их успех.

Образец вносили в пламя в виде твердого шарика на платиновой проволочке. Авторы видели недостатки такого способа — появление сплошного спектра, всегда возникающего при нагреве твердых тел, а также невозможность проводить длительные наблюдения. Преимуществом же было то, что образец можно было внести в самую «горячую» часть пламени.

Точность определения положений спектральных линий сравнительно невысока. Так, дублет натрия (λ_1=5995,923 Å и λ_2=5989,953) в этой серии опытов казался одной линией (хотя уже с работ Фраунгофера было известно, что D-линия натрия двойная). Более грубая ошибка была допущена при анализе спектра калия. Кирхгоф утверждал (см. с. 61 наст. издания), что линия Kα точно совпадает с фраунгоферовой линией A (длина волны Kα 76649 Å, A — 7621 Å). Впоследствии (см. статью 8 наст. издания) Кирхгоф эту ошибку исправил.

Однако не эти частности определяют значение работы. Удачный выбор объектов анализа (сравнительно невысокой температуры пламени бунзеновской горелки было достаточно для диссоциации солей щелочных и щелочноземельных металлов и возбуждения атомов металлов), стабильность источника возбуждения спектра, использование максимально чистых соединений и как следствие — воспроизводимость результатов — все это привело к тому, что с данной работы начинают историю спектрального анализа.

В настоящем издании сохранены принятые авторами обозначения спектральных линий и химических элементов.

[1] (с. 53) Газовая горелка (горелка Бунзена) широко применялась в XIX в. при спектральном анализе. Первым для этой цели ее использовал В. Сван в работе, на немецкий перевод которой ссылаются Кирхгоф и Бунзен на с. 58 наст. издания (см. также примеч. 3 к статье 4 наст. издания).

[2] (с. 56). В своей книге Бунзен дает следующее пояснение. «За единицу тепла (калорию) принято количество тепла, необходимое, чтобы повысить температуру от 0° до 1° единицы веса воды. Таким образом, число 2240, которое представляет теплоту горения серы, означает, что при переходе в процессе горения 1 части веса серы в двуокись серы выделяемого количества тепла достаточно, чтобы повысить температуру от 0° до 1° 2240 частей веса воды, или что то же самое, повысить от 0° до 2240° температуру одной единицы веса воды, в предположении, что удельная теплота этой жидкости одинакова при всех температурах и равна той, какую она имеет при 0° (испарения нет)» (*Bunsen R.* Méthodes gasometriques. Paris, 1858. P. 256).

Последнее предположение отчасти объясняет, почему приводимые далее в статье оценки температуры пламени завышены.

[3] (с. 56). Реньо А. В. (Regnault H. V., 1810—1878) — французский физик и химик, член Парижской АН (1840), Петербургской АН (1848).

Работы по молекулярной физике, теплоте, термоэлектричеству. С высокой точностью измерил физические постоянные газов, жидкостей, твердых тел. Сконструировал термометр, гигрометр, пирометр. На результаты Реньо опирался Кирхгоф в ряде других своих работ (см., например, статью 26 наст. издания).

[4] (с. 58). Сван В. (Swan W., 1818—18?) шотландский физик, член Эдинбургского Королевского общества (1856), много и плодотворно работавший в области оптики.

[5] (с. 58). Эта оценка завышена; как показали Е. Фишер и Ф. Пенцольдт (Liebig's Ann., 1887. Bd. 238. S. 135), глаз обнаруживает 1/300 000 миллиграмма поваренной соли.

[6] (с. 61). В настоящем издании сохранено принятое авторами обозначение элемента калия.

[7] (с. 61). Первое указание о влиянии на интенсивность линий анализируемого элемента присутствия в пробе других соединений.

[8] (с. 63). Ср. с предыдущим примечанием.

[9] (с. 64). Если опустить несколько капель жидкости на горизонтальную поверхность твердого тела, нагретого до температуры, значительно превышающей температуру кипения жидкости, то последняя, не закипая, принимает форму сплюснутого шара или сфероида. Это явление известно давно. Впервые подробно изучено Г. Лейденфростом (Leidenfrost G., 1715—1794) в 1756 г. Обстоятельное исследование этого явления принадлежит Н. А. Гезехусу (ЖРФХО, 1876. Т. 8. С. 310). Занимались им многие другие и позднее.

[10] (с. 67). В оригинале — Baritharmotom.

[11] (с. 68). Имеется в виду положение линии в спектре (т. е. длина волны), а не ее интенсивность.

[12] (с. 68). Речь идет о новых элементах — рубидии и цезии, открытых Бунзеном в совместной с Кирхгофом серии экспериментов (см. статью 6 наст. издания).

[13] (с. 69). Об этом уже говорил Кирхгоф в статье «О фраунгоферовых линиях».

[14] (с. 69). См. примеч. 2 к статье 4 наст. издания.

6
ХИМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОСРЕДСТВОМ НАБЛЮДЕНИЙ СПЕКТРОВ. II [27]

Это вторая из двух знаменитых статей Кирхгофа и Бунзена. Статья, в основном, химическая и ее автор в значительно большей степени Бунзен, чем Кирхгоф. Открытие двух новых элементов — рубидия и цезия — также заслуга Бунзена. Видимо, поэтому Кирхгоф не включил эту статью в собрание своих трудов.

Новые элементы были открыты, но получены только в виде соединений. Металлический рубидий выделил Бунзен электролизом хлорида рубидия в 1863 г. (Ann. Chem. und Pharm. 1863. Bd. 125. S. 367). Металлический цезий получил в 1882 г. шведский химик К. Сеттерберг при электролизе расплава смеси цианидов цезия и бария (Ann. chim. 1882. Т. 211. P. 100—116). Особенности свойств цезия — легкая окисляемость и возгораемость на воздухе — объясняют, почему он мог быть обнаружен только при спектральном анализе.

В заключение авторы высказывают твердое убеждение в том, что спектры солей щелочных и щелочноземельных металлов вызваны светящимися парами свободных металлов. Оно обосновано на тщательнейшем сопоставлении поведения различных соединений исследованных ими металлов в пламени и искре с изменениями в их спектрах (см., например, с. 63—64 наст. издания). Но чтобы доказать это утверждение, понадобилось свыше пятидесяти лет.

Статья печатается с сокращениями. При переводе опущены разделы: 2 (кроме первого параграфа), 3 (Размещение, получение и атомный вес соединений цезия), 4 (Металлический цезий и некоторые его соединения). Они написаны Бунзеном.

При переводе химической терминологии (она еще в то время не установилась) следовали за оригиналом, за исключением тех случаев, когда это затрудняло понимание текста.

[1] (с. 74). Современное значение атомной массы рубидия — 85,4678.

[2] (с. 74). При переводе этот раздел опущен.

[3] (с. 76). Если спектроскоп, описанный в предыдущей статье, ничем принципиально не отличался от прибора В. Свана (см., примеч. 3 к статье 4), то в новом применено устройство для проектирования на спектр шкалы с произвольно нанесенными на нее делениями. Таким

образом, стала осуществимой основная цель анализа спектров в то время — ориентировка в спектре и отождествление линий. Вопрос об измерении длин волн тогда даже не ставился, и это понятно, поскольку речь шла исключительно о решении вопроса о химическом составе тел.

7
СОЛНЕЧНЫЙ СПЕКТР [30]

В предисловии к отдельному изданию своей работы (см. [30]) Кирхгоф писал: «Следующая статья (т. е. «Солнечный спектр» — *Е. П.*) прочитана 11 июля 1861 г. г-ном Магнусом в Берлинской Академии наук и впервые опубликована в Докладах физического класса этой Академии за 1861 г. В почти неизменной форме я представляю ее здесь широкой публике. Одна из целей доклада — указать путь, следуя которому можно определить химические свойства частиц Солнца, именно его атмосферы, и доказать присутствие там земных элементов. Теоретическим основанием химического анализа солнечной атмосферы служит утверждение, доказанное мной в 109 томе Poggendorff's Annalen за 1860 г. (см. [29] — *Е. П.*). Вероятно, многие уже догадывались о существовании подобного утверждения; особенно близко подошли к нему Ангстрем и Бальфур Стюарт; однако оно не было высказано четко, еще менее — строго доказано. Как приложение я добавил небольшое сочинение (см. [33]) [с найденным мною доказательством этого утверждения; и благодаря большой тщательности я нашел способ устранить трудности, которые, по сути самого предмета, мешали его пониманию.

Гейдельберг, февраль 1862».

Утверждение, о котором говорит Кирхгоф, это закон теплового излучения, доказанный им в виде следующего положения: «Для лучей одной и той же длины волны при одинаковой температуре отношение испускательной способности к поглощательной для всех тел одно и то же» (с. 9 наст. издания).

Хотя в XX в. стала ясной недостаточность термодинамических соображений для объяснения механизма излучения и поглощения света, значение этого исследования Кирхгофа важно не только для термодинамики излучения, где оно полностью сохранило свое значение; до работы Н. Бора 1913 г. закон Кирхгофа являлся единственным теоретическим обоснованием (принимаемым конечно, с определенными оговорками) спектрального анализа.

Начиная новую область — астрофизику—Кирхгоф мог опереться только на свои работы и на проведенные совместно с Р. Бунзеном исследования (см. статьи 1, 2, 4—6 наст. издания). Тем удивительнее сделанное им в статье «Солнечный спектр». Как видно даже из фрагмента рисунка спектра Солнца, приведенного в настоящем издании, Кирхгофу удалось отождествить многие темные (фраунгоферовы) линии со спектральными линиями, принадлежащими отдельным химическим элементам. Он также рассчитал вероятность того, что совпадение линий железа с соответствующими фраунгоферовыми линиями есть дело случая (см. с. 92—93 наст. издания). Отметим попутно, что по современным данным на Солнце представлены все химические элементы (кроме трансурановых), что и на Земле, и в том же соотношении, за исключением водорода и гелия.

Одна из целей этой работы — создание атласа спектра Солнца. Положение линий определялось в относительной шкале. Но точность этих измерений была столь высока, что атласом Кирхгофа продолжали пользоваться до конца XIX в., что вызвало многочисленные попытки перевести произвольную шкалу Кирхгофа в длины волн. (Обзор этих работ см.: *Hartmann J.* Ueber die Scale des Kirchhoffschen Sonnenspectrum // Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin. 1898. S. 742—756).

Что же касается представлений Кирхгофа о строении Солнца, о характере процессов, протекающих на нем, то они остались в прошлом. Он поддерживал идею твердого раскаленного Солнца, окруженного атмосферой, находящейся при более низкой температуре. Но уже в 1872 г. итальянский астроном А. Секки и французский астроном и метеоролог О. Фай выдвинули гипотезу полностью газового Солнца, а непрерывный его спектр объяснили огромным сжатием газа в светящемся теле Солнца.

Открытие Кирхгофом земных элементов на Солнце повлияли на решение многих его современников заняться астрофизикой. Среди них был и французский астроном П. Ж. С. Жансен (1824—1907). В 1885 г. Парижская академия наук учредила медаль, а Французское астрономическое общество — премию его имени. По положению премия (с вручением медали) присуждается один раз в три года ученому (исключая членов Парижской АН) — автору труда или открытия, способствующих прогрессу астрофизики. И первым премией был отмечен (посмертно) Кирхгоф.

[1] (с. 81). Указанная работа Д. Брюстера и Дж. Х. Гладстона, выполненная почти одновременно с исследованием Кирхгофа «О фраунгоферовых линиях», ставила целью проверить идею, высказанную в 1836 г. Д. Форбсом о том, что темные линии в солнечном спектре не вызваны поглощением. Вывод двух авторов — вопрос о происхождении фраунгоферовых линий все еще остается открытым.

[2] (с. 82). Кирхгоф проводил измерения в парижских дюймах и парижских линиях: 1 дюйм=27,07 мм, 1 линия=1/12 дюйма=2,25 мм.

[3] (с. 84). Приводимые в настоящем издании фрагменты таблиц I, II напечатаны в черно-белом варианте.

[4] (с. 84). Речь идет о работе Брюстера «Observations on the solar spectrum and on those produced by the earth's atmosphere, and by action of nitrons acid gas // Trans. Roy. Soc. Edinburgh. 1834. Vol. 12. P. 519—530. Обнаруженные им линии получили название теллурических (Жансен, 1862). Предложенное Кирхгофом их наименование — атмосферные (см. с. 104 наст. издания) не привилось.

[5] (с. 86). Ф. С. М. Ван дер Виллиген (Willigen V. S. M. van der, 1822—1878), наиболее крупный голландский физик 1840—1850 гг., опубликовал в Annalen der Physik (1859. Bd 106. S. 610—632) сжатое изложение своих более ранних исследований.

[6] (с. 87). Плюккер Ю. (Plücker J., 1801—1868) — немецкий математик и физик. Основные работы по физике посвящены изучению электрического разряда в газах, а также изучению спектров. Открыл катодные лучи (1859). Работы, на которые ссылается Кирхгоф, выполнены в 1861 г.

[7] (с. 88). См. статью 2 наст. издания.

[8] (с. 91). Роско Г. Э. (Roscoe H. E. 1833—1915) — английский химик и общественный деятель, член Лондонского Королевского общества (1863). Основные работы его по фотохимии, по анализу неорганических соединений. Установил (1862 г.) совместно с Р. Бунзеном) закон: количество продукта фотохимической реакции определяется общей энергией излучения, падающего на реакционную систему (закон Бунзена—Роско).

[9] (с. 94). Маттиссен А. (Mathiessen A., 1831—1870) — английский химик, член Лондонского Королевского общества. Работы по термоэлектричеству, электропроводности металлов, по определению химического строения веществ.

[10] (с. 95). Форбс Дж. Д. (Forbes J. D., 1809—1868) — шотландский физик, геолог. Член Лондонского Королевского общества (1832), один из основателей Британской ассоциации содействия прогрессу науки. Обнаружил поляризацию теплового излучения (1834).

[11] (с. 100). Секки А. (Secchi A., 1818—1878) — итальянский астроном, один из пионеров астроспектроскопии. Член Парижской АН (1857), иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1877). Изучал явления на поверхности Солнца, исследовал спектры Солнца, звезд, планет и комет, использовав для этих целей фотографию; предложил классификацию звездных спектров.

8
ИССЛЕДОВАНИЯ СОЛНЕЧНОГО СПЕКТРА И СПЕКТРОВ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ [30]

Работа является продолжением статьи «Солнечный спектр».

9
К ИСТОРИИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА И АНАЛИЗА СОЛНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЫ [38]

Появление статьи вызвано достаточно многочисленными попытками, особенно в английской научной литературе, преуменьшить роль Бунзена и Кирхгофа в создании качественного спектрального анализа, а также в установлении последним закона теплового излучения (закона Кирхгофа) и обоснования, таким образом, возможности определять химический состав небесных тел по их спектрам.

Кирхгоф объективен в оценке сделанного предшественниками. Говорит он и о своих результатах. Мы же напомним вкратце ход его (и Бунзена) исследований, по этому вопросу.

В первой публикации Кирхгофа по анализу спектров (см. статью 4) он объясняет происхождение фраунгоферовых линий поглощением света в атмосфере Солнца. Эту работу Кирхгоф представил в октябре 1859 г. И тогда же он выступил с докладом «О солнечном спектре» в Гейдельберге в Обществе естественной истории и медицины. Все, что в статье изложено сжато, в докладе представлено подробнее. Интересно, что Кирхгоф отмечает как удачу то, что ему удалось наблюдать такое же явление обращения и на примере красной линии лития. Последнее наблюдение имело для Кирхгофа большое значение — оно показало неслучайность этого являения, его закономерность.

Эти наблюдения позволили Кирхгофу сделать вывод о присутствии в атмосфере Солнца натрия и отсутствии (или нахождении в чрезвычайно малом количестве) лития. С этой работой начинается изучение химии Солнца. Тут же Кирхгоф намечает план дальнейших исследований, осуществленных совместно с Бунзеном, который и привел их к установлению «химического анализа посредством наблюдений спектров».

О том, как проходила работа с октября 1859 г. по апрель 1860 г. (время представления первой совместной работы Кирхгофа и Бунзена), можно судить по письму Бунзена своему многолетнему ассистенту, впоследствии известному английскому химику Г. Роско. 15 ноября 1859 г. Бунзен писал: «Сейчас я занят вместе с Кирхгофом работой, за которой мы проводим бессонные ночи. Кирхгоф сделал блестящее, совершенно неожиданное открытие: он нашел причину темных линий солнечного спектра; он сумел эти линии искусственно усилить и вызвать им подобные на непрерывном спектре пламени при полном совпадении с фраунгоферовыми. Таким образом, намечен путь, следуя которому можно будет узнать вещественный состав Солнца и неподвижных звезд с такой же определенностью, с какой мы можем обнаружить нашими реактивами присутствие сернистого ангидрида и хлора». (*Егоров Н. Г.* Пятьдесят лет спектрального анализа. М.: 1912, с. 1).

В связи с наблюдением «обращения» линий Кирхгоф в декабре 1859 г. выполнил работу «О взаимосвязи между излучением и поглощением света и тепла». Важность теоретического обоснования спектрального анализа для признания его было особенно подчеркнута Л. Фуко, который не сделал никакой попытки умалить достижения Кирхгофа (*Foucault L.* De l'analyse prismatique et de la composition de l'atmosphère solaire // Cosmos. 1861. T. 19. P. 138, 139).

Не менее существенной являлась экспериментальная сторона спектральных исследований. Она имела два аспекта, одного из них коснулся Кирхгоф в статье «К истории спектрального анализа. . .». Он подчеркнул различие между их с Бунзеном подходом к задаче определения химического состава тел и подходом остальных исследователей, в частности, В. Свана. Кирхгоф справедливо указал на то, что лишь они с Бунзеном представляли задачу создания нового метода анализа во всей ее полноте, что, в свою очередь, определило и выбор объектов исследования, и методику работы.

Но Кирхгоф вовсе не говорил о проблемах, связанных с техникой эксперимента, в частности, о спектральных приборах. Поэтому кратко остановимся на этом вопросе. Уже почти современным спектроскопом пользовался Сван. Его прибор состоял из коллиматора (он первый применил его в спектральной установке), призмы, установленной на столике теодолита, зрительной трубы, и все это он, опять-таки впервые, поместил в ящик, что позволило сделать менее жесткими требования, предъявляемые к затемнению комнаты, в которой велись спектральные наблюдения. Начиная именно с прибора Свана, Кирхгоф далее усовершенствовал спектроскоп, доведя его до уровня, оставшегося непревзойденным в течение всего XIX в. (см. статьи 6, 7 наст. издания и комментарий к ним).

[1] (с. 105). Миллер В. А. (Miller W. A., 1817—1870) — английский химик, член Лондонского Королевского общества. Работы по химии и анализу спектров.

[2] (с. 107). Массон А. (Masson A., 1806—1860) — французский физик. Первым описал и зарисовал «электрические» спектры железа, меди, висмута и других металлов (1845—1855 гг.).

[3] (с. 107). Депре С. (Despretz C., 1792—1863) — французский физик и химик. Основные работы посвящены изучению свойств газов, распространению тепла в различных средах, прохождению тока через электролиты.

[4] (с. 111) Стюарт В. (Stewart B., 1828—1887) — шотландский физик, член Лондонского Королевского общества (1862). Работы по спектральному анализу, термодинамике излучения, метеорологии.

10
О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА ДВУХ ПРОВОДЯЩИХ ШАРАХ [31]

Данному вопросу посвящены две работы Кирхгофа (см. также статью 11 настоящего издания). Их разделяют по времени появления 24 года.

Первый, кто занимался задачей о распределении заряда на двух проводящих сферах, был Пуассон. В двух своих работах (*Poisson S. D.* // Mém. l'Institut. Classe sci. math. et phys. 1811. P. 1—92; 163—274) он привел рассматриваемую задачу к функциональному уравнению

$$f(x)-\frac{ab}{c^2-b^2-cx}\,f\left[\frac{a^2(c-x)}{c^2-b^2-cx}\right]=C_1-C_2\,\frac{b}{c-x}$$

относительно потенциала $f(x)$ поля, создаваемого зарядом, расположенном на первом шаре, в точках линии центров данных шаров (x — расстояние рассматриваемой точки линии центров от центра первого шара, a и b — радиусы этих шаров, c — расстояние между их центрами, C_1 и C_2 — потенциалы данных шаров). Решение этого уравнения Пуассон искал в виде рядов по шаровым функциям.

Дальнейшее развитие метода Пуассона мы находим в работе итальянского математика Дж. Плана (*Plana G.* // Mem. Accad. sci. Torino. 1845. Ser. II. T. 7. P. 71—401) и В. Томсона (*Thomson W.* Phil. Mag. Ser. 4. 1853. Vol. 5. P. 287—297), который решал рассматриваемую задачу с помощью открытого им метода электрических изображений, используя так называемый метод последовательных наведений Морфи («Elementary principles on the theories of electricity, heat and molecular action», Cambridge, 1833). Указанный метод Томсона сводится к последовательному многократному отражению фиктивных зарядов, располагаемых в центре каждой из сфер, относительно эквипотенциальных сферических поверхностей. Особенности его применения к решению данной залачи (в том числе и с использованием аппарата цепных дробей) подробно рассмотрены в ряде современных работ (см., например, *Миролюбов Н. Н.* и др. Методы расчета электростатических полей. М.: Высш. школа, 1963).

Полученные Кирхгофом выражения для плотности заряда на поверхности шаров позволили в дальнейшем непосредственно найти решение одной из классических задач теоретической электротехники — о расчете емкости между сферическими проводниками. Систематизированные данные и формулы для расчета этого параметра приведены, например, в справочной книге *Ю. Я. Иосселя, Э. С. Кочанова* и *М. Г. Струнского.* Расчет электрической емкости. Л.: Энергоатомиздат, 1981, 288 с.

Следует иметь в виду, что в этой и следующей статьях Кирхгофа опущено большое число промежуточных преобразований, порой довольно громоздких.

[1] (с. 117). В оригинале вместо равенства, записанного в указанной строке, стоит

$$f(x)+\frac{b}{c-x}F\left(\frac{c-x}{b^2}\right)=h.$$

Дальнейшие выкладки соответствуют равенству, указанному в переводе.

[2] (с. 120). $K=K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ — полный нормальный эллиптический интеграл 1 рода; параметр k называется модулем, $k'=\sqrt{1-k^2}$ — дополнительным модулем. $K'=K'(k)$ определяется равенством $K'(k)=K(k')$ и называется связанным эллиптическим интегралом 1 рода.

[3] (с. 120). Переход от ряда (11) к ряду (13) формально может быть осуществлен так:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Aa^m}{1-a^mA}=\sum_{m=1}^{\infty}Aa^m\sum_{n=0}^{\infty}(a^mA)^n=\sum_{n=0}^{\infty}A^{n+1}\sum_{m=1}^{\infty}(a^{n+1})^m=\sum_{n=0}^{\infty}A^{n+1}\frac{a^{n+1}}{1-a^{n+1}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(Aa)^m}{1-a^m}.$$

На деле указанные преобразования законны при $|A|\leqslant 1$ и $|a|<1$, что выполняется в случае рядов (11) и (13).

То, что ряд (13) сходится при $\operatorname{Re} u > -K'$, может быть обосновано следующим образом: положим $t = e^{-2\pi u/K}$; тогда ряд (13) примет вид

$$F(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} t^m.$$

Его радиус сходимости может быть найден по формуле

$$R = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{q^{2m}}{1 - q^{2m}} \cdot \frac{1 - q^{2m+2}}{q^{2m+2}} \right| = \frac{1}{q^2}.$$

Таким образом, этот ряд сходится, если $|t| < \frac{1}{q^2}$, т. е. при $|e^{-2u\pi/K}| < \frac{1}{q^2}$. Но, как известно, $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, поэтому для $0 < q < 1$ должно быть $e^{-\frac{\pi}{K}\operatorname{Re} u} < \frac{1}{q}$, а значит $-\frac{\pi}{K}\operatorname{Re} u < -\ln q$, откуда $\operatorname{Re} u > \frac{K \ln q}{\pi} - K'$, так как $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$.

[4] (с. 122). Якобиева функция $Z(u)$ может быть задана рядом

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m-1} \sin \frac{\pi u}{K}}{1 - q^{2m-1} \cos \frac{\pi u}{K} + q^{4m-2}};$$

разлагая выражение, стоящее здесь под знаком суммы, в ряд Фурье, преобразуем этот ряд к виду

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1 - q^{2m}} \sin \frac{2\pi u}{K}.$$

В промежуточных преобразованиях Кирхгоф пользуется и этим разложением.

[5] (с. 122). $E = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$ — полный нормальный эллиптический интеграл 2 рода.

[6] (с. 122). $\Delta \operatorname{am} u$ — функция от u, введенная Якоби и называемая «дельтой амплитуды u». Современное обозначение этой функции $\operatorname{dn} u$.

[7] (с. 124). Это равенство получено логарифмированием произведения, которое предварительно преобразуется следующим образом:

$$\frac{\prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=1}^{N} \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} \prod_{\mu=1}^{M} \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)} = \frac{\prod_{\mu=1}^{m} \prod_{\nu=n+1}^{N} \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} \prod_{\mu=m+1}^{M} \left(1 + \frac{u}{K'\mu + iK\nu}\right)}.$$

[8] (с. 125). Точнее, $\Gamma(a)$ может быть задана равенством

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^2}{a(a-1)\ldots(a+n-1)}$$

[9] (с. 125). Равенство (24) надо понимать так:

$$\ln\Gamma(1+a)=\lim_{n\to\infty}\left\{a+\ln h+\sum_{n=1}^{h}\ln n-\sum_{n=1}^{h}\ln(a+n)\right\}.$$

[10] (с. 126). Равенство основано на соотношении

$$\Gamma(1+a)=a\Gamma(a),$$

вытекающем из определения Г-функции.

[11] (с. 126). Здесь и к формуле (28) нужны уточнения, аналогичные тем, которые указаны в примеч. 7 и 8.

[12] (с. 128). Множитель $Ne^{-iu/K}$, стоящий в выражении, записанном в этой строке, на деле должен быть заменен на множитель

$$e^{(-iu/K)\cdot\ln N}=N^{-iu/K};$$

в дальнейших выкладках этот множитель сокращается, так что указанная ошибка не оказывает влияния на последующие результаты.

11
К ТЕОРИИ РАВНОВЕСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА НА ДВУХ ПРОВОДЯЩИХ ШАРАХ [67]

Это вторая работа Кирхгофа, посвященная распределению заряда на двух проводящих сферах. Первая его работа (см. статью 10 настоящего издания) была опубликована в 1861 году и в ней, в отличие от данной работы, искомые функции раскладываются в ряды с использованием эллиптических функций Якоби $Z(u)$.

[1] (с. 134). Так как $q^2+\frac{1}{q^2}\geqslant 2$, причем равенство достигается при $q=1$, то $\frac{c^2-a^2-b^2}{ab}\geqslant 2$, откуда $c\geqslant a+b$. Таким образом, чем c больше суммы $a+b$, тем q меньше 1.

[2] (с. 135). Эту формулу можно получить, представляя члены ряда R, начиная со второго, в виде сумм геометрических прогрессий с последующей группировкой членов полученных таким образом рядов. Однако можно указать более простой, хотя и искусственный прием получения нужного результата:

$$R=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta^2}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\beta^3}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots=\frac{1}{1-\alpha}+\beta+\left(\frac{\beta}{1-\alpha\gamma}-\beta\right)+\beta^2+$$
$$+\left(-\beta^2+\frac{\beta^2}{1-\alpha\gamma^2}\right)+\beta^2+\left(\frac{\beta^3}{1-\alpha\gamma^3}-\beta^3\right)+\ldots=\frac{1}{1-\alpha}+\left(\beta+\beta^2+\beta^4+\ldots\right)+$$
$$+\frac{\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\gamma}+\frac{\alpha\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\alpha\beta^3\gamma^3}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots=\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\beta}{1-\beta}+\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta\gamma}{1-\alpha\gamma^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots\right)=\frac{1-\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\alpha\beta\gamma\left(\frac{1}{1-\alpha\gamma}+\frac{\beta\gamma}{1-\alpha\gamma^2}+\frac{\beta^2\gamma^2}{1-\alpha\gamma^3}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1-\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}+\alpha\beta\gamma R_1.$$

12
К ТЕОРИИ КОНДЕНСАТОРА [52]

Эта статья, впервые опубликованная в 1877 г. (Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. 1877. S. 144—162) — одна из первых фундаментальных работ в области теоретической электростатики. Идея Кирхгофа применить для решения осесимметричной задачи аппарат конформных преобразований весьма оригинальна, хотя и базировалась на интуитивном представлении о близости распределения зарядов в периферийных зонах круглых и бесконечно длинных пластин. Идея оказалась настолько плодотворной, что полученные Кирхгофом формулы до сих пор широко используются при расчете конденсаторов указанного вида.

Следует отметить также, что сама задача о поле и емкости конденсатора с круглыми пластинами явилась не только одной из классических задач электростатики, но и приобрела в дальнейшем существенное практическое значение в различных разделах прикладной теории потенциала. Отметим, что на аналогию этой задачи с некоторыми актуальными проблемами гидродинамики вязких жидкостей указывал еще Максвелл (Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1866. Vol. 156. P. 249—268). За прошедшее столетие решению указанной задачи было посвящено значительное число работ (см., например, Расчет емкости элементов электротехнических аппаратов и устройств. Серия 04. Конденсаторы, конденсаторные установки. Вып. I. М.: Информэлектро. 1985. С. 53—60.).

Прикладные аспекты исследований, так или иначе базирующихся на фундаментальной статье Кирхгофа, также отражены в целом ряде публикаций (см., например, Нагрев диэлектриков и полупроводников. М.—Л.: Госэнергоиздат. 1959. С. 139).

[1] (с. 140). Т. е. заряд.

13
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОТЕНЦИАЛА, ПРИНИМАЮЩЕГО НА ГРАНИЦЕ РАССМАТРИВАЕМОЙ ОБЛАСТИ ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ЭТА ГРАНИЦА ВСЮДУ ВЫПУКЛА [68]

Статья написана, по-видимому, во второй половине 1870-х годов, так как работа К. Неймана, на которую ссылается С. В. Ковалевская, опубликована в 1877 г. Подробнее о проблематике статьи Кирхгофа см. с. 374—378 наст. издания.

14
О ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА ЧЕРЕЗ ПЛОСКУЮ ПЛАСТИНКУ, НАПРИМЕР, КРУГЛОЙ ФОРМЫ [1]

В этой статье Кирхгоф впервые в истории науки предложил моделировать электрические поля с помощью проводящих сред, что получило дальнейшее развитие в методах электропроводящей бумаги и электролитической ванны. Применение этих методов вышло далеко за рамки электротехники (например, метод электрогидродинамической аналогии ЭГДА).

В Примечании к статье доказывается теорема, в которой формулируются I и II законы Кирхгофа. Они являются основой теории цепей подобно тому, как уравнения Максвелла являются основой теории поля.

[1] (с. 155). Применение Кирхгофом термина принцип, а не закон Ома отнюдь не случайно. Работы Ома (см. примеч. 1 к статье 17) ознаменовали действительно принципиально новый подход к изучению электрических явлений. При установлении первых количественных законов в области электричества Кулон и Ампер имели дело с измерением сил и геометрических параметров, а заряд и ток не измерялись, т. е. эксперимент не выходил за рамки механики и лишь в дальнейшем установленные ими законы послужили основанием для введения единиц измерения этих величин. Ом же работал с тремя собственно электрическими величинами и вдобавок нарушил господствовавшую тогда в Германии натурфилософскую традицию качественного подхода к изучению явлений природы.

[2] (с. 155). Здесь и далее Кирхгоф пользуется термином не потенциал, а напряжение.

[3] (с. 158). Здесь и далее Кирхгоф обозначает натуральный логарифм как log.

[4] (с. 159). При изолированной границе пластины это условие всегда выполняется (см. также сноску 1 настоящей статьи).

[5] (с. 159). Речь идет о семействе аполлониевых окружностей, являющихся координатными линиями в системе биполярных координат на плоскости.

[6] (с. 160). Кирхгоф неудачно обозначает одной и той же буквой C правую часть этого уравнения и центр окружности (см. рис. 2).

[7] (с. 162). Далее описан эксперимент, являющийся первым примером моделирования потенциального плоскопараллельного поля в проводящей среде.

[8] (с. 162). Мультипликатор представлял собой нульиндикатор, состоящий из многовитковой катушки и магнитной стрелки. Концы катушки подсоединялись к ртутным контактам, к которым подключались провода внешней цепи. Термин мультипликатор применялся в современной Кирхгофу немецкой физической литературе, в частности В. Вебером (см., например, *Дорфман Я. Г.* Всемирная история физики с начала XIX до середины XX вв. М.: Наука, 1979, с. 41 и сл.

[9] (с. 165). Две части теоремы представляют собой достаточно общую формулировку первого и второго законов Кирхгофа, применимых как для линейных, так и для нелинейных электрических цепей и распространенных на магнитные цепи. В литературе иногда законы Кирхгофа называются правилами. Год опубликования статьи (1845) следует считать годом открытия этих законов. Обоснование законов Кирхгофа приведено в книге И. Е. Тамма (Основы теории электричества, § 37. М.: Наука, 1976).

15
ДОПОЛНЕНИЕ К ПРЕДЫДУЩЕЙ ЗАМЕТКЕ [1]

Описанный здесь эксперимент представляет собой измерение электрического поля, вызывающего токи в пластине, по отклонению магнитной стрелки, находящейся в непосредственной близости от пластины. Поскольку касательная составляющая напряженности магнитного поля на поверхности пластины ортогональна вектору плотности тока, то по положению магнитной стрелки можно определить направление линий равного потенциала.

Данный метод дает возможность найти картину поля токов в пластине с помощью измерения положения магнитной стрелки, помещенной на поверхности пластины. Дальнейшим развитием описанного метода является измерение токов в линии передач с помощью датчиков Холла, измеряющих магнитное поле токов (см., например, *Меерович Э. А., Назаров Л. А.*,

Карабаев Г. Х., Кокуркин Б. П. Измерение токов линий высшего напряжения по магнитному полю. // Электричество. 1980. № 7. С. 32—40.). Приведенные данные недостаточны для воспроизведения поставленного Кирхгофом эксперимента.

16
О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, К КОТОРЫМ ПРИВОДИТ ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ТОКОВ [2]

В статье анализируются различные решения системы линейных уравнений, составленных для цепей, удовлетворяющих закону Ома, при последовательном исключении отдельных ветвей. Уравнение составлены в соответствии с теоремой, изложенной в Примечании к статье 1845 г. (см. с. 164 наст. издания).

Анализ решений приводит автора к обобщениям, послужившим основой для теории графов. В частности, представляет интерес применение теоремы Кирхгофа при анализе моделей решетчатого газа в виде мономер-димерных смесей (см. *Приезжев В. Б.* Задача о димерах и теорема Кирхгофа // УФН. 1985. Т. 147. Вып. 4. С. 747).

Попутно Кирхгоф доказывает принцип взаимности, справедливый для одного класса линейных цепей.

[1] (с. 170). Здесь и во всем дальнейшем изложении Кирхгоф исходит из приведенной им в статье 1845 г. (см. статью 14 наст. издания) теоремы, в которой сформулированы два известных закона Кирхгофа. При этом первый закон приведен вторым, а второй закон — первым. В связи с этим возникла некоторая путаница в литературе, где встречается различная последовательность изложения законов, и год, когда они были сформулированы Кирхгофом, называется не 1845, а 1847.

[2] (с. 171). Доказываемая здесь для линейных электрических цепей теорема, получившая дальнейшее развитие в теории графов, применяется сейчас в областях, весьма далеких от электротехники.

[3] (с. 177). Т. е. принцип взаимности.

17
О ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛ ДЛЯ СИЛЫ ГАЛЬВАНИЧЕСКОГО ТОКА В СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКОВ К СИСТЕМЕ, ЧАСТИЧНО СОСТОЯЩЕЙ ИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОВОДНИКОВ [4]

В этой работе, опубликованной в 1848 г., Кирхгоф доказал для наиболее общего случая проводников конечного сечения полученные им в 1845—1847 годах уравнения (см. статьи 14—16 наст. издания), позволяющие определить силы токов в системе разветвленных линейных проводников.

[1] (с. 178). Ом (Ohm G. S., 1787—1854) — немецкий физик. В 1825—1827 годах установил пропорциональность силы тока и разности потенциалов (в окончательной формулировке см. Ohm G. S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. Berlin, 1827).

[2] (с. 178). Кирхгоф иногда называл закон Ома принципом (см. примеч. 1 к статье 14).

[3] (с. 181). Гаусс (Gauss C. F., 1777—1855) — немецкий физик, математик, астроном. Ссылка: Allgemeine Lehrsatze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrat der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstossungs Krafte (1840) // Werke. Bd. 5. Göt-

tingen, 1867, S. 195—242; рус. пер. *Гаусс К. Ф.* Избранные труды по земному магнетизму. М.: Изд-во АН СССР, 1952, с. 179—236.

[4] (с. 185). Применительно к металлам закон Ома справедлив при условии $\tau_{ин} \ll T$, где $\tau_{ин}$ — так называемое «инерционное время» (см. ниже), T — период изменения поля.

[5] (с. 185). Джоуль (Joule J. P., 1818—1889) — английский физик. Один из авторов закона сохранения энергии. В 1843 г. экспериментально установил пропорциональность выделяемого в проводнике тепла квадрату силы тока и сопротивлению.

18
О ВЫВОДЕ ЗАКОНА ОМА, СОГЛАСУЮЩЕМСЯ С ТЕОРИЕЙ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ [7]

К моменту выхода в свет этой статьи Кирхгофа (1849) два раздела теории электричества — электростатика и электродинамика — находились на разных стадиях развития. Электростатика отличалась высоким уровнем используемого математического аппарата теории потенциала, построенной в работах Гаусса, Пуассона, Лапласа. В то же время в электродинамике некоторые весьма существенные результаты были получены экспериментально, а теоретическое их обоснование было неудовлетворительным. В первую очередь это относится к закону Ома.

Теоретическое обоснование своего закона Ом связывал с теорией теплопроводности Ж.-Б. Фурье, согласно которой поток тепла распределялся по сечению тела, а его величина определялась градиентом температуры. Распределение температуры находилось из уравнения Лапласа либо уравнения Пуассона.

Изменение потенциала вдоль проводника с током Ом фиксировал с помощью электроскопа; соответственно, величину, определяющую силу тока, Ом назвал разностью электроскопических сил. Тождественность электроскопической силы электрическому потенциалу впервые была показана в данной статье Кирхгофа. Вместе с работами Ф. Неймана, предложившего в 1845 г. математическую формулировку закона электромагнитной индукции, и В. Вебера, сводившего закон электромагнитной индукции и закон Ампера к «основному закону» взаимодействия движущихся частиц электричества, статья Кирхгофа открывала возможность для математического анализа явлений, связанных с действием электрического тока.

[1] (с. 189). Кольрауш (Kohlrausch R., 1809—1858) — немецкий физик-экспериментатор. Известен как один из авторов эксперимента Вебера—Кольрауша (1855 г.), в котором было установлено равенство отношения электростатической и электромагнитной единиц заряда скорости света в вакууме. Кирхгоф ссылается на его работу (Ann. Phys. 1848, Bd. 75, S. 220), в которой Кольрауш экспериментально показал, что разность электроскопических сил на клеммах гальванического элемента пропорциональна его электродвижущей силе.

[2] (с. 191). Ряд напряжений — так называемый ряд Вольты. При контакте двух металлов больший потенциал приобретает тот из них, который имеет меньший порядковый номер.

[3] (с. 191). Вебер (Weber W. E., 1804—1891) — немецкий физик. Профессор Геттингенского университета (1831—1837, 1849—1891). Вместе с Гауссом разрабатывал абсолютную систему мер для электрических и магнитных величин. В 18[illegible] г. предложил — в качестве основного закона теории электричества — закон взаимодействия движущихся электрических частиц. Впоследствии разрабатывал также модели физических явлений, основанные на ги-

потезе существования элементарных электрических корпускул. Кирхгоф имеет в виду предложенную Вебером в 1846 г. (Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbes. über das Grundgesetz der el. Wirkung // Werke, Bd. 3, S. 25—214) модель электрического тока как совокупности двух противоположно направленных потоков разноименно заряженных частиц электрической жидкости.

[4] (с. 192). До Кирхгофа это утверждение было известно только применительно к статическому распределению заряда (Пуассон, 1821).

[5] (с. 193). Закон Вебера имеет вид

$$F = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right\},$$

где e, e' — заряды частиц электричества, r — расстояние между ними, c — скорость света.

[6] (с. 193). Основываясь на предложенной им модели электрического тока (примеч. 3), Вебер связывает действие электродвижущей силы с разделением положительной и отрицательной электрических жидкостей, определяя ЭДС как разность сил, действующих на единичное количество положительной и отрицательной электрической жидкости.

[7] (с. 193). Представление об электрическом токе как о последовательном перемещении частиц электричества от одной молекулы проводника к другой также было сформулировано Вебером в 1846 г.

19

О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ПРОВОДАХ [13]

Основной результат данной статьи Кирхгофа — совпадение скорости распространения электрических волн в проводе со скоростью света в воздухе — выделяет ее как содержащую своеобразное предвосхищение электромагнитной теории света. Следует, однако, заметить, что в этом результате не содержится какого-либо противоречия с принципом дальнодействия, поскольку скорость распространения электрического и магнитного действия по-прежнему предполагается бесконечно большой.

Редактор Annalen der Physik Поггендорф (Poggendorff I. C.) сопроводил публикацию статьи Кирхгофа примечанием (Poggendorff I. C. Bemerkungen zu dem Aufsatz des Prof. Kirchhoff. Ann. Phys. 1857, Bd 100, S. 351), в котором указал, что аналогичное исследование выполнил Вебер и что задержка с его опубликованием связана с необходимостью завершения некоторых экспериментов. Работа Вебера (*Weber W.* Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere über elektrische Schwingungen // Werke. Berlin, 1894. Bd. 4. S. 97—241) была опубликована в 1864 г. Различие подходов к решению задачи характеризует различие между Кирхгофом и Вебером в широком смысле слова. Активный участник кенигсбергского семинара Ф. Неймана, Кирхгоф вполне разделяет его стремление придерживаться формально-математического описания физических явлений. В основу своих расчетов он кладет закон Ома, сознательно избегая каких-либо гипотез о природе электричества. Вебер же, напротив, исходит из уравнения движения частиц электричества, а закон Ома — применительно к рассматриваемому случаю нестационарных токов — предлагает сделать объектом экспериментальной проверки.

[1] (с. 196). Если в законе Вебера (см. примеч. 5 к статье 18) положить $dr/dt = c\sqrt{2}$, то сила, определяемая уравнением (*), обращается в нуль.

[2] (с. 198). Это условие равносильно обычному условию малости так называемого «инер-

ционного времени» по сравнению с интервалами времени, характерными для тока данной частоты. Инерционное время характеризует затухание во времени дрейфового движения электронов в отсутствие внешних сил.

[3] (с. 201). Якоби Борис Семенович (Мориц Герман, 1801—1874) — русский физик и электротехник. Конструировал электродвигатели и телеграфные аппараты, исследовал методы электрических измерений. Упоминаемый Кирхгофом проволочный эталон сопротивления Якоби предложил в 1848 г. По этому поводу см. его переписку с Поггендорфом и Вебером (Труды ИИЕТ АН СССР. М.: 1957. Т. 17. С. 509).

[4] (с. 201). В качестве основных систем единиц Вебер рассматривает электродинамическую и механическую. Электродинамическая система эквивалентна электромагнитной системе СГС (с учетом того, что за единицу массы Вебер принимал миллиграм, за единицу длины — миллиметр). Механическая система единиц соответствовала в целом электростатической системе СГС, отличаясь от нее лишь единицей силы тока. В соответствии с принятой Вебером (и Кирхгофом) моделью тока (примеч. 3 к предыдущей статье) единица силы тока в механической системе в два раза больше соответствующей величины в СГС.

[5] (с. 205). Кирхгоф имеет в виду так называемую «географическую милю», равную 7440 км. Соответственно скорость распространения электрической волны составляет $3{,}11\times10^8$ м/сек. К моменту написания статьи наиболее точным измерением скорости света в воздухе был результат, полученный в 1849 г. И. Физо — $3{,}095\times10^8$ м/сек. Подчеркивая сам факт совпадения двух величин, Кирхгоф не сопровождает его какими-либо комментариями о возможной связи света и электричества. В статье Вебера (см. выше) напротив, предполагается, что с этим фактом «не следует связывать больших ожиданий». Замечание Вебера легко объяснимо. В отличие от Кирхгофа, он рассматривал более общую задачу о распространении волн в проводе с конечной проводимостью, в рамках которой отчетливо проявляется дисперсия волн плотности электрического заряда, и аналогия с распространением волн в световом эфире представляется сомнительной.

20
О ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА В ПРОВОДНИКАХ [14]

[1] (с. 213). Магнитное общество (Magnetisch Verein) — организовано Гауссом в 1834 г.; члены общества — физики из разных стран мира — проводили исследования зависимости магнитного склонения и магнитных бурь от географического положения пунктов наблюдения. Результаты исследований публиковались в ежегоднике, издававшемся Гауссом с 1837 по 1843 г. В 1839 г. в ежегоднике была опубликована статья Гаусса «Общая теория земного магнетизма» (Гаусс К. Ф. Избранные труды, с. 77—146), в которой, среди прочего, обсуждались проблемы теории потенциала.

[2] (с. 222). Томсон (Thomson, William, 1824—1907) — английский физик. В 50-е годы XIX века разрабатывал теорию передачи сигналов по трансатлантическому кабелю. Соответствующее уравнение $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC\frac{\partial V}{\partial t}$, где R и C — соответственно погонное сопротивление и ёмкость кабеля, V — потенциал, было предложено В. Томсоном в 1854 г., в письме Дж. Стоксу (Stokes G. G. // Proc. Royal Society, 1855. Vol. VII. P. 382). Таким образом, тема выполненного Кирхгофом исследования была весьма актуальной.

21
К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА ПО ПОДВОДНЫМ ИЛИ ПОДЗЕМНЫМ ТЕЛЕГРАФНЫМ ПРОВОДАМ [53]

В работе 1857 г. (см. статью 20 наст. издания) Кирхгоф подтвердил правильность вывода В. Томсона о том, что скорость распространения сигнала по подводному кабелю описывается уравнением типа уравнения теплопроводности (см. примеч. 2 к статье 20) для случая медленных колебаний. Это соответствовало реальным условиям передачи сигнала в телеграфии того времени.

Вернувшись через 20 лет к рассмотрению этого же вопроса, Кирхгоф вновь приходит к прежнему выводу.

Теория распространения волн вдоль кабеля для быстропеременных сигналов создана О. Хевисайдом. Им впервые получено волновое уравнение для данного случая (уравнение телеграфистов) (см. *Heaviside O.* On the extra current // Phil. Mag. Ser. 5. 1876. Vol. 2. P. 135—145).

При переводе сохранен термин Кирхгофа «электрические разности». В данном случае под ним понимается контактная разность потенциалов.

[1] (с. 222). Речь идет о работе Гельмгольца Ueber die Bewegungsgleichungen der Electrizität für ruhende leitende Körper // J. reine und angew. Math. 1870. Bd. 72. S. 57—129. Кирхгоф ошибочно сослался на т. 82 этого журнала.

22
О РАВНОВЕСИИ И ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ]8]

Статья впервые опубликована в 1850 г. (J. reine und ungew. Math. 1850. Bd. 40. S. 51—88) и включает в себя две его первые работы по теории упругости — 1848 и 1849 гг. (C. r. Acad. sci. 1848. T. 27. P. 394—397; 1849. T. 29. P. 753—756). Обсуждение этих же вопросов см. также в 30-й лекции по механике (*Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР. 1962. С. 431).

[1] (с. 232). Жермен С. (Germain S., 1776—1831) — французский математик. Занималась теорией чисел, теорией изгиба упругих пластинок.

[2] (с. 234). Штрельке Ф. (Strehlke F., 1797—1886) — учитель, затем директор гимназии в Данциге. Работы по акустике, теории упругости, метеорологии.

[3] (с. 235). Вертгейм Вильгельм (Гильом) (Wertheim G., 1815—1861) родился в Вене. Получил там степерь доктора медицины (1839). С 1840 г. жил во Франции. Корреспондент Венской (1848) и Берлинской (1853) АН. Основные работы по теории упругости.

[4] (с. 238). Практически, Кирхгоф предполагает, что виртуальный момент напряжения на $\int dxdydz$ имеет вид

$$-dxdydz\,(L_1\partial\lambda_1+L_2\partial\lambda_2+L_3\partial\lambda_3),$$

где L_1, L_2, L_3 — должны быть симметричными функциями вида $L_1=a\lambda_1+b\,(\lambda_2+\lambda_3)$ (a, b — константы упругости). Эти допущения для общих выводов являются слишком сильными.

[5] (с. 239). Кирхгоф не приводит никакого определенного эксперимента для подтверждения этих допущений, а ссылка на И. Бернулли неудачна. Известная [гипотеза Бернулли—Эйлера приводит к уравнению, которое правильно (как показал Сен-Венан) для изгиба длинных стержней, но допущения, с помощью которых это уравнение получено, не верны (во

всяком случае, не обладают необходимой общностью); правильные необходимые допущения сделали и обосновали Буссинеск и Сен-Венан. Расчеты Кирхгофа поэтому хотя и интересны и поучительны, но отнюдь не твердо обоснованы.

23
О КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЫ [9]

В статье кратко изложено содержание предыдущей работы. Описаны также дальнейшие эксперименты. Размеры пластин даны, как и в статье 24, в парижских дюймах и линиях (см. примеч. 2 к статье 7 наст. издания).

24
О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ДЕФОРМАЦИЙ, ПРЕТЕРПЕВАЕМЫХ ПРИ МАГНИТНОЙ ИЛИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ [66]

Это вторая из двух статей Кирхгофа по магнито- и электрострикции (первая — см. примеч. 3).

[1] (с. 267). *Helmholtz H.* Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierter Körper wirkenden Kräfte // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1881. S. 191—213.

[2] (с. 267) Квинке Г. (Qwincke G., 1834—1924) — немецкий физик. Работы по молекулярной физике, акустике, оптике. В 1866 г. изобрел прибор для измерения длины звуковых волн при помощи явления интерференции (трубка Квинке).

[3] (с. 268). Выражение для силы A получено Кирхгофом в статье «Об изменении формы, которое претерпевают твердые тела, когда они магнитно или электрически поляризуются» (Sitzber. Akad. Wiss. Berlin. 1884. S. 137—156; Ann. Phys. 1885. Bd. 24. S. 52—74):

$$A=\frac{1}{2}\left(k'+\frac{k''}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

где $\varphi=V+Q$, V — потенциал внешних магнитных сил, Q — потенциал всей магнитно заряженной железной массы в точке с координатами x, y, z; $k'=\dfrac{p'}{\left(1-\frac{4}{3}\pi p\right)^2}$, $k''=\dfrac{p''}{\left(1-\frac{4}{3}\pi p\right)^2}$.

[4] (с. 268). Выражение для A_x, A_y, . . ., о которых идет речь, см. в статье Кирхгофа, указанной в примеч. 3,

$$A_x=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+\frac{k''}{2}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}+k-k'\right)\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

. . . .

$$A_y=B_x=-\left(\frac{1}{4\pi}+k+k''/2\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

A_x, A_y, B_x — компоненты сил давления.

25
О ДВИЖЕНИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В ЖИДКОСТИ [47]

Статья впервые опубликована в 1870 г. (J. reine und angew. Math. 1870. Bd. 71. S. 237—262).

В работе дано обобщение решения Томсона и Тэта задачи о движении тел вращения в жидкости, найденное ими при условиях, что тело не вращается относительно своей оси, а сама ось не выходит из некоторой неподвижной плоскости. Интересно, что и без наложения этих условий задача сводится к эллиптическим интегралам. Работа поражает ясностью и прозрачностью изложения. Проблема рассматривалась в различных вариантах и обобщениях В. А. Стекловым.

26
ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОТЫ В НЕКОТОРЫХ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ [16]

Статья впервые опубликована в 1858 г. (Ann. Phys. 1858. Bd. 103. S. 177—206). Она также включена в сборник, изданный в серии «Классики точных наук», основанной В. Оствальдом (Kirchhoff G. Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie. Leipzig. 1898) и снабжена комментариями М. Планка, которые частично использованы в настоящем издании.

В этой работе Кирхгоф заложил основы термодинамики растворов, которая уже в XIX в. получила значительное развитие, в том числе и в работах М. Планка.

[1] (с. 300). Термины Кирхгофа «величина действия» и «функция действия» (с. 302) не удержались в физике. Как ясно из определения, введенная здесь величина «действия» никак не связана с «действием» в механике. Размерность этой «величины действия» — [энергия].

[2] (с. 304). Другими словами: состояние тела, при котором оно находится одновременно в виде жидкости и пара, более не определяется только значениями t и p. Поэтому вместо p в качестве второй независимой переменной необходимо ввести некоторую другую величину x.

[3] (с. 304). Надо принять во внимание, что $v=(1-x)s+x\sigma$ и $v_0=s$.

[4] (с. 305). При $t=0$ разность выражений (10) и (4) равна K.

[5] (с. 308). При этом существенно, что из предположения, сделанного вначале (см. примеч. 2), состояние любого тела, состоящего из жидкости и некоторого количества газа, вполне определяется величинами x и t.

[6] (с. 311). Интеграл в формуле (12) исчезает, так как следует положить нижнюю границу v равной верхней границе ν.

[7] (с. 314). v — общий объем тела, состоящего из водяного пара, твердой соли и раствора — следует рассматривать как функцию от x и t; при $x=0$ v переходит в v_0.

[8] (с. 316). Здесь принято, что $\sigma=R\,(a+t)\pi_1$ и $\pi=R\,(a+t)/v$.

[9] (с. 316). В следующей формуле под знаком ln должно стоять μ_1/π_1, а не π_1/μ_1, как это у Кирхгофа.

[10] (с. 317). Принимая во внимание, что

$$\int_0^m \ln\frac{\mu}{a+t}\,dx=\int_0^\alpha \ln\frac{\mu}{a+t}\,dx+\int_\alpha^m \ln\frac{\mu}{a+t}\,dx$$

и что по расширенному определению в первом интеграле справа следует положить $\mu=\mu_1$, получим

$$\alpha \ln\frac{\mu_1}{a+t} + \int\limits_{\alpha}^{m} \ln\frac{\mu}{a+t}\, dx.$$

Дифференцируя затем последнее выражение по t, получим указанное ниже в тексте выражение.

[11] (с. 318). Т. е. $dQ/dm=0$.

27
К ТЕОРИИ ДИФФУЗИИ ГАЗОВ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ [64]

Статья интересна как ясным математическим анализом проблемы, так и неуклонным желанием рассмотреть те частные случаи, которые ближе всего к реализуемым в эксперименте условиям.

[1] (с. 320). Стефан Й. (Stefan J., 1835—1893) — австрийский физик. Работы по гидродинамике, кинетической теории газов, теории излучения.

28
О ЦЕЛИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ [41]

Полное название этого выступления Кирхгофа: «О цели естествознания. Доклад, прочитанный 22 ноября 1865 г. по случаю празднования дня рождения высокородного великого герцога Карла Фридриха Баденского и в связи с распределением академической премии». В то время Кирхгоф был ординарным профессором физики и проректором Гейдельбергского университета.

Речь состоит из двух частей. В первой обсуждаются успехи естествознания и цель научного исследования, причем Кирхгоф особо подчеркивает значение установления закона сохранения энергии и важность разработки механической теории теплоты. Перевод этой части печатается в настоящем издании. Вторая часть, составляющая по объему треть первой, посвящена обзору деятельности Гейдельбергского университета за прошедший учебный год, включая и сообщение о студенческих работах, представленных к премии.

«О цели естествознания» отличается от остального, написанного Кирхгофом — единственный раз он позволил себе публично столь подробно высказаться по общим вопросам науки. Понять явление органического или неорганического мира значит, как говорил Кирхгоф, «свести все к механике». Для середины XIX в. такая программа неудивительна. К этому времени среди немецких естествоиспытателей произошел раскол. Причиной его стало то, что «Гельмгольц и его партия решительно высказались в пользу атомистико-механического объяснения природы» (*Wise M. N.* On the relations of physical science to history in late nineteenth—century Germany // Functions and uses of disciplinary histories. Dordrecht. 1983. P. 5).

По своим воззрениям на природу научного знания Кирхгоф во многом примыкал к Г. Гельмгольцу, с которым был дружен. Можно, видимо, говорить о взаимном влиянии Кирхгофа и Гельмгольца. Во вступительном докладе на ежегодном собрании немецких естествоиспытателей в Инсбруке (1869 г.) «О цели и об успехах естествознания» Гельмгольц методологический анализ закона сохранения энергии заключает следующими словами: «. . .все силы природы могут быть измерены одной и той же механической мерой: все силы в отношении их работоспособности эквивалентны чисто механическим силам. В этом заключается первый

значительный шаг, сделанный к разрешению обширной теоретической задачи — свести все явления природы к движению» (*Гельмгольц Г.* Популярные речи. Часть I. СПб., 1898, с. 87—88).

Важно отметить, что Кирхгоф был уверен в недостижимости этого идеала механического мировоззрения. Тем самым он близко подошел к тому, что столь кратко и выразительно было им сформулировано в предисловии к курсу лекций по механике, выдержавших два издания в течение одного 1876 г. Он писал: «Задача механики сводится к описанию происходящих в природе движений, а именно, к описанию их в наиболее полном и простом виде. Я хочу этим сказать, что все сводится только к тому, чтобы раскрыть происходящие явления, а не к тому, чтобы доискаться их *причин*» (*Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР. 1962, с. 3).

В речи 1878 г. «Факты в восприятии» Гельмгольц принимает это утверждение Кирхгофа. А во введении к курсу теоретической физики, написанном в конце жизни, он, по-прежнему соглашаясь с высказыванием Кирхгофа, уточняет: «К этим словам Кирхгофа со своей стороны я мог бы лишь добавить, что возможно полное и простейшее описание можно дать лишь путем формулировки законов, лежащих в основе явлений» (*Гельмгольц Г.* Философия и естественные науки. // Философия науки. Ч. I. Физика. Вып. I. М.—Пг., 1923, с. 77).

[1] (с. 334). Принцип виртуальных скоростей, или принцип возможных перемещений, устанавливает общее условие равновесия механической системы. Историю вопроса см., например, И. Б. Погребысский, Л. С. Фрейман. Аналитическая механика (XVIII в.). // История механики с древнейших времен до конца XVIII века. М.: Наука, 1971, с. 131—144.

[2] (с. 335). «Присоединенная» сила представляет реакцию наложенных связей и силу инерции или, по другой терминологии (см.: *Ишлинский А. Ю.* Механика относительного движения и силы инерции. М.: Наука. 1981), даламберовы и эйлеровы силы инерции.

[3] (с. 339). В своей речи Кирхгоф неоднократно упоминает о предложенной В. Вебером модели электрического тока (см. также статью 18 наст. издания и примеч. 3 к ней), причем оценка ее постепенно меняется. Сначала Кирхгоф принимает концепцию двух разноименно заряженных электрических жидкостей, как соответствующее уровню науки того времени объяснение многих электромагнитных явлений (с. 337); затем ставит под вопрос их реальное существование.

[4] (с. 342). Кирхгоф называет ученых, обосновавших закон сохранения и превращения энергии, в порядке появления их первых публикаций (Р. Майер, 1842; датский инженер Л. Кольдинг, 1843; Д. Джоуль, 1843; Г. Гельмгольц, 1847), а также Р. Клаузиуса, сформулировавшего в 1850 г. II начало термодинамики, и В. Томсона, пришедшего к иной формулировке II начала и как следствия ее — доказавшего невозможность создания вечного двигателя второго рода (1851).

Об открытии закона сохранении энергии см., например, У. И. Франкфурт. Закон сохранения и превращения энергии. М.: Наука, 1978, с. 60—105.

29
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГУСТАВА РОБЕРТА КИРХГОФА В ЧЛЕНЫ-КОРРЕСПОНДЕНТЫ БЕРЛИНСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

[1] (с. 346). Вейерштрасс К. (Weierstraß K., 1815—1897) — немецкий математик. Специального высшего образования не имел. Лекции и научные работы посвящены математическому анализу, теории аналитических функций, дифференциальной геометрии и линейной

алгебре, теории действительных чисел. Ему принадлежит строгое обоснование свойств непрерывных функций и многие важнейшие результаты во всех перечисленных областях математики. Среди учеников Вейерштрасса такие крупные математики как С. В. Ковалевская, Г. Миттаг-Леффлер, К. Шварц, И. Фукс, Ф. Шоттки и др.

Кронекер Л. (Kronecker L., 1823—1891) — немецкий математик. Основные работы относятся к алгебре, теории чисел, теории групп, а также к эллиптическим функциям. Сторонник «арифметизации» математики. Член-корреспондент Петербургской АН.

Куммер Э. (Kummer E., 1810—1893) — немецкий математик. Работы по рядам, геометрии, определенным интегралам. Создал теорию алгебраических чисел, ввел так называемые идеальные числа, доказал теорему Ферма для всех $n \leqslant 100$.

Энке И. Ф. (Encke J. F., 1791—1875) — немецкий астроном. С 1825 г. по 1862 г. — директор Берлинской обсерватории. Работы по определению солнечного параллакса, исследования орбиты кометы Энке и др.; член-корреспондент Петербургской АН с 1829 г.

30
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГУСТАВА РОБЕРТА КИРХГОФА В КОРРЕСПОНДЕНТЫ ПЕТЕРБУРГСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Кирхгоф был избран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук по разряду физическому 29 декабря 1862 г. по ст. стилю, т. е. 10 января 1863 г. по новому стилю. Одновременно членом-корреспондентом Петербургской АН был избран и Р. Бунзен, его соавтор по созданию спектрального анализа.

Представление Кирхгофа подписали Э. Х. Ленц (1804—1865), много и успешно занимавшийся изучением электромагнитных явлений, член Петербургской АН с 1834 г. и Б. С. Якоби (1801—1874), известный физик и электротехник, член Петербургской АН с 1847 г.

[1] (с. 346). Эксперименты описаны в магистерской диссертации А. Оттингена, опубликованной в Annalen der Physik (1862. Bd. 115, 115, S. 513—557). Часть опытов проведена совместно с Пальцовым; Оттинген опирался также на результаты неопубликованной работы Р. Липарта.

[2] (с. 347). Рубидий и цезий обнаружил Р. Бунзен (см. статью 6 наст. издания), талий — В. Крукс (первое сообщение об этом опубликовано в Chemical News 1861. Vol. 3. P. 129—130).

[3] (с. 347). Это установил В. Сван, как подчеркивал и Кирхгоф (см. например, с. 58 наст. издания).

31
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГУСТАВА РОБЕРТА КИРХГОФА В ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧЛЕНЫ БЕРЛИНСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

[1] (с. 350). Поггендорф И. К. (Poggendorff J. Ch., 1796—1877) — немецкий физик. Работы по электромагнетизму и истории физики, в 1821 г. изобрел гальванометр, в 1843 г. прибор для измерения электрической поляризации. Многолетний редактор журнала «Annalen der Physik und Chemie». Иностранный член Петербургской АН с 1868 г.

Дове Х. В. (Dove H. W., 1803—1879) — немецкий физик и метеоролог. Основатель новейшей метеорологии. Работы по законам вращения ветра, распределению температуры над землей, теории изотерм.

Борхардт К. В. (Borhardt W., 1817—1880) — немецкий математик. Работы по теории движения упругих тел, эллиптическим функциям, теории вековых возмущений, алгебраическому анализу. С 1855 г. главный редактор «Journal für reine und ungewandte Mathematik». Член Берлинской АН с 1856 г.

Дюбуа-Реймон Э. (Du Bois-Reymond E., 1818—1896) — немецкий физиолог и физик. Исследования по животному электричеству, физиологии нервов и мускулов.

Магнус Г. (Magnus G., 1802—1870) — немецкий физик и химик. Работы в области гидродинамики, теплоты, оптики, магнетизма и др. Открыл эффект Магнуса. В начале 1840-х гг. создал одну из первых физических лабораторий и организовал (1843 г.) первый коллоквиум по физике. Один из организаторов Берлинского физического общества (1845 г.) и Немецкого химического общества (1868 г.). Создал журнал «Fortschritte der Physik». Иностранный член Петербургской АН с 1854 г.

Учениками Магнуса были Г. Гельмгольц, Р. Клаузиус, А. Кундт, Г. Квинке, Э. Сименс, А. Г. Столетов и другие ученые разных стран.

Рисс П. Т. (Riess P. T., 1804—1883) — немецкий физик. Исследования по прохождению электрического тока в электролитах и проводниках, создал ряд приборов.

БИБЛИОГРАФИЯ*

ТРУДЫ Г. КИРХГОФА

1. Ueber den Durchgang eines elektrischen Strömes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige // Ann. Phys. 1845. Bd. 64. S. 497—514; 1846. Bd. 67. S. 344—349. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 1—22. — То же на фр. яз.: Mémoire sur la propagation de l'électricité dans une plaque conductrice // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1854. T. 40. P. 115—127.
2. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys. 1847. Bd. 71. S. 498—508. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 22—33.
3. Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique // C. r. Acad. sci. 1848. T. 27. P. 394—397.
4. Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen // Ann. Phys. 1848. Bd. 75. S. 189—205. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig. 1882. S. 33—49. — То же сокр. на фр. яз.: Mémoire sur les formules qui représentent l'intensité des courants électriques circulant dans un système de conducteurs non linéaires // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1854. T. 40. P. 327—333.
5. Note sur les vibrations d'une plaque circulaire // C. r. Acad. sci. 1849. T. 29. P. 753—756.
6. Bestimmung der Constanten, von welcher die Intensität inducirter electrischer Ströme abhängt // Ann. Phys. 1849. Bd. 76. S. 412—426. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 118—131.
7. Ueber eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst // Ann. Phys. 1849. Bd. 78. S. 506—513. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 49—55. — То же сокр. на фр. яз.: Demonstration des lois de Ohm, fondée sur les principes ordinaires de l'électricité statique // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1854. T. 41. P. 496—500. — То же сокр. на англ. яз.: On a deduction of Ohm's law, in connexion with the theory of electrostatics // Philos. Mag. Ser. 4. 1850. Vol. 37. P. 463—468.
8. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. reine und angew. Math. 1850. Bd. 40. S. 51—88. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 237—279.
9. Ueber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe // Ann. Phys. 1850. Bd. 81 S. 258—264. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 279—285.
10. Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers // S.-Ber. Kaiser. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl. 1852. Bd. 9. S. 762—773.
11. Ueber den inducirten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen // J. reine und angew. Math. 1854. Bd. 48. S. 348—376. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 193—223.
12. Ueber die Leitungsfähigkeit für Elektricität von Kalium, Natrium, Lithium, Magnesium, etc.,/ Ann. Phys. 1857. Bd. 100. S. 178—193.
13. Ueber die Bewegung der Elektricität in Drähten // Ann. Phys. 1857. Bd. 100. S. 193—217, 251—252. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 131—154. — То же на англ. яз.: On the motion of electricity in wires // Philos. Mag. Ser. 4. 1857. Vol. 13. P. 393—412. — То же на фр. яз. сокр. (со ст. № 14): Du mouvement de l'électricité dans les conducteurs // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1859. T. 57. P. 238—256.
14. Ueber die Bewegung der Elektricität in Leitern // Ann. Phys. 1857. Bd. 102. S. 529—544. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 154—168. — То же на фр. яз. сокр. вместе с предыдущей ст.: Du mouvement de l'électricité dans les conducteurs // Ann. chim et phys. Sér. 3. 1859. T. 57. P. 238—256.
15. Ueber das Sonnenspectrum // Heidelberg. Jb. Lit. 1859. H. 11. S. 841—845.

* Библиография составлена Ю. X. Копелевич.

16. Ueber einen Satz der mechanischen Wärmetheorie, und einige Anwendungen desselben // Ann. Phys. 1858. Bd. 103. S. 177—206. — Idem. // Abhandlungen über mechanische, Wärmetheorie / Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1898. S. 1—31. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 454—482.

17. Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind // Ann. Phys. 1858. Bd. 103. S. 206—209. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 482—485. — Idem. // Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie / Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1898. S. 32—35.

18. Ueber die thermoelektrische Spannungsreihe // Ann. Phys. 1858. Bd. 103. S. 412—428.

19. Ueber die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure // Ann. Phys. 1858. Bd. 104. S. 612—622. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 485—494. — Idem. // Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie / Hrsg. M. Planck. Leipzig. 1898. S. 36—45.

20. Ueber die Fraunhofer'schen Linien // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1859. Okt. S. 662—665. — Idem. // Ann. Phys. 1860. Bd. 109. S. 148—150. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 564—566. — Idem. // Abhandlungen über Emission und Absorption / Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1898. S. 3—5. — Idem. // J. prakt. Chem. 1860. Bd. 80. S .480—482.— То же на фр. яз.: Note sur les raies de Fraunhofer // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1860. T. 58. P. 254—256. — Idem. // J. pharm. et sci. accessoires. 1860. T. 37. P. 388—389. — То же на англ. яз.: On the simultaneous emission and absorption of rays of the same definite refrangibility // Philos. Mag. Ser. 4. 1860. Vol. 19. P. 195—197.

21. Ueber den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1859. Dez. S. 783—787. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 566—571. — Idem. // Abhandlungen über Emission und Absorption / Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1898. S. 6—10.

22. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes // J. reine und angew. Math. 1858. Bd. 56. S. 285—313. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 285—316.

23. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Wällner bezüglich der Spannung des Wasserdampfes von wässerigen Lösungen // Ann. Phys. 1859. Bd. 106. S. 322—325.

24. Ueber das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl // Ann. Phys. 1859. Bd. 108. S. 369—392. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 316—339. — То же на англ. яз.: On the relation of the lateral contraction to the longitudinal expansion in rods of spring steel // Philos. Mag. Ser. 3. 1862. Vol. 23. P. 28—47. — То же сокр. на фр. яз.: Mémoire sur le rapport de l'allongement à la contraction transversale dans les barreaus d'acier trempe // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1860. T. 59. P. 498—505.

25. Ueber den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien // Ann. Phys. 1859. Bd. 108. S. 567—575. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 557—564. — То же сокр. на фр. яз.: Note sur la mesure des angles des axes optiques de l'arragonite relatifs aux diverses raies de Fraunhofer // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1860. T. 59. P. 488—491.

26. Ueber einen neuen Satz der Wärmelehre // Heidelberg. Jb. Lit. 1860. H. 11/12. S. 176—184. — Idem. // Polytechn. J. J. G. Dingler und F. M. Dingler. Stuttgart, 1860. Bd. 157. S. 29—36. — То же на англ. яз.: On a new proposition in the theory of heat // Philos. Mag. Ser. 4. 1861. Vol. 21. P. 241—247.

27. Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen // Ann. Phys. 1860. Bd. 110. S. 160—189; 1861. Bd. 113. S. 337—425. — Idem. // J. prakt. Chem. 1860. Bd. 80. S. 449—477. — Idem. // Ann. Chem. und Pharm. 1861. Bd. 118. S. 349—361. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 598—625. — Idem. // Ostwalds Klassik. exakt. Wiss. 1898. N 72. S. 3—70. — То же на фр. яз. // Ann. chim. et phys. 1861. T. 62. P. 452—486; 1862. T. 64. P. 257—311. — То же на англ. яз.: On chemical analysis by spectrum observations // Quart. J. Chem. Soc. London. 1861. Vol. 13. P. 270—288. — Idem. // Philos. Mag. Ser. 4. 1860. Vol. 20. P. 89—109; 1861. Vol. 22. P. 329—349, 498—510. In Gemeinschaft mit R. W. Bunsen.

28. Auszug aus einem Schreiben an Erdmann (Ueber die Fraunhofer'schen Linien) // J. prakt. Chem. 1860. Bd. 80. S. 483—486. — То же на англ. яз.: On the chemical analysis of the solar atmosphere // Chem. News. 1861. Vol. 3. P. 115—116.

29. Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht // Ann. Phys. 1860. Bd. 109. S. 275—301. — То же на фр. яз.: Note sur le rapport entre le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant des corps pour la chaleur et la lumière // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1860. T. 59. P. 124—128; 1861. T. 62. P. 160—192.
30. Das Sonnenspectrum // Abh. Akad. Wiss. Berlin. 1861. (Phys.). S. 63—95; 1862. (Phys.). S. 227—240. — То же, отдельно издан. вместе с № 33 // Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. B., 1862. S. 3—21. — То же на фр. яз.: Recherches sur le spectre solaire et sur les spectres des corps simples // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1863. T. 68. P. 1—45. — То же на ит. яз.: Sullo spettro solare, e sugli spettri degli elementi chimici // Nuovo cim. 1862. T. 16. P. 199—232. — То же на англ. яз.: Researches on the solar spectrum and spectra of the chemical elements. L.: MacMillan, 1862. (Совм. с № 3).
31. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln // J. reine und angew. Math. 1861. Bd. 59. S. 89—110. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig. 1882. S. 78—100.
32. Letter on the chemical analysis of the solar atmosphere // Philos. Mag. Ser. 4. 1861. Vol. 21. P. 185—188.
33. Ueber das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht // *Kirchhoff G.* Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. B., 1862. S. 22—39. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 571—598. — Idem. // Abhandlungen über Emission und Absorption / Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1898. S. 11—36.
34. Die Spectren der Alkalien und alkalischen Erden // Ztschr. anal. Chem. 1862. Bd. 1. S. 1—2. In Gemeinschaft mit R. W. Bunsen.
35. Kleiner Spectralapparat zum Gebrauch in Laboratorien // Ibid. S. 139—140. In Gemeinschaft mit R. W. Bunsen.
36. Sur le principe de l'egalité des pouvoires émissifs et absorbants // Ann. chim. et phys. Sér. 3. 1863. T. 68. P. 184—186.
37. On standards of electrical resistance // Electrician. 1863. Vol. 4. P. 51.
38. Zur Geschichte der Spectralanalyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre // Ann. Phys. 1863. Bd. 118. S. 94—111. — Idem. // Ges. Abh. 1882. S. 625—641. — То же на англ. яз.: Contributions towards the history of spectrum analysis and of the analysis of the solar atmosphere // Philos. Mag. Sér. 4. 1863. Vol. 25. P. 250—262.
39. Recherches sur le spectre solaire et sur les spectres des corps simples // Ann. chim. et phys. Sér. 4. 1864. T. 1. P. 396—411.
40. Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche // Ann. Phys. 1864. Bd. 121. S. 551—566. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 168—182. — То же на фр. яз.: Sur la théorie de la decharge d'une bouteille de Leyde // Arch. sci. phys. et natur. Genève. 1864. T. 21. P. 370—381.
41. Ueber das Ziel der Naturwissenschaften: Akad. Vortrag. Heidelberg, 1865. 32 S.
42. Sur les taches solaires // C. r. Acad. sci. 1867. T. 64. P. 396—400; T. 65. P. 644—646, 1046.
43. Schreiben gegen Faye's Einwürfe gegen die neuere Ansicht ber Entstehung der Sonnenflecke // Astron. Nachr. 1867. Bd. 69. S. 16—22.
44. Ueber den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung // Ann. Phys. 1868. Bd. 134. S. 177—193. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 540—556. — То же сокр. на фр. яз.: Influence de la conductibilité des gaz pour la chaleur sur la vitesse du son // Ann. chim. et phys. Sér. 4. 1868. T. 15. P. 491—492.
45. Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1869. S. 881—887. — Idem. // J. reine und angew. Math. 1870. Bd. 71. S. 263—273. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 404—416.
46. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen // J. reine und angew. Math. 1869. Bd. 70. S. 289—298. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 416—441.
47. Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit // J. reine und angew. Math. 1869. Bd. 71. S. 237—262. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 376—403.
48. Zur Theorie des in einem Eisenkörper inducirten Magnetismus (1870) // Ann. Phys. 1871. Erganzungsband 5. S. 1—15. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 223—237.

49. Mechanik // Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig, 1876. Bd. 1; 2. Aufl. Leipzig, 1876. 466 S.
50. Ueber die stationären electrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1875. Juli. S. 487—497. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 56—66.
51. Ueber die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel // Abh. Akad. Wiss. Berlin. 1876. Phys. Abt. 2. S. 57—84. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 352—376.
52. Zur Theorie des Condensators // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1877. März, S. 144—162. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 101—117.
53. Zur Theorie der Bewengung der Elektricität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1877. Okt. S. 598—611. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 182—193.
54. Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1879. Mai. S. 395—409. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 428—442.
55. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1879. Okt. S. 815—828. — Idem. // Ann. Phys. 1880. Bd. 11. S. 501—512. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 339—351.
56. Ueber die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten // Monatsber. Akad. Wiss. Berlin. 1880. Juli. S. 601—613. — Idem. // Ann. Phys. 1880. Bd. 11. S. 801—811. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 66—77.
57. Ueber die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme // Ann. Phys. 1879. Bd. 9. S. 1—47. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 495—539. In Gemeinschaft mit G. Hansemann.
58. Versuche über stehende Schwingungen des Wassers // Ann. Phys. 1880. Bd. 10. S. 337—347. — Idem. // Ges. Abh. Leipzig, 1882. S. 442—454. In Gemeinschaft mit G. Hansemann.
59. Ueber die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Elektricität // Ann. Phys. 1881. Bd. 13. S. 406—422. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 1—17. In Gemeinschaft mit G. Hansemann.
60. Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Voigt zur Theorie des leuchtenden Punkts (1880) // J. reine und angew. Math. 1881. Bd. 90. S. 34—38. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 17—22.
61. Zur Theorie der Lichtstrahlen // S.-Ber. Akad. Wiss. Berlin. 1882. S. 641—669. — Idem. // Ann. Phys. 1883. Bd. 18. S. 663—695. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag Leipzig, 1891. S. 22—54. — То же на фр. яз.: Sur la théorie des rayons lumineux // Ann. sci. Ècole Normale Super. P., 1886. T. 30. P. 303—342.
62. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1882. 641 S.
63. Ueber die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder // S.-Ber. Akad. Wiss. Berlin. 1883. Apr. S. 519—524. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 54—59.
64. Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand // Ann. Phys. 1884. Bd. 21. S. 563—575. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 78—91.
65. Ueber die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird // S.-Ber. Akad. Wiss. Berlin. 1884. Febr. S. 137—156. — Idem. // Ann. Phys. 1885. Bd. 24. S. 52—74. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 91—113.
66. Ueber einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlectrisch polarisirt wird // S.-Ber. Akad. Wiss. Berlin. 1884. Dez. S. 1155—1170. — Idem. // Ann. Phys. 1885. Bd. 25. S. 601—617. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 114—131.
67. Zur Theorie der Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität auf zwei leitenden Kugeln // S.-Ber. Akad. Wiss. Berlin. 1885. Nov. S. 1007—1013. — Idem. // Ann. Phys. 1886. Bd. 27. S. 673—679. — Idem. // Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Leipzig, 1891. S. 131—137.
68. Beweis der Existenz des Potentials das an der Grenze des betrachteten Raumes gegebene Werthe hat für den Fall dass diese Grenze eine überall convexe Fläche ist // Acta math. 1890/1891. T. 14. P. 179—183.
69. Mathematische Optik // Vorlesungen über mathematische Physik / Hrsg. K. Hensel. Leipzig, 1891. Bd. 2. 272 S.

70. Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus // Vorlesungen über mathematische Physik / Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1891. Bd. 3. 228 S.
71. Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag / Hrsg. L. Boltzmann. Leipzig, 1891. 137 S.
72. Vorlesungen über die Theorie der Wärme // Vorlesungen über mathematische Physik Hrsg. M. Planck. Leipzig, 1894. Bd. 4. 210 S.
73. Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen / Hrsg. W. Ostwald // Ostwald's Klassik. exakt. Wiss. Leipzig, 1895. N 72. S. 1—74. In Gemeinschaft mit R. W. Bunsen.
74. Abhandlungen über Emission und Absorption / Hrsg. M. Planck. // Ostwald's Klassik. exakt. Wiss. 1898. N 100. S. 1—41.
75. Anhandlungen über mechanische Wärmetheorie / Hrsg. M. Planck. // Ostwald's Klassik. exakt. Wiss. 1898. N 101. S. 1—48.

ТРУДЫ Г. КИРХГОФА, ПЕРЕВЕДЕННЫЕ НА РУССКИЙ ЯЗЫК *

1. Механика. Лекции по математической физике / Под ред. А. Т. Григорьяна и Л. С. Полака. М.: Изд-во АН СССР, 1962 [49].
2. Об отношении между испускательной и поглощательной способностями для тепла и света // Шепф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. М.: Мир, 1981. С. 124—143 [29].

РАБОТЫ О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Г. КИРХГОФА **

Столетов А. Г. Г. Р. Кирхгоф // Природа. СПб., 1873. — То же. М., 1873. Отдельное изд. — То же // Столетов А. Г. Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. Т. 2. С. 31—52.
Нетушил А. В., Фабрикант В. А., Г. Р. Кирхгоф // Электричество. 1957. № 10. С. 71—73.
Степанов Б. И. О законе Кирхгофа // Изв. АН БССР. 1954. № 4. С. 125—129.
Горнштейн Т. Н. Густав Роберт Кирхгоф и его исследования по тепловому излучению // Тр. ИИЕТ. 1960. Т. 34. С. 110—156.
Больцман Л. Густав Роберт Кирхгоф // Больцман Л. Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 29—52.
Степанов Б. И. Густав Роберт Кирхгоф // Журн. прикл. спектроскопии. 1977. Т. 27, вып. 3. С. 387—394.
Шепф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. М.: Мир, 1981. 190 с.
Helmholtz R. Gustav Robert Kirchhoff // Dt. Rdsch. B., 1887. Bd. 54. S. 232—245.
Hofmann A. W. G. R. Kirchhoff // Ber. Dt. chem. Ges. 1877. Bd. 20. S. 2771—2777.
Voigt W. Zum Gedächnis von G. Kirchhoff // Abh. Ges. Wiss. Göttingen. 1889. Bd. 35. S. 110.
Pockels F. Gustav Robert Kirchhoff // Heidelberger Professoren aus dem 19. Jahrhundert. Heidelberg. 1903. Bd. 2. S. 243—263.
Warburg E. Zur Erinnerung an Gustav Kirchhoff // Naturwiss. 1925. H. 11. S. 205—212.
Agassi J. The Kirchhoff—Planck radiation law // Science. 1967. Vol. 156. P. 30—37.
Danzer K. Robert Bunsen und Gustav Kirchhoff. Leipzig: Teubner. 1972. 95 S.
Kangro H. Kirchhoff und die spektralanalitische Forschung // G. R. Kirchhoff. Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectren der chemischen Elemente. Milliaria. Bd. XVII. Osnabrück: Otto Zeller. 1972. 54 S.
Siegel D. M. Balfour Stewart and Gustav Robert Kirchhoff: two independent approaches to Kirchhoff's radiation law // Isis. 1976. Vol. 67. P. 565—600.

---

* Кроме работ, помещенных в настоящем издании. В квадратных скобках указаны номера из общего списка работ Кирхгофа.

** Кроме работ, посвященных истории отдельных разделов физико-математических наук.

УКАЗАТЕЛЬ ИМЕН *

Ампер А. М. (Ampère A. M.) 193, 338
Ангстрем А. (Ångström A.) 11, 86, 107—110
Араго Д. Ф. (Arago D. F.) 96, 97, 100, 101
Аристотель 333
Архимед 333, 334

Бабо Л. (Babo C. H. L.) 318
Бернулли И. (Bernoulli J.) 334
Бернулли Я. (Bernoulli J.) 239
Борхардт К. В. (Borhardt C. W.) 350
Брюстер Д. (Brewster D.) 53, 81, 84, 85, 92, 94, 95, 104, 106
Бунзен Р. (Bunsen R.) 52, 53, 56, 85, 88—91, 103, 108, 109, 114, 307, 308, 310, 312, 313, 321, 346, 347, 350

Вебер В. (Weber W.) 191, 193, 194, 196, 201, 212
Вейерштрасс К. (Weierstraβ K.) 346, 350
Вертгейм Г. (Wertheim G.) 235, 238, 260—262, 264, 349
Виллиген Ф. С. М. ван дер (Willigen V. S. M. van der) 86—88, 107—108
Вильсон А. (Wilson A.) 97—99

Галилей Г. (Galilei G.) 96, 333, 334
Гамильтон В. Р. (Hamilton W. R.) 280
Гаусс К. Ф. (Gauss C. F.) 124, 126, 181, 213, 277
Гейсслер И. Г. В. (Geissler J. H. W.) 87, 108
Геллий Авл. (Gellius Aul.) 72
Гельмгольц Г. (Helmholtz H.) 21, 30, 138, 222, 342
Гершель Дж. (Herschel J.) 105—107
Гладстон Дж. Х. (Gladston J. H.) 81, 94, 95
Грандо Л. (Grandeau L.) 94, 103
Грин Дж. (Green G.) 30, 236
Гюйгенс Х. (Huygens Ch.) 28, 30, 334

Даламбер Ж. (D'Alambert J.) 334, 335, 340
Даниель Дж. Ф. (Daniell J. F.) 168
Дебрэ А. (Debray H. J.) 103
Депре С. (Despretz C.) 107
Джоуль Дж. П. (Joule J. P.) 185, 188, 279, 342
Дирихле Л. (Dirichlet P. G. L.) 35, 349
Дове Х. В. (Dove H. W.) 350
Дрепер Дж В. (Draper J. W.) 27, 98
Друммонд Т. (Drummond T.) 105
Дюбуа-Реймон Э. (Du-Bois Reymond E.) 350

Евклид 333

Жермен С. (Germain S.) 232—234, 263, 345

Зильберман И. Т. (Silbermann J. T. H.) 312, 313

Каньяр-Латур Ш. (Cagniard de la Tour Ch.) 264
Карл Фридрих 331
Карно С. (Carnot S.) 13
Картмелл Р. (Cartmell R.) 85
Квинке Г. (Guincke G. G.) 267, 269—271
Кирхгоф Г. Р. (Kirchhoff G. R.) 53, 85, 102, 105, 113, 114, 152, 189, 274, 345—350
Клаузен Т. (Clausen T.) 135
Клаузиус Р. (Clausius R.) 138, 146, 147, 301, 305, 306, 310, 342
Клебш А. (Clebsch A.) 29
Ковалевская С. В. 152
Кольдинг Л. (Colding L.) 342
Кольрауш Р. (Kohlrausch R. H.) 189, 193, 201
Коши О. (Cauchy A. L.) 238, 349
Кронекер Л. (Kronecker L.) 346, 350
Крукс В. (Crookes W.) 90, 91, 108, 113
Кулон Ш. (Coulomb Ch. A.) 194, 337
Куммер Э. (Kummer E.) 346, 350
Купер (Cooper) 74

Лавуазье А. Л. (Lavoisier A. L.) 332
Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 232, 238, 263
Лаплас П. С. (Laplace P. S.) 96
Лейденфрост Г. (Leidenfrost G.) 64
Ленц Э. Х. 348
Леонарда да Винчи (Leonardo da Vinci) 334
Липпарт (Lipphart) 346
Липшиц Р. (Lipschitz R.) 125

Магнус Г. (Magnus G. G.) 350
Майер Ю. Р. (Mayer J. R.) 342
Максвелл Дж. К. (Maxwell J. K.) 267
Мариотт Э. (Mariotte E.) 304, 305
Массон А. (Masson A.) 11, 86, 107
Маттиссен А. (Mattiessen A.) 94, 95

* В Указатель имен внесены фамилии, встречающиеся в трудах Г. Кирхгофа и в Дополнениях. Указатель составлен В. М. Ядрихинской.

Миллер А. (Miller W. A.) 85, 105, 106, 108, 112, 113
Морен (Morren) 103

Навье А. (Navier H.) 263
Нейман Ф. (Neumann F.) 350
Нейман К. (Neumann C.) 152
Нигидий Фигулус (Nigidius Figulus) 72
Ньепс де Сен Виктор (Nièpce de St. Victor) 110
Ньютон И. (Newton I.) 335, 337

Ом Г. С. (Ohm G. S.) 155, 178, 180, 181, 187—189, 192, 345
Оттинген А. фон (Oettingen A. von) 346

Пальцов А. (Paalzow A.) 346
Плана Дж. (Plana G.) 115, 116, 124, 132
Плюккер Ю. (Plücker J.) 87, 107
Поггендорф И. К. (Poggendorff J. Ch.) 350
Пуассон С. Д. (Poisson S. D.) 115, 116, 124, 132, 234, 235, 238, 241, 246, 258, 260—264, 278, 345, 349

Реньо А. В. (Regnault H. V.) 56, 306, 307, 319
Рисс П. Т. (Riess P. T.) 350
Роско Г. Э. (Roscoe H. E.) 53, 91, 103
Румкорф Г. Д. (Rumkorf H. D.) 56, 86—88
Рэнкин В. (Rankine W.) 306

Савар Ф. (Savart F.) 262
Саллерон (Salleron) 76
Сван В. (Swan W.) 58, 78, 85, 108, 109
Секки А. (Secchi A.) 100
Стас Ж. С. (Stas J. S.) 74
Стевин С. (Stevin S.) 334
Стефан Й. (Stefan J.) 320
Стокс Д. Г. (Stokes G. G.) 69, 110, 113, 114
Столетов А. Г. 277
Стюарт Б. (Stewart B.) 111, 112

Тальбот Ф. (Talbot W. H. F.) 105—107
Тейлор Б. (Taylor B.) 215
Томсон В. (Thomson W.) 113, 114, 133, 135, 137, 138, 147, 222, 228, 267, 280, 300, 301, 342
Тэт П. (Tait P. G.) 280

Уитстон Ч. (Weatstone Ch.) 11, 86, 107, 108

Фавр П. (Favre P. A.) 312, 313
Ферье (Ferrier) 76
Фогт В. (Voigt W.) 28
Фольварчны (Folwarczny) 60
Форбс Д. Д. (Forbes J. D.) 95
Фрагмен Э. (Fragmann E.) 154
Фраунгофер Й. (Fraunhofer J.) 11, 46, 52, 61, 70, 81, 84—86, 92, 103, 104
Фрелих И. (Fröhlich J.) 28, 47
Френель О. (Fresnel A.) 28, 46
Фуко Л. (Foucault L.) 69, 87, 89
Фурье Ж. (Fourier J. B.) 35, 204, 206

Хладни Э. (Chladni E. F.) 259—261, 263, 265, 345, 349
Хофман К. (Hofmann K.) 103, 104

Шварц Г. А. (Schwarz H. A.) 138, 142
Штейнхейль К. А. (Steinheil C. A.) 77, 81
Штрельке Ф. (Strehlke F.) 234, 261, 262, 266, 349

Энке И. Ф. (Encke J. F.) 346

Якоби К. (Jacobi C.) 122, 148, 259
Якоби С. Б. (М.-Г.) 201, 202, 221, 348

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора 7

I. Работы по термодинамике излучения и физической оптике 9

1. О взаимосвязи между излучением и поглощением света и тепла . . . 9
2. Об отношении между испускательной и поглощательной способностями тел для тепла и света 12
3. К теории световых лучей 28

II. Работы по спектральному анализу 52

4. О фраунгоферовых линиях 52
5. Химический анализ посредством наблюдений спектров. I 53
6. Химический анализ посредством наблюдений спектров. II 71
7. Солнечный спектр 81
8. Исследования солнечного спектра и спектров химических элементов 102
9. К истории спектрального анализа и анализа солнечной атмосферы 105

III. Работы по электростатике 115

10. О распределении электричества на двух проводящих шарах 115
11. К теории равновесного распределения электричества на двух проводящих шарах 132
12. К теории конденсатора 138
13. Доказательство существования потенциала, принимающего на границе рассматриваемой области заданные значения, для случая, когда эта граница всюду выпукла 152

IV. Работы по электрическому току в проводящих средах 155

14. О прохождении электрического тока через плоскую пластину, например, круглой формы 155
15. Дополнение к предыдущей статье 166
16. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов 170
17. О применимости формул для силы гальванического тока в системе линейных проводников к системе, частично состоящей из нелинейных проводников 178
18. О выводе закона Ома, согласующемся с теорией электростатики . . . 189
19. О движении электричества в проводах 194
20. О движении электричества в проводниках 211
21. К теории движения электричества по подводным или подземным телеграфным проводам 222

V. Работы по теории упругости 232

22. О равновесии и движении упругой мембраны 232
23. О колебаниях круглой упругой мембраны 263
24. О некоторых применениях деформаций, претерпеваемых телом при магнитной или диэлектрической поляризации 267

VI. Разные работы 280
25. О движении тела вращения в жидкости 280
26. Об одной теореме механической теории теплоты и некоторых ее приложениях 300
27. К теории диффузии газов через пористую перегородку 320
28. О цели естествознания 331

Дополнения 345
29. Представление Густава Роберта Кирхгофа в члены-корреспонденты Берлинской Академии наук 345
30. Представление Густава Роберта Кирхгофа в корреспонденты Петербургской Академии наук 346
31. Представление Густава Роберта Кирхгофа в действительные члены Берлинской Академии наук 348

Приложения 351
Л. С. Полак. **Густав Роберт Кирхгоф. 1824—1887** 351

Комментарии 393

Библиография 420

Указатель имен 425

Научное издание

Густав Роберт Кирхгоф

Избранные труды

Утверждено к печати
Редакционной коллегией
серии «Классики науки»
Академии наук СССР

Редактор издательства
Г. Г. Гуськов

Художественный редактор
М. Л. Храмцов

Технический редактор
Л. Н. Золотухина

Корректоры
Н. Г. Васильева, Н. Б. Габасова

ИБ № 37563

Сдано в набор 11.03.88
Подписано к печати 03.08.88
Формат 70×90 1/16.
Бумага книжно-журнальная импортная
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 32,03. Усл. кр. отт. 33,64.
Уч.-изд. л. 31.4
Тираж 1750 экз. Тип. зак. 33
Цена 5 р. 90 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864, ГСП-7, Москва В-485,
Профсоюзная ул. 90

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая типография издательства «Наука»
199034, Ленинград, В-34, 9 линия, 12



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
ГОТОВИТ К ПЕЧАТИ КНИГИ:

ВОСПОМИНАНИЯ ОБ АКАДЕМИКЕ Л. Д. ЛАНДАУ / ИН-Т ТЕОРЕТ. ФИЗИКИ. — М.: Наука, 1988 (IV кв.). — 20 л. — (Ученые СССР. Воспоминания, очерки, материалы). — (В пер.): 1 р. 80 к.

Сборник содержит воспоминания учеников и друзей Л. Д. Ландау (1908—1968) — академиков Е. М. Лифшица, В. Л. Гинзбурга, В. И. Гольданского, М. А. Стыриковича, И. М. Халатникова, И. К. Кикоина, писателя Д. С. Данина и др. Часть воспоминаний, охватывающих все периоды жизни Л. Д. Ландау, публикуется впервые.
Для физиков, историков науки и для широкого круга читателей.
1704010000



КОЧИНА П. Я.
НАУКА, ЛЮДИ, ГОДЫ. М.: Наука, 1988 (IV кв.). — 35 л. — (Наука, мировоззрение, жизнь). — (В пер.): 3 р. 90 к.

Наряду с автобиографическим материалом, изложенным в форме «Воспоминаний», в книге представлены крупные события научной жизни, даны яркие портреты видных ученых — современников автора, академика АН СССР: замечательной русской женщины-математика С. В. Ковалевской, выдающихся советских ученых А. А. Фридмана, Н. Е. Кочина и др. В отдельном разделе собраны работы по проблемам прикладной гидродинамики и мелиорации засушливых земель, что связано с деятельностью автора в качестве председателя Комиссии по вопросам орошения Кулундинской степи. Для широкого круга читателей.
1700000000

**Для получения книг почтой
заказы просим направлять по адресам
магазинов «Академкнига»:**

480091 **Алма-Ата**, ул. **Фурманова, 91/97** («Книга — почтой»);
370001 **Баку**, ул. Коммунистическая, 51 («Книга — почтой»);
232600 **Вильнюс**, ул. Университето, 4;
690088 **Владивосток, Океанский** проспект, 140 («Книга — почтой»);
320093 **Днепропетровск**, проспект Гагарина, 24 («Книга — почтой»);
734001 **Душанбе**, проспект Ленина, 95 («Книга — почтой»);
375002 **Ереван, ул. Туманяна, 31;**
664033 **Иркутск**, ул. Лермонтова, 289 («Книга — почтой»);
420043 **Казань**, ул. Достоевского, 53 («Книга — почтой»);
252030 **Киев**, ул. Ленина, 42;
252142 **Киев**, проспект Вернадского, 79;
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 2;
252030 **Киев**, ул. Пирогова, 4 («Книга — почтой»);
277012 **Кишинев**, проспект Ленина, 148 («Книга — почтой»);
343900 **Краматорск**, Донецкой обл., ул. Марата, 1 («Книга — почтой»);
660049 **Красноярск**, проспект Мира, 84;
443002 **Куйбышев**, проспект Ленина, 2 («Книга — почтой»);
191104 **Ленинград**, Литейный проспект, 57;
199164 **Ленинград**, Таможенный пер., 2;
199034 **Ленинград**, В/О, 9 линия, 16;
197345 **Ленинград**, Петрозаводская ул. («Книга — почтой»);
194064 **Ленинград, Тихорецкий** проспект, 4;
220012 **Минск**, Ленинский проспект, 72 («Книга — почтой»);
103009 **Москва**, ул. Горького, 19а;
117312 **Москва**, ул. Вавилова, 55/7;
117192 **Москва, Мичуринский** проспект, 12 («Книга — почтой»);
630076 **Новосибирск**, Красный проспект, 51;
630090 **Новосибирск**, Морской проспект, 22 («Книга — почтой»);
142284 **Протвино** Московской обл., ул. Победы, 8;
142292 **Пущино** Московской обл., МР, «В», 1 («Книга — почтой»);
620151 **Свердловск**, ул. Мамина-Сибиряка, 137 («Книга — почтой»);
700000 **Ташкент**, ул. Ю. Фучика, 1;
700029 **Ташкент**, ул. Ленина, 73;
700070 **Ташкент**, ул. Шота Руставели, 43
700185 **Ташкент**, ул. **Дружбы народов**, 6 («Книга — почтой»);
634050 **Томск, наб. реки Ушайки, 18;**
634050 **Томск**, Академический проспект, 5;
450059 **Уфа**, ул. Р. Зорге, 10 («Книга — почтой»);
450025 **Уфа**, ул. Коммунистическая, 49;
720000 **Фрунзе**, бульвар Дзержинского, 42 («Книга — почтой»);
310078 **Харьков**, ул. Чернышевского, 87 («Книга — почтой»).

Г. КИРХГОФ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

